

確率過程における weak valueと その応用

近畿大学総合理工学研究科 富田博之

(要旨) 古典的確率過程における、2時点条件付き確率による期待値も、量子力学における weak value と類似の、『負の確率』など異常な振舞いを示すことがある。マスター方程式の固有値問題が解ける場合には固有ベクトル展開を用いて、そうでない場合にもモンテカルロ・シミュレーションにより、weak value を計算することは可能である。Weak value を理解する一助となるかもしれない。

定常マルコフ確率過程

\boldsymbol{x} = 確率変数 (の組) , $W(\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}')$ = 遷移確率

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \delta_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'} \sum_{\boldsymbol{x}''} W(\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}'') - W(\boldsymbol{x}' \rightarrow \boldsymbol{x})$$

として、(前進)マスター方程式が以下で与えられているとする:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_i, t_i) = - \sum_{\boldsymbol{x}'} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') P(\boldsymbol{x}', t | \boldsymbol{x}_i, t_i)$$

$$\text{定常解} : P_0(\boldsymbol{x}) = \lim_{t-t_i \rightarrow \infty} P(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{x}_i, t_i)$$

以下では次の量を用いる:

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \sqrt{P_0(\boldsymbol{x})}$$



2時点条件付き確率

$$P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i; \mathbf{x}_f, t_f), \quad t_i \leq t \leq t_f \quad (; \text{ は AND })$$

は、閉じた1つの線形発展方程式には従わないが、以下のように『波動関数』（確率振幅）の対の積で表現できる：

$$P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i; \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{1}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_f, t_f) \psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i)$$

$$\langle \psi_f | \psi_i \rangle = \sum_{\mathbf{x}'} \bar{\psi}(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_f, t_f) \psi(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_i, t_i)$$

波動関数

$$\psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i) = \phi_0(\mathbf{x})^{-1} P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i), \quad t \geq t_i$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_f, t_f) = \phi_0(\mathbf{x})^{-1} \bar{P}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_f, t_f), \quad t \leq t_f$$

posterior probability



『シュレディンガー方程式』

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i, t_i) = - \sum_{\mathbf{x}'} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_i, t_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_f, t_f) = \sum_{\mathbf{x}'} H^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \bar{\psi}(\mathbf{x}', t | \mathbf{x}_f, t_f)$$

‘Hamiltonian’ $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \phi_0(\mathbf{x})^{-1} L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \phi_0(\mathbf{x}')$

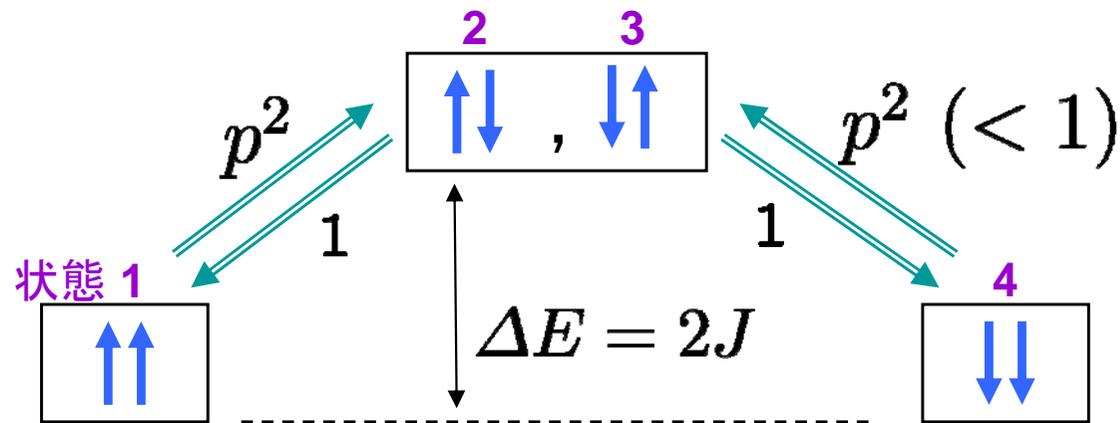
$$H^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = H(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad (\text{transpose})$$

When

詳細釣り合い条件: $P_0(\mathbf{x})W(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = P_0(\mathbf{x}')W(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x})$

→ $H^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad : \text{hermite (実対称)}$
 $\phi_0(\mathbf{x})$ が 基底状態

例 古典 Ising スピン対の確率過程モデル



$$p^2 = e^{-2J/kT}$$

詳細釣合いを満たす。

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ p^2 & 0 & 0 & p^2 \\ p^2 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2p^2 & -1 & -1 & 0 \\ -p^2 & 2 & 0 & -p^2 \\ -p^2 & 0 & 2 & -p^2 \\ 0 & -1 & -1 & 2p^2 \end{pmatrix}$$

‘Hamiltonian’ (*hermite*)

$$H = -(1 - p^2) \sigma_z \otimes \sigma_z - p (\sigma_0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \sigma_0) + (1 + p^2) \sigma_0 \otimes \sigma_0$$

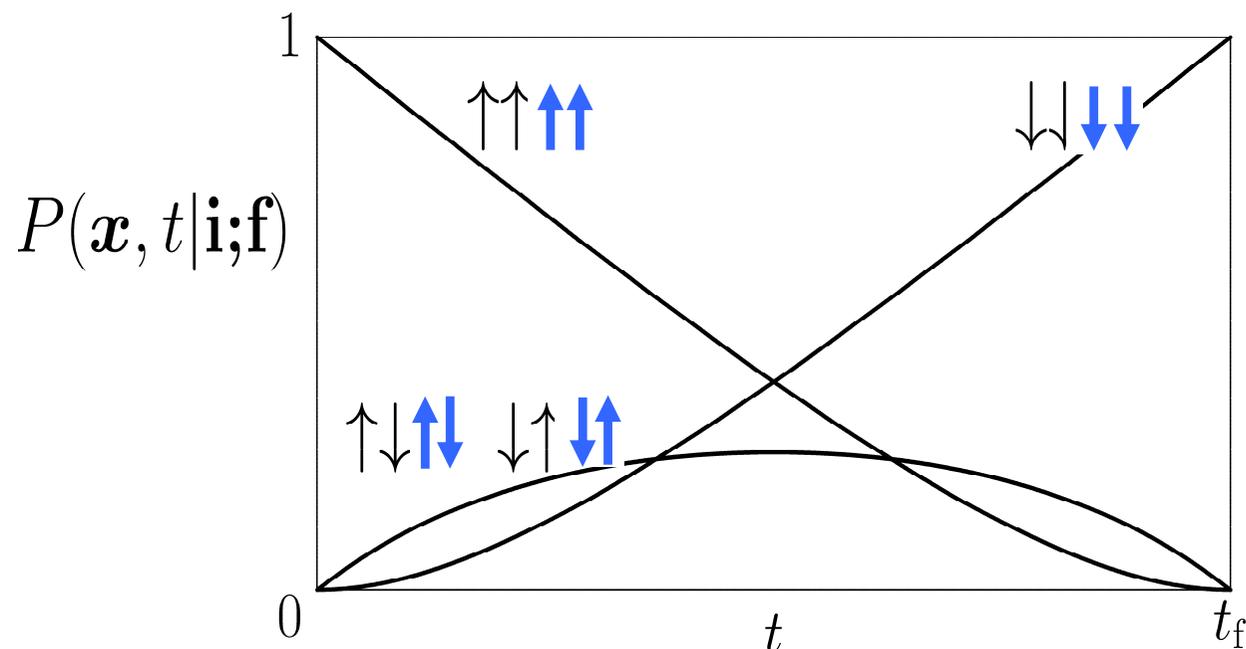
(σ_x, σ_z は Pauli 行列, $\sigma_0 = I_2$)

H の固有値・固有ベクトルを求めておけば、あとは量子力学と同じ手順で計算できる。おもしろいのは、**weak value** の場合と同じく、**始状態と終状態が異なる** 場合である。

例えば

from $\uparrow\uparrow$ to $\downarrow\downarrow$

(2時点条件付確率)



これ自体はごく あたりまえ の結果であるが、

スピン状態ではなく **H の固有状態** を基底にとった場合、

$|i\rangle\langle i| = |\phi^{(i)}\rangle\langle\phi^{(i)}|$ (projection) の期待値(注)を計算すると

(注. この表示での **密度行列** の対角成分)

$$\left. \begin{matrix} P(0, t) \\ P(1, t) \\ P(2, t) \\ P(3, t) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\langle\psi_f|\psi_i\rangle} \left\{ \begin{matrix} |\psi_i(t)\rangle = \{\psi(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_i, t_i)\}^\dagger \\ \langle\psi_f(t)| = \{\bar{\psi}(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_f, t_f)\} \end{matrix} \right.$$

ブラケット表示

$$\times \left\{ \begin{matrix} \langle\psi_f(t)|0\rangle\langle 0|\psi_i(t)\rangle = 1 \\ \langle\psi_f(t)|1\rangle\langle 1|\psi_i(t)\rangle = -(1 + p^2) e^{-\lambda^{(1)}t_f} < \underline{\underline{0}} \\ \langle\psi_f(t)|2\rangle\langle 2|\psi_i(t)\rangle = 0 \\ \langle\psi_f(t)|3\rangle\langle 3|\psi_i(t)\rangle = p^2 e^{-\lambda^{(3)}t_f} \end{matrix} \right.$$

$$\langle\psi_f|\psi_i\rangle = 1 - (1 + p^2) e^{-\lambda^{(1)}t_f} + p^2 e^{-\lambda^{(3)}t_f} (> 0)$$

見かけ上の 負の確率 が現れる。もちろん

$$\sum_i P(i, t) = 1$$

この場合、例えば「物理量」 (古典スピン表示では非対角的 ^{*})

$$M_x = \frac{1}{2}(\sigma_x \otimes \sigma_0 + \sigma_0 \otimes \sigma_x), \quad (0 \leq \|M_x\| \leq 1)$$

は、その固有値が $\{-1, 0, 0, 1\}$ であるにもかかわらず

$$\langle M_x \rangle_{(i;f)} = \frac{\langle \psi_f(t) | M_x | \psi_i(t) \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} > \underline{1}$$

$p^2 t_f \ll 1$ のときには、重なり $\langle \psi_f | \psi_i \rangle$ が小さくて、

遷移確率

分母

$$\langle M_x \rangle_{(i;f)} \gg 1$$

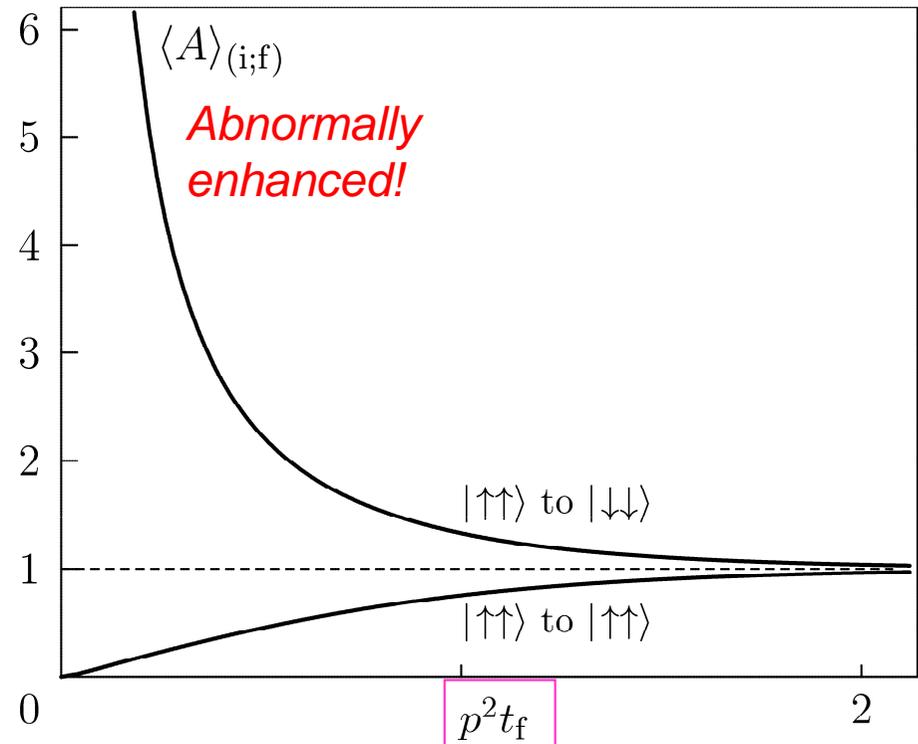
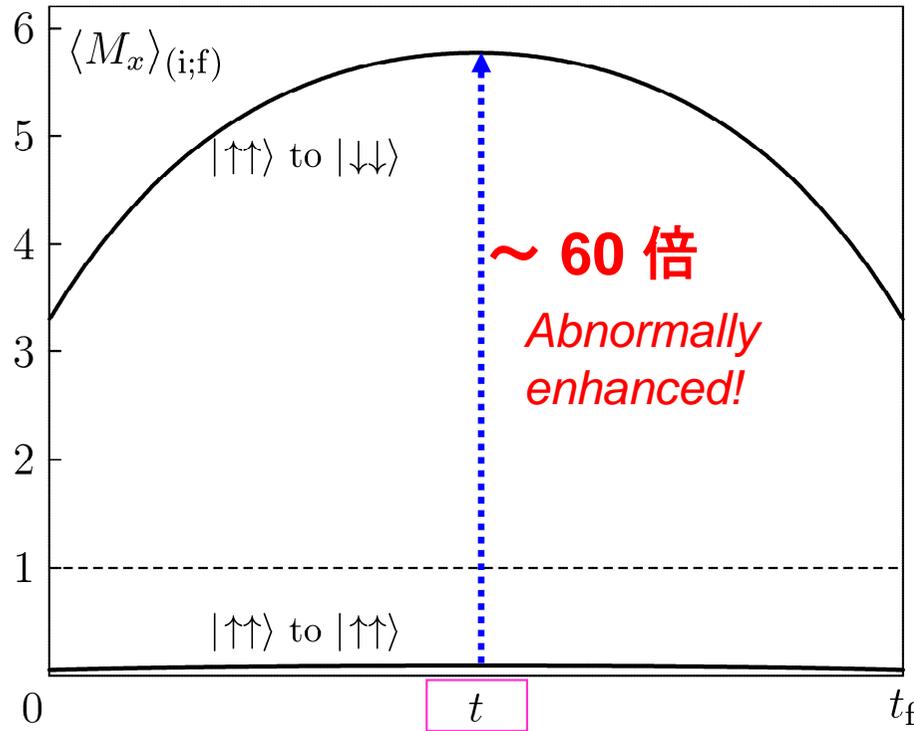
となり、weak value に見られる特異な振舞いを示す。

$$M_x = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)})$$

$$A = \sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} \text{ (conserved)}$$

($p = 0.2, p^2 t_f = 0.01$)

($p = 0.2$)



* 密度行列 が必要 (古典的確率過程のマスター方程式で計算可能)

$$\begin{aligned} \rho_{(i;f)}(t) &= \langle \psi_f | \psi_i \rangle^{-1} |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_f(t)| \\ &= \langle \psi_f | \psi_i \rangle^{-1} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} [(\phi_0(\mathbf{x})\phi_0(\mathbf{x}'))]^{-1} \\ &\quad \times P(\mathbf{x}', t_f - t | \mathbf{x}_f) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_i) |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}| \end{aligned}$$