

On Robust Quantum Control

坂東将光[†]、市川翼[†]、近藤康[‡]、中原幹夫[‡]

[†] 近畿大学量子コンピューターセンター、[‡] 近畿大学理工学部

2010年11月6日

基研研究会 「量子科学における双対性とスケール」 @京都大学

Introduction

古典コンピューター

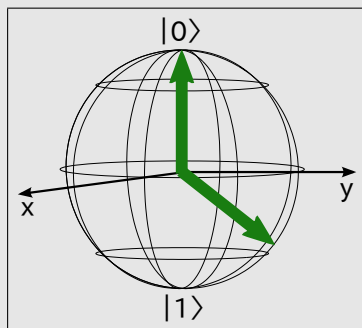
0, 1 (離散的)

量子コンピューター

$|0\rangle, |1\rangle, \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (連続的)

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

⇒ エラーの影響を受けやすい

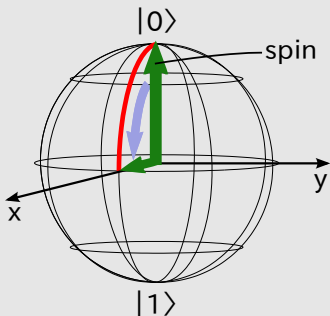


Introduction

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \text{ ——— } \boxed{R} \text{ ——— } R|n_0\rangle \quad |n_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

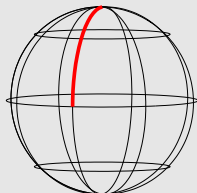
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad , \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Introduction

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow R|n_0\rangle$$



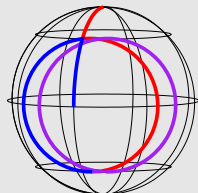
エラーに対して安定 (robust) な量子ゲートを構成したい

⇓ NMR では…

複合量子ゲート

$$|n_0\rangle \longrightarrow \boxed{R_1} \longrightarrow \boxed{R_2} \longrightarrow \boxed{R_3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{R_N} \longrightarrow R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$\mathcal{T} \prod_{j=1}^N R_j = R$$



Introduction

複合量子ゲートを構成する方法？

- 直感

- 四元数

H. K. Cummins, *et. al*, *Phys. Rev. A* **67**, 042308 (2003),

W. G. Alway, J. A. Jones, *J. Magn. Reson.* 189 (2007) 114-120

- 物理的な意味がわかりにくい
- 計算が複雑になりがち

- 新しいフレームワーク

- + わかりやすい
- + 計算が比較的楽

量子ゲート

単純量子ゲート

$$|n_0\rangle \text{ ——— } \boxed{R} \text{ ——— } R|n_0\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$R = R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \quad , \quad |n_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

複合量子ゲート

$$|n_0\rangle \text{ — } \boxed{R_1} \text{ — } \boxed{R_2} \text{ — } \boxed{R_3} \text{ — } \cdots \text{ — } \boxed{R_N} \text{ — } R_N \cdots R_2 R_1 |n_0\rangle$$

$$R_j = R(\mathbf{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\theta_j \frac{\mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \quad ,$$

$$\mathcal{T} \prod_{j=1}^N R_j = R$$

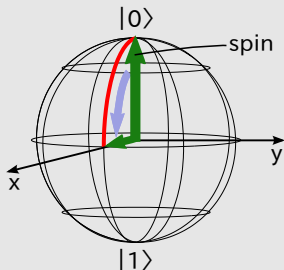
θ : 制御変数の強さ \times 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

単純量子ゲート

$$R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

θ : 制御変数の強さ \times 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

例えば...



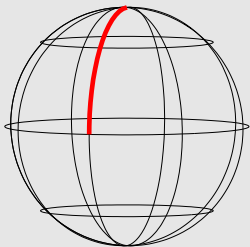
$$\theta = \pi/2, \mathbf{m} = (0, 1, 0)$$

y 軸周りに $\pi/2$ の回転

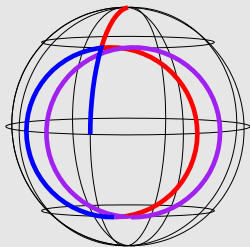
$$R|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

複合量子ゲート

単純量子ゲート



複合量子ゲート



$$R(\mathbf{m}, \theta) = \exp\left(-i\theta \frac{\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right)$$

θ : 制御変数の強さ \times 時間 , \mathbf{m} : 単位ベクトル ($\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$)
 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

時間発展演算子

$$U_\lambda(1, 0) \in SU(n)$$

$$U_\lambda(1, 0) := \mathcal{T} \exp \left(-i \int_0^1 dt H(\lambda(t)) \right)$$

制御ハミルトニアン $H(\lambda(t)) := \lambda_\mu(t) \tilde{\tau}_\mu$

$n = 2$ だと...

$$H(\lambda(t)) = \lambda_\mu(t) \frac{\sigma_\mu}{2}, \quad (\sigma_\mu : \text{パウリ行列})$$

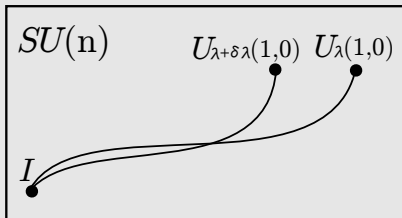
制御パラメーター $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n^2-1}(t))$

$n^2 - 1$ 次元直交基底 $\tilde{\tau}_\mu \quad (\mu = 1, \dots, n^2 - 1)$

エラー

エラーのある時間発展演算子

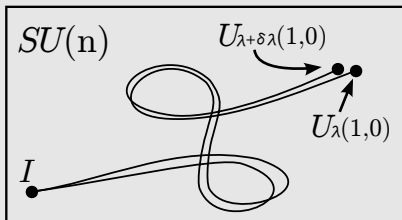
$$U_{\lambda+\delta\lambda}(1,0) = U_{\lambda}(1,0) \left(1 + \mathcal{O}(|\delta\lambda|) \right)$$



エラーの一次の項が消える

⇒ エラーに対して安定

$$U_{\lambda+\delta\lambda}(1,0) = U_{\lambda}(1,0) \left(1 + \mathcal{O}(|\delta\lambda|^2) \right)$$



$\delta\lambda(t)$: エラー ($|\delta\lambda(t)| \ll |\lambda(t)|$)

エラーがあるときの時間発展

$$\begin{aligned}
 U_{\lambda+\delta\lambda}(1, 0) &= U_{\lambda}(1, 0)U_{\delta\lambda}^I(1, 0) \\
 &= U_{\lambda}(1, 0) - \underline{iU_{\lambda}(1, 0) \int_0^1 dt H_I(\delta\lambda(t))} + \mathcal{O}(|\delta\lambda|^2)
 \end{aligned}$$

$$U_{\delta\lambda}^I(1, 0) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_0^1 dt H_I(\delta\lambda(t)) \right)$$

$U_{\delta\lambda}^I(1, 0)$: 相互作用表示で見たエラーによる時間発展

$H_I(\delta\lambda(t))$: ハミルトニアンのエラーの項 (相互作用表示)

エラーに対して安定である条件

$$\begin{aligned} U_{\lambda+\delta\lambda}(1, 0) &= U_{\lambda}(1, 0)U_{\delta\lambda}^I(1, 0) \\ &= U_{\lambda}(1, 0) - \underbrace{iU_{\lambda}(1, 0)\int_0^1 dt H_I(\delta\lambda(t))}_{\text{error}} + \mathcal{O}(|\delta\lambda|^2) \end{aligned}$$

エラーに対して安定である条件

$$\int_0^1 dt H_I(\delta\lambda(t)) = 0$$

エラーの分類

classification of errors

系統的なエラー: $\delta\lambda(t) = F(\lambda(t))$

$$\delta\lambda_\mu(t) = F_\mu(\lambda(t)) = f_\mu + f_{\mu\nu}\lambda_\nu(t) + f_{\mu\nu\rho}\lambda_\nu(t)\lambda_\rho(t) + \dots$$

安定な複合量子ゲートの条件

$$\int_0^1 dt H_I(\delta\lambda(t)) = 0$$



$$f_\mu \int_0^1 dt \tau_\mu(t) + f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_\mu(t) \lambda_\nu(t) + \dots = 0$$

$$H_I(\delta\lambda(t)) = \delta\lambda_\mu(t) \tau_\mu(t)$$

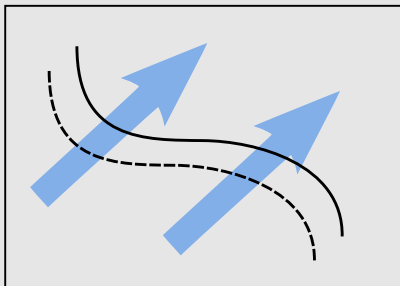
$$\tau_\mu(t) = U_\lambda(t)^\dagger \tilde{\tau}_\mu U_\lambda(t), \quad H(\delta\lambda(t)) = \delta\lambda_\mu \tilde{\tau}_\mu$$

$$f_{\mu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) = 0$$

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) \lambda_{\nu}(t) = 0$$

期待値: $\langle \varphi | \tau_{\mu}(t) | \varphi \rangle = \langle \varphi(t) | \tilde{\tau}_{\mu} | \varphi(t) \rangle = \varphi_{\mu}(t)$

$$\int_0^1 dt \varphi(t) = 0$$



\mathbb{R}^{n^2-1} : 制御パラメーター $\lambda(t)$ の空間

$\varphi(t)$: generalized Bloch vector

$$f_{\mu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) = 0$$

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) \lambda_{\nu}(t) = 0$$

$f_{\mu\nu}$ を分解して…

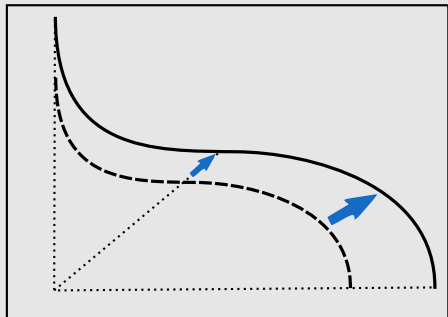
$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} + \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} - f_{\nu\mu}) + \left[\frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu}) - \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} \right]$$

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_\mu(t) \lambda_\nu(t) = 0$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} + \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} - f_{\nu\mu}) + \left[\frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu}) - \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} \right]$$

$$\int_0^1 dt \tau_\mu \lambda_\mu = 0$$

⇒ $\lambda(t)$ の定数倍のエラー



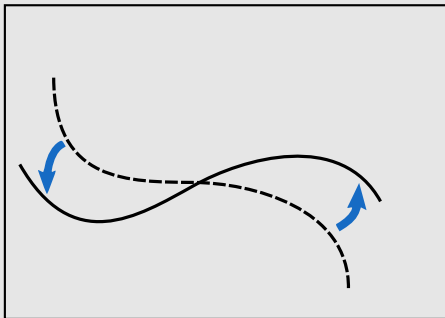
\mathbb{R}^{n^2-1} : 制御パラメーター $\lambda(t)$ の空間

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_\mu(t) \lambda_\nu(t) = 0$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} + \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} - f_{\nu\mu}) + \left[\frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu}) - \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} \right]$$

$$\int_0^1 dt (\tau_\mu \lambda_\nu - \tau_\nu \lambda_\mu) = 0$$

$\Rightarrow \lambda(t)$ の回転



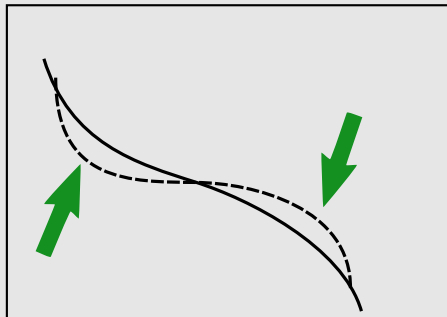
\mathbb{R}^{n^2-1} : 制御パラメーター $\lambda(t)$ の空間

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_\mu(t) \lambda_\nu(t) = 0$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} + \frac{1}{2} (f_{\mu\nu} - f_{\nu\mu}) + \left[\frac{1}{2} (f_{\mu\nu} + f_{\nu\mu}) - \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} f_{\rho\rho} \right]$$

$$\int_0^1 dt \left[\frac{\tau_\mu \lambda_\nu + \tau_\nu \lambda_\mu}{2} - \frac{\delta_{\mu\nu} \tau_\rho \lambda_\rho}{N} \right] = 0$$

⇒ $\lambda(t)$ の振れ



\mathbb{R}^{n^2-1} : 制御パラメーター $\lambda(t)$ の空間

$$f_{\mu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) = 0$$

$$\int_0^1 dt \varphi(t) = 0 \implies \text{一定のエラー}$$

$$f_{\mu\nu} \int_0^1 dt \tau_{\mu}(t) \lambda_{\nu}(t) = 0$$

$$\int_0^1 dt \tau_{\mu} \lambda_{\mu} = 0 \implies \lambda(t) \text{ の定数倍のエラー}$$

$$\int_0^1 dt (\tau_{\mu} \lambda_{\nu} - \tau_{\nu} \lambda_{\mu}) = 0 \implies \lambda(t) \text{ の回転}$$

$$\int_0^1 dt \left[\frac{1}{2} (\tau_{\mu} \lambda_{\nu} + \tau_{\nu} \lambda_{\mu}) - \frac{1}{N} \delta_{\mu\nu} \tau_{\rho} \lambda_{\rho} \right] = 0 \implies \lambda(t) \text{ の振れ}$$

例

example

離散化

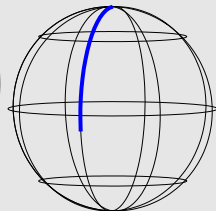
離散化

$$U_{\lambda+\delta\lambda}(1, 0) = U_{\lambda^N+\delta\lambda^N}(1, t_{N-1}) \dots U_{\lambda^1+\delta\lambda^1}(t_1, 0)$$

$$U_{\lambda^j}(t_j, t_{j-1}) = R(\mathbf{m}_j, \theta_j) = \exp\left(-i\frac{\theta_j}{2} \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)$$

pulse length error

$$\begin{aligned} U_{\lambda+\delta\lambda}(t_j, t_{j-1}) &= \exp\left(-i \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt H_j(1 + \varepsilon)\right) \\ &= \exp\left(-i\theta_j(1 + \varepsilon) \frac{\mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \end{aligned}$$



回転角 θ に系統的なエラーがある

θ の系統的なエラー

単純量子ゲート

$$U_{\lambda+\delta\lambda} = U_{\lambda} \left(1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

単純量子ゲートの組み合わせ

$$U_{\lambda+\delta\lambda} = \mathcal{T} \prod_{j=1}^N U_{\lambda^j+\delta\lambda^j} = U_{\lambda} \left(1 + \underline{\mathcal{O}(\varepsilon)} \right)$$

θ の系統的なエラーに対して安定な 複合量子ゲート

$$U_{\lambda+\delta\lambda} = \mathcal{T} \prod_{j=1}^N U_{\lambda^j+\delta\lambda^j} = U_{\lambda} \left(1 + \underline{\mathcal{O}(\varepsilon^2)} \right)$$

安定な複合量子ゲートの条件

安定な複合量子ゲートの条件

$$\int_0^1 dt H_I(\lambda(t)) = 0 \implies \int_0^1 dt U_\lambda(t_j, 0)^\dagger H(\lambda(t)) U_\lambda(t_j, 0) = 0$$

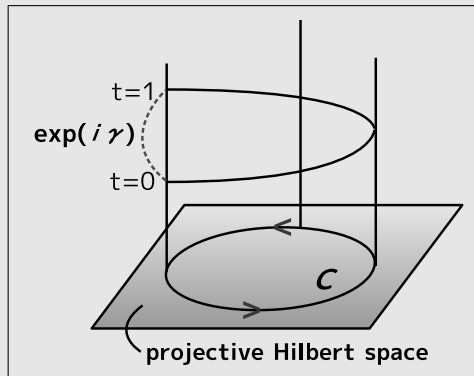
θ の系統的なエラーに対して安定な条件

$$\sum_{j=1}^N U_{\lambda^N} \dots U_{\lambda^{j+1}} (H_j T_j) U_{\lambda^j} \dots U_{\lambda^1} = 0$$

$$H_j = \frac{\theta_j}{2} \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{1}{T_j}, \quad (T_j = t_j - t_{j-1})$$

動的位相、幾何学的位相

Aharonov-Anandan phase



$$|\mathbf{n}(1)\rangle = \exp(i\gamma) |\mathbf{n}(0)\rangle$$

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_g$$

$$\text{動的位相: } \gamma_d = - \int_0^T \langle \mathbf{n}(t) | H | \mathbf{n}(t) \rangle dt$$

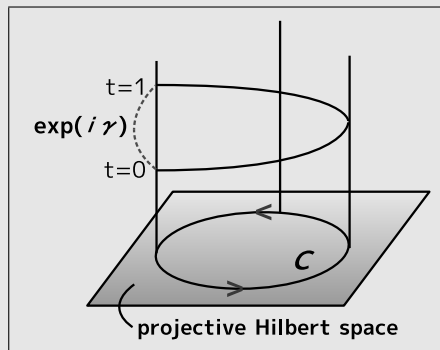
$$\text{幾何学的位相: } \gamma_g = \gamma - \gamma_d \quad (H : \text{ハミルトニアン})$$

Cyclic States

$$|n_+(0)\rangle, |n_-(0)\rangle$$

$$\langle n_+(0) | n_-(0) \rangle = 0$$

$$|n_{\pm}(1)\rangle = \exp(i\gamma_{\pm}) |n_{\pm}(0)\rangle$$



$$|n(0)\rangle = a_+ |n_+(0)\rangle + a_- |n_-(0)\rangle$$

$$|n(1)\rangle = a_+ e^{i\gamma_+} |n_+(0)\rangle + a_- e^{i\gamma_-} |n_-(0)\rangle$$

量子ゲート (時間発展演算子)

$$U = a_+ e^{i\gamma_+} |n_+(0)\rangle \langle n_+(0)| + a_- e^{i\gamma_-} |n_-(0)\rangle \langle n_-(0)|$$

安定な条件の物理的意味

Cyclic states で期待値をとると…

$$\langle \mathbf{n}(0) | \sum_{j=1}^N U_{\lambda^N} \dots U_{\lambda^{j+1}} (H_j T_j) U_{\lambda^j} \dots U_{\lambda^1} | \mathbf{n}(0) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{n}(t_j) | H_j T_j | \mathbf{n}(t_j) \rangle$$

$$= e^{-i\theta/2} \sum_{j=1}^N \gamma_{d,j}$$

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{d,j} = 0 \quad \Longrightarrow \quad U_{\lambda+\delta\lambda} = \underline{U_{\lambda} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))}$$

動的位相が 0

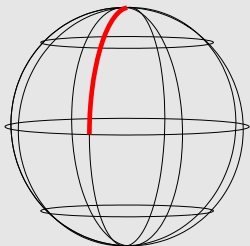


"制御変数の強さの系統的なエラー"
に対して安定

W1 sequence

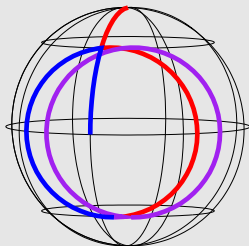
$$U_{W1} = R(\mathbf{m}_1, \pi)R(\mathbf{m}_2, 2\pi)R(\mathbf{m}_1, \pi) = I$$

Single



$$R(\mathbf{x}, \pi/2)$$

Composite



$$R(\mathbf{x}, \pi/4)U_{W1}R(\mathbf{x}, \pi/4)$$

$$\phi_1 = \pm \arccos(-\theta/(4\pi)), \quad \phi_2 = 3\phi_1$$

$$\mathbf{m}_i = (\cos \phi_i, \sin \phi_i, 0)$$

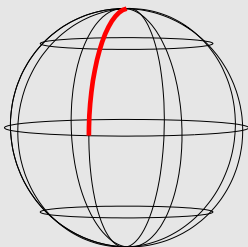
W1 sequence

$$U_{W1} = e^{i\gamma_{W1}} |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| + e^{-i\gamma_{W1}} |-\mathbf{x}\rangle\langle-\mathbf{x}|$$

$$\gamma_{W1} = \gamma_{g,W1} + \gamma_{d,W1} = 0, \quad \underline{\gamma_{d,W1}} = -\gamma_{g,W1} = \underline{\theta/2}$$

Dynamic Phase Gate

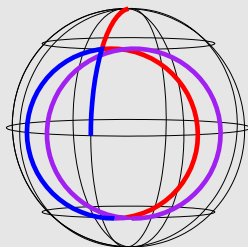
$$R(\mathbf{x}, \theta)$$



$$\gamma_d = -\theta/2$$

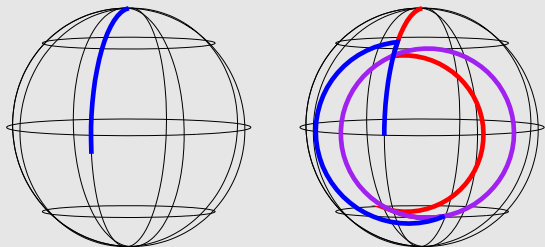
Geometric Phase Gate

$$\Rightarrow R(\mathbf{x}, \theta/2) U_{W1} R(\mathbf{x}, \theta/2)$$



$$\gamma_d = -\theta/2 + \underline{\theta/2} = 0$$

W1 sequence



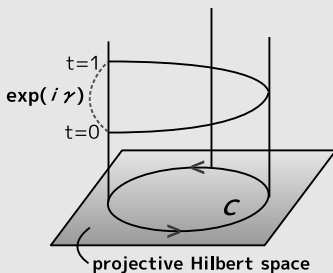
θ に 10% のエラーがあるときの、
90x ゲート及び W1 sequence による複合 90x ゲート

ずれの大きさ

$$1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0,1} \mathbf{n}_{\lambda+\delta\lambda}^j \cdot \mathbf{n}_{\lambda}^j = \begin{cases} 1.2 \times 10^{-2} & (90x \text{ ゲート}) \\ 3.4 \times 10^{-6} & (\text{複合 } 90x \text{ ゲート}) \end{cases}$$

$$\mathbf{n}_{\lambda}^j = \langle j | U_{\lambda}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} U_{\lambda} | j \rangle, \quad \mathbf{n}_{\lambda+\delta\lambda}^j = \langle j | U_{\lambda+\delta\lambda}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma} U_{\lambda+\delta\lambda} | j \rangle$$

pulse length error と 位相



- 動的位相は時間に依存する。
- 幾何学的位相である Aharonov-Anandan 位相は、
 - projective Hilbert space の経路のみに依る。
 - その経路を辿るタイミングには依らない。



動的位相が 0 であれば

時間や振幅の系統的なエラーに対して感受性が低い。

Summary

- 安定な複合量子ゲートを構成するための条件を導出できる。
- 系統的なエラーの下でその条件を分類すると、物理的な意味が見える。
- 制御変数の強さのエラーに対して安定な複合量子ゲート
⇒ 位相と関係がある (動的位相が 0)