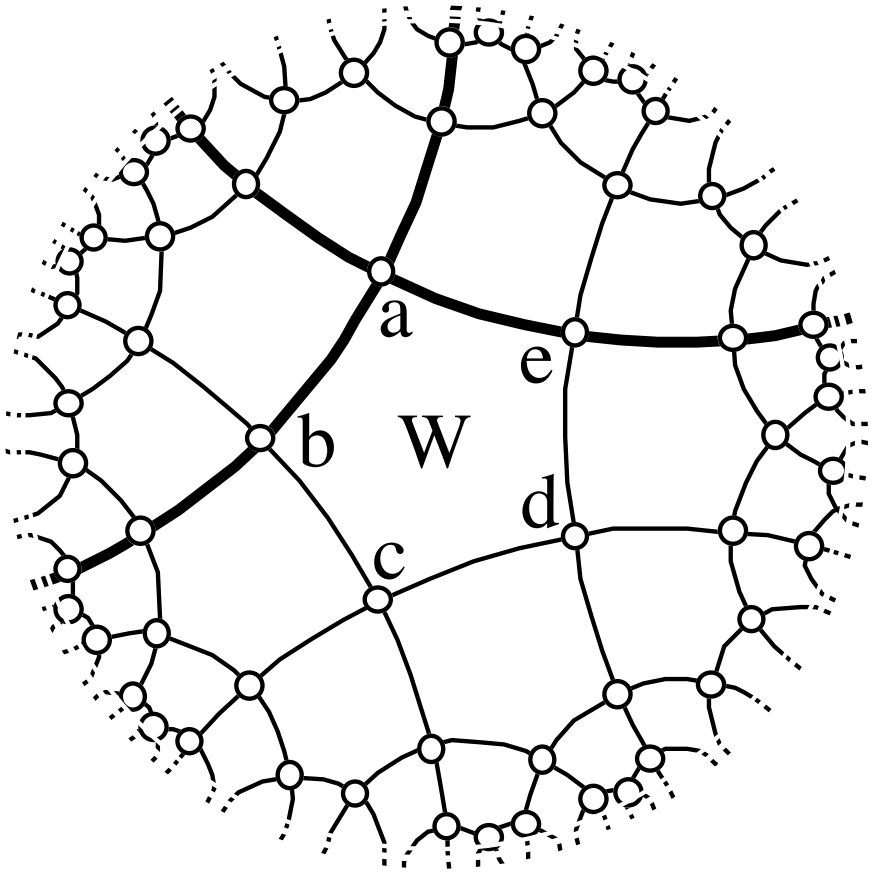
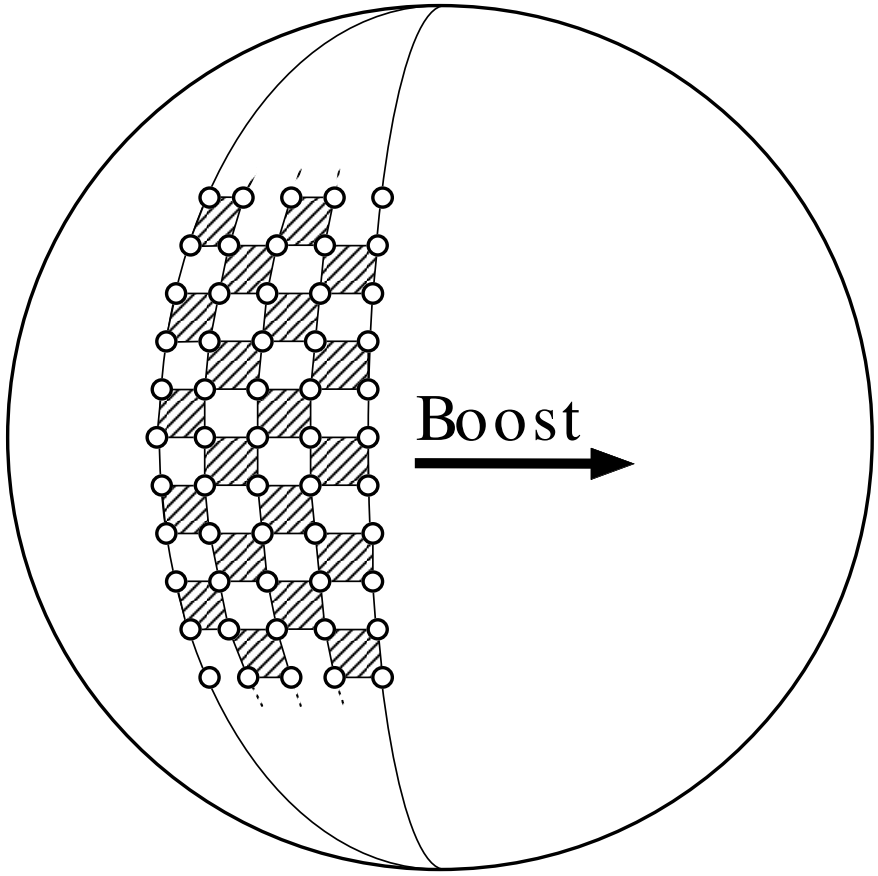
双曲平面上の古典格子模型と１次元量子系と１粒子量子力学

T. Nishino, A. Gendiar



Hyperbolic Lattice



Spherical Lattice

◎ 双曲充填図形 (Hyperbolic Tessellations)

正方格子上では単純なことも、双曲平面や、その上の双曲格子に乗せた瞬間に非自明になる。

拡散問題を考えてみよ

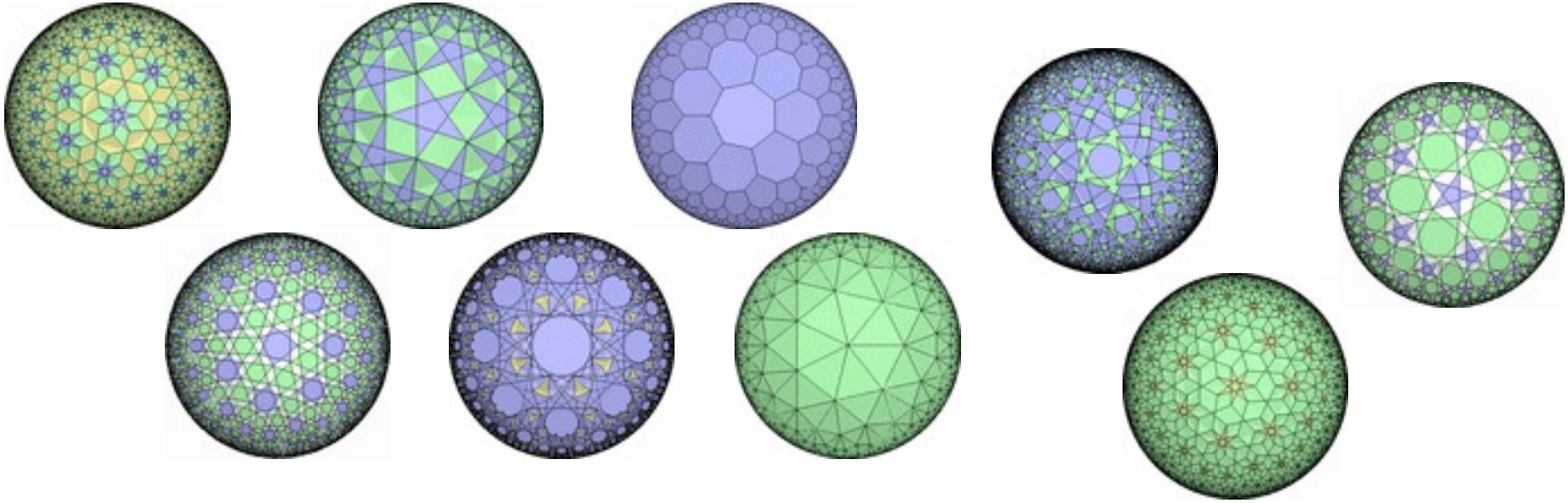
格子上での１粒子固有状態は平面波ではない

散乱問題を考える時の漸近場は平面より考え易いか？

Density of State はベーテ格子のソレに似ているか？

Hofstadter 模型を考えるとどうなる？

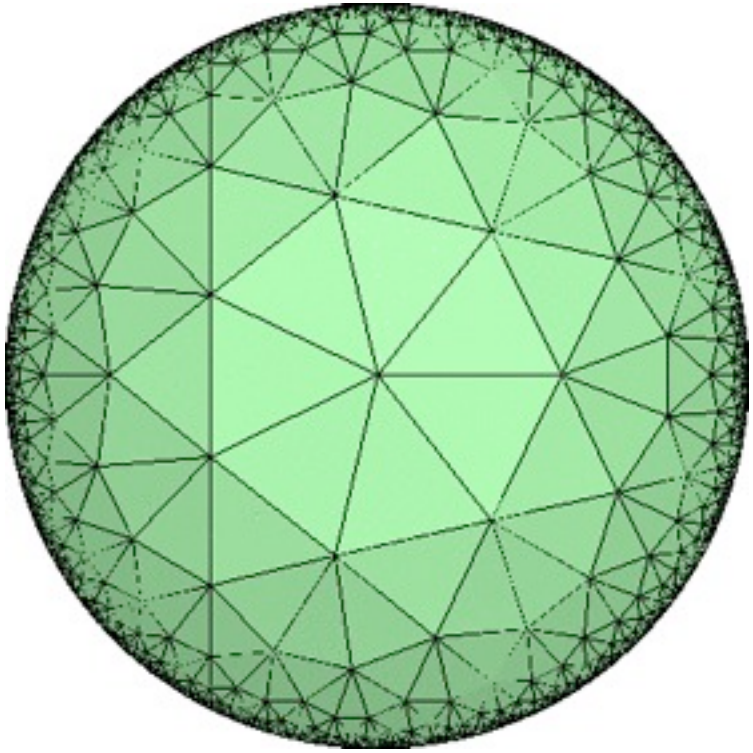
まずは Ising Model から考えてみる。



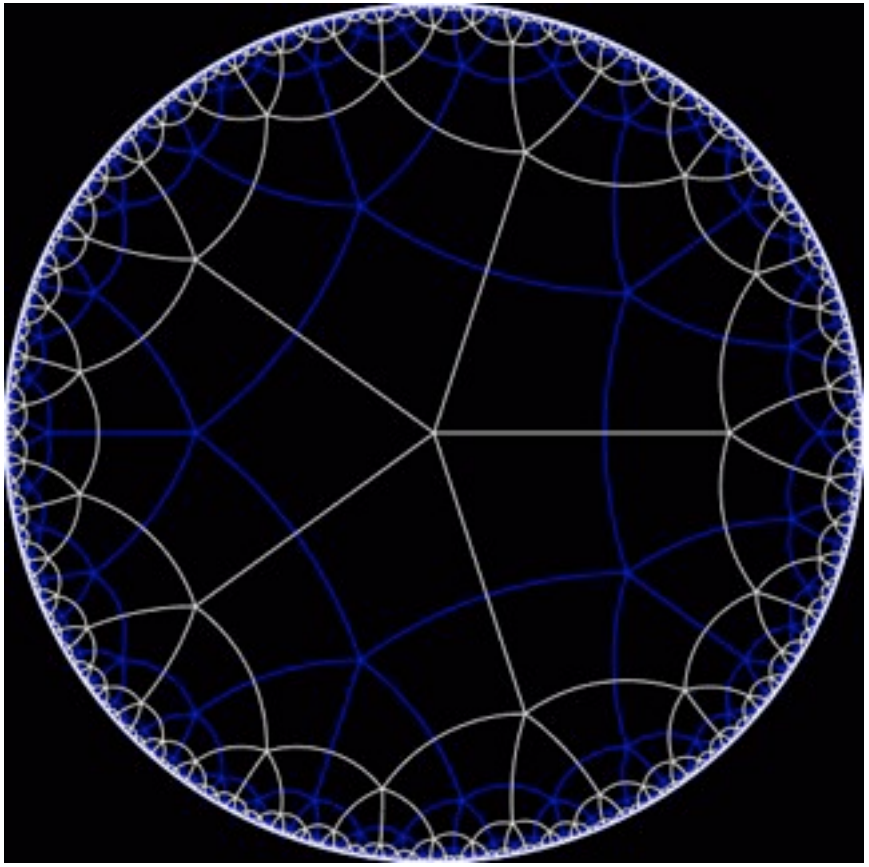
(p,q) 格子 (頂点で p 角形が q 個出会う) の裏格子は (q,p) 格子

(無限, q) 格子は Bethe 格子. (4,4) 格子は正方格子

この双対性と Star-Triangle 関係式を使えば、Ising 模型の転移点が求まるような気がする。が、真面目に (?) 取り組んでみると、そう上手くは行かない。



(3,7) lattice



(5,5) lattice: Self Dual

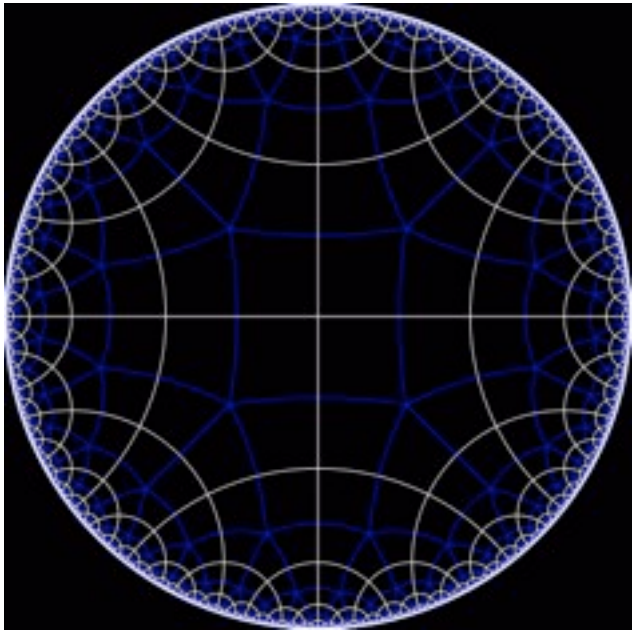
(5, 4) 格子上の強磁性 Ising モデル

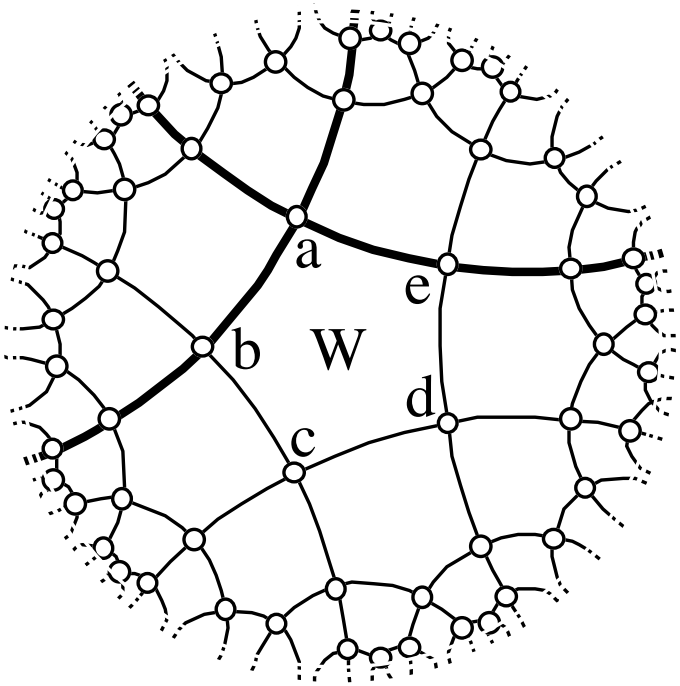
$$H = -J \sum \sigma_i \sigma_j \qquad (\text{ i and j are NN sites })$$

Commuting Transfer Matrix .... 今のところ見つかっていません

モンテカルロ法で解析するのは、結構しんどい。

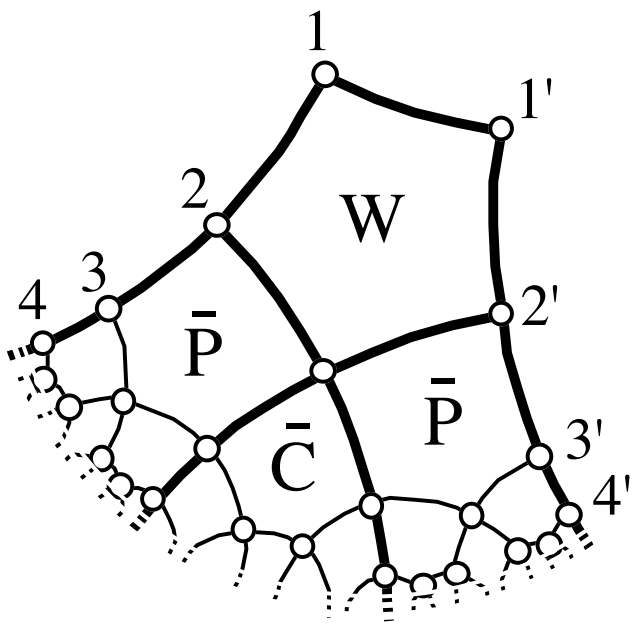
→ 格子の階層性 (?) を利用して、角転送行列の方法を応用



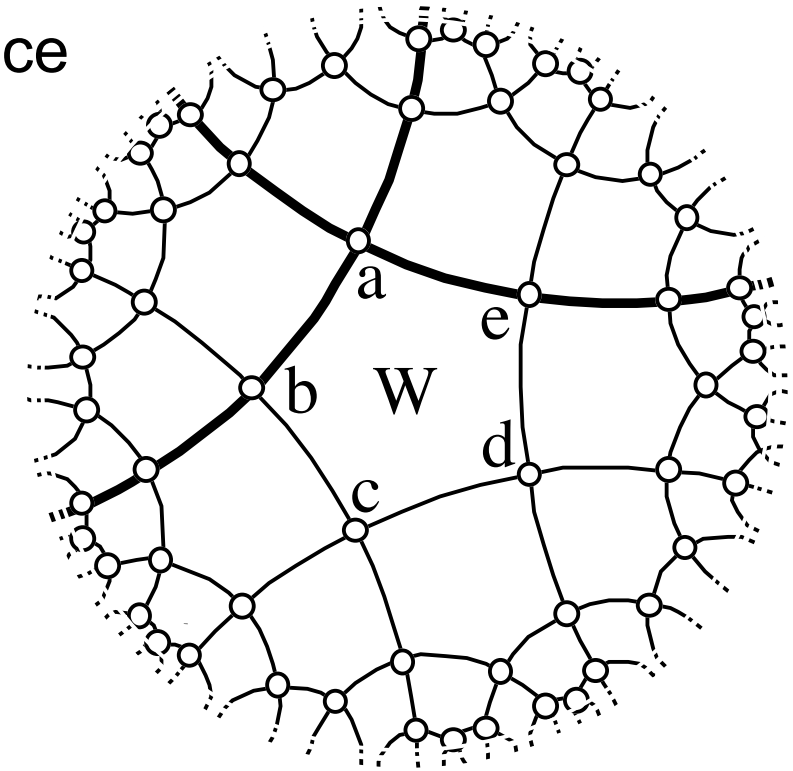


◎ Recursive Structure of the (5,4) lattice

in general, (q,p=even) lattice has the same property.

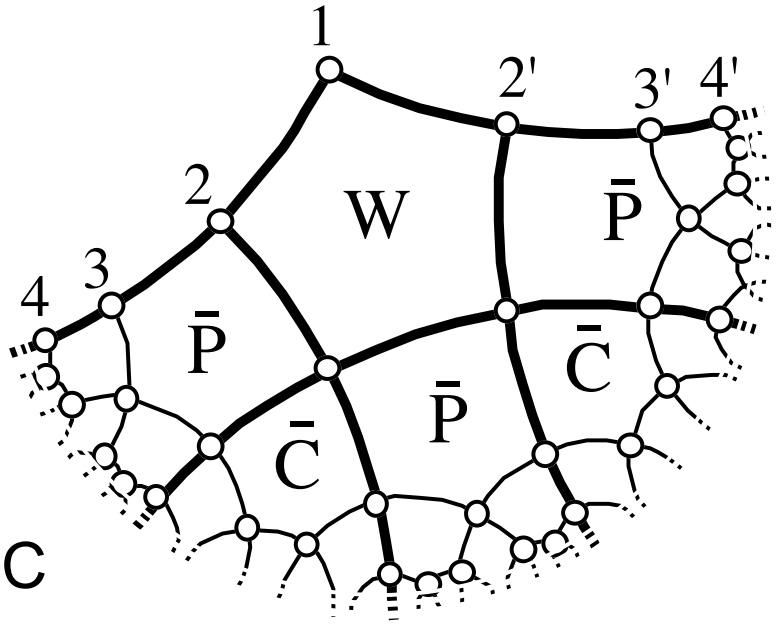


Structure of the Lattice



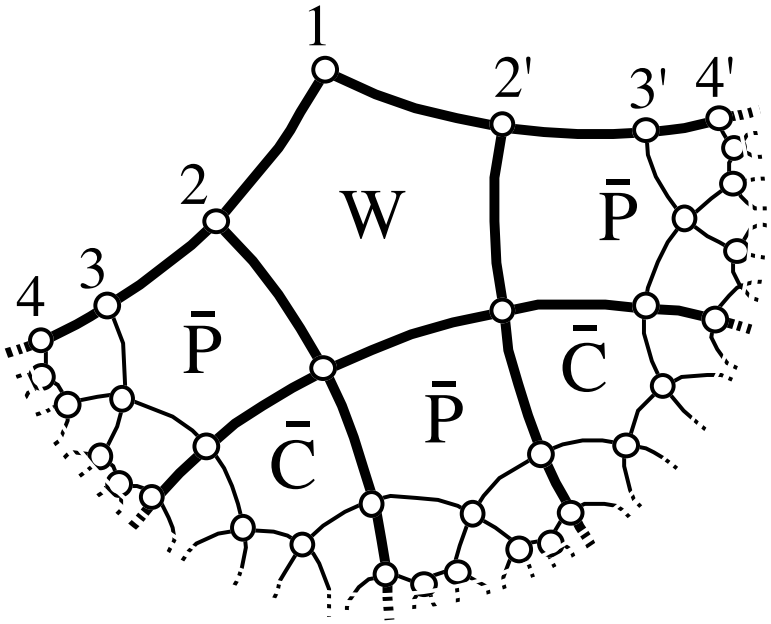
Half `row' transfer matrix P

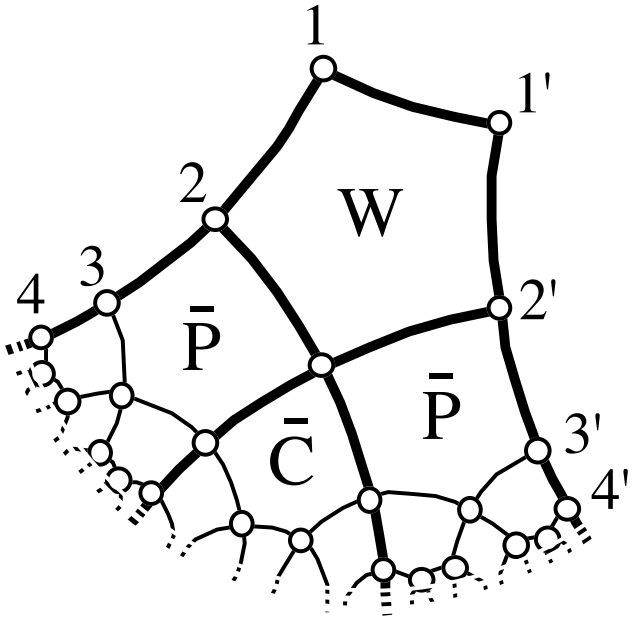
(after taking configuration sum for spins inside, leaving those on the boundary)



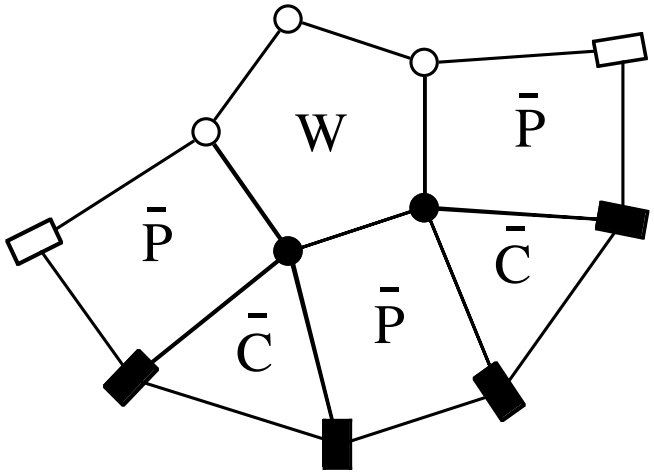
Corner transfer matrix C

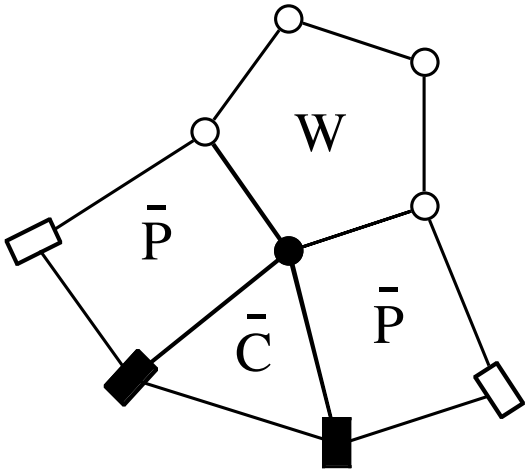
◎ DMRG で言う所の「繰込み群変換」をカマして数値計算する



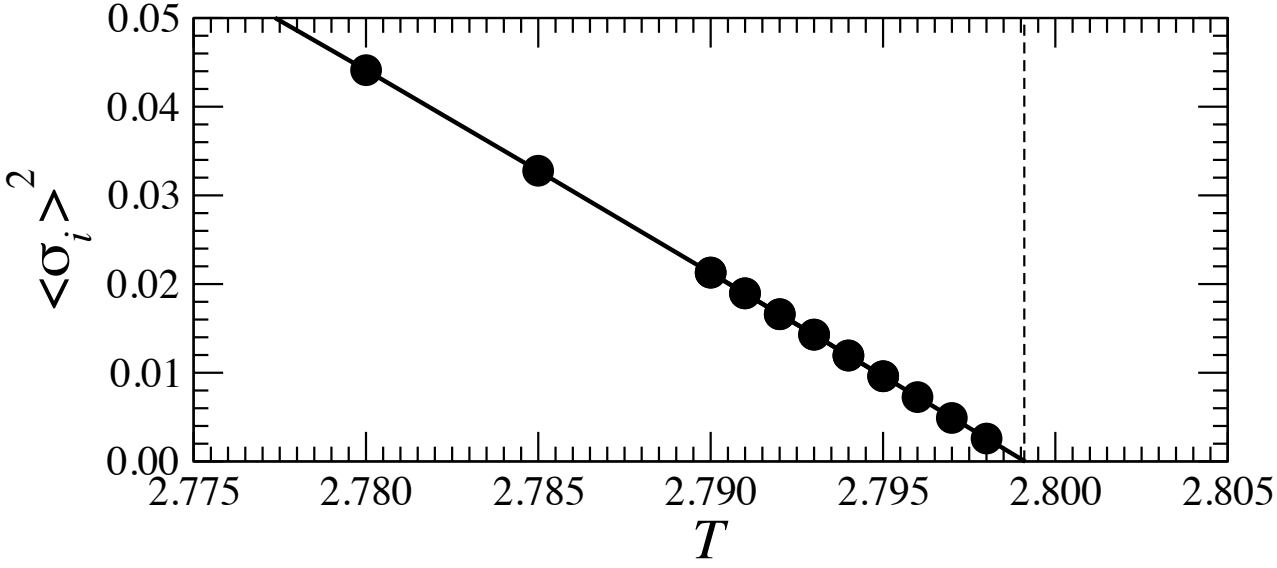


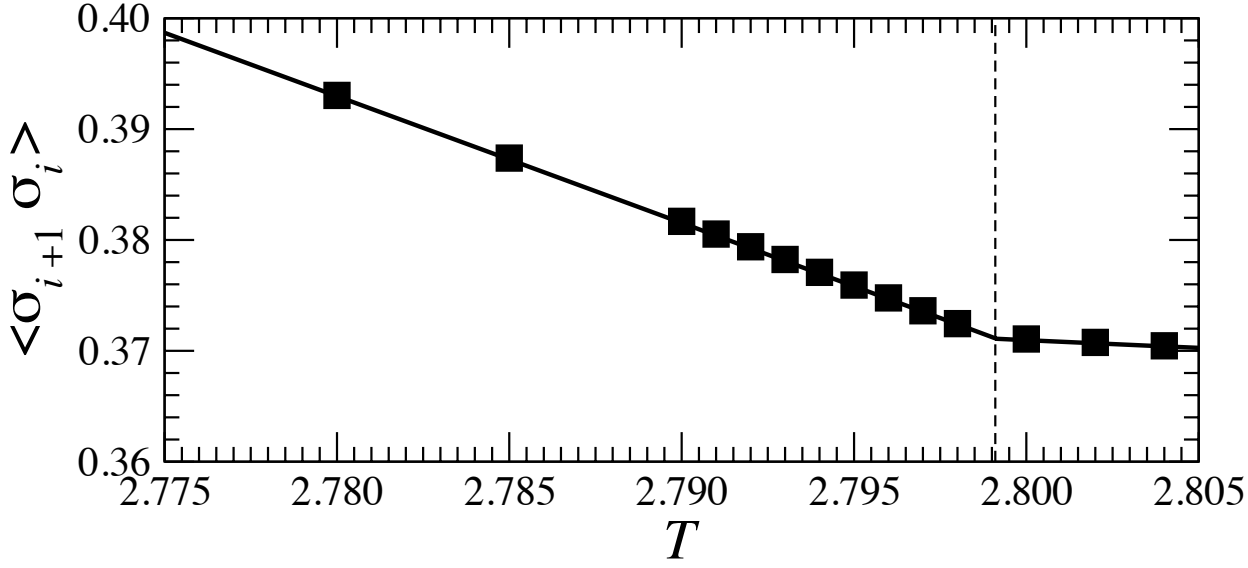
(T. Nishino and K. Okunishi, J. Phys. Soc. Jpn. 65 (1996) 891, cond-mat/9507087.)





数値計算の結果は、平均場的なユニバーサリティーだった





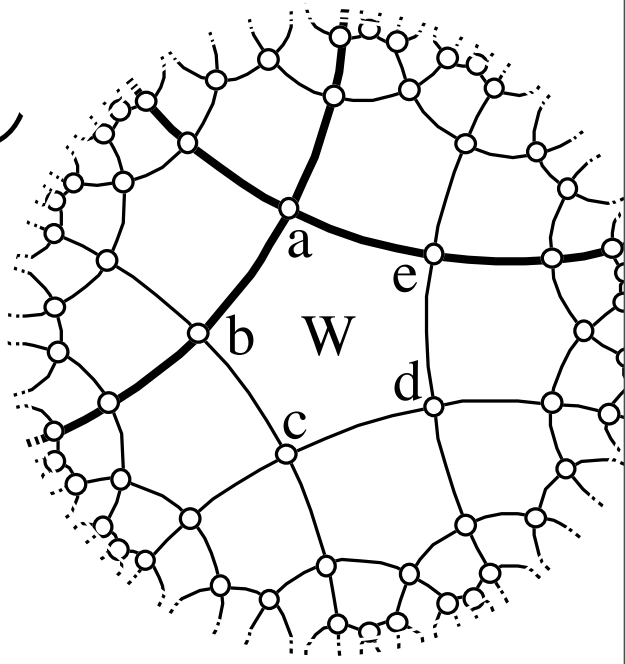
◇ 島らによる conjecture を確認した.(H. Shima and Y. Sakiniwa, J. Phys. A 39 (2006) 4921.)

◎ スケーリング関係式を考え直す必要がある

◇ スケールを変えると双曲平面の曲率が変化するので、普通の意味でのスケーリング関係が成立しない.

$$\lambda^d f(t, h) \neq f(\lambda^x t, \lambda^y h)$$

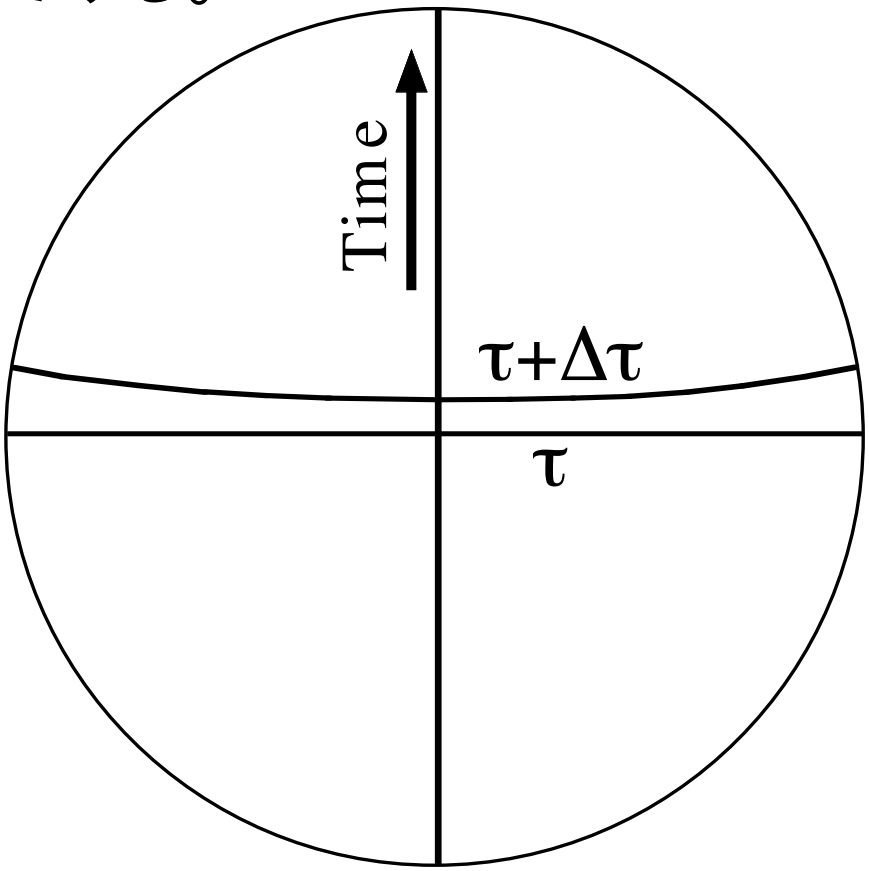
◇ そもそも Bethe 格子上でのスケーリング関係式とは？



◎ もっと平坦に近い格子が組めれば、安定・不安定ふたつの固定点の周囲の臨界振舞いが見えて来るだろう。

今度は双曲平面を 1+1 次元で考えてみる。

ある測地線を時間軸に取る。
それに直交する測地線を空間
方向だと「強引に」決める



Poincare Disk

◎連続空間だと面倒なので格子
上に乗せて考えてみると？

$$H = \Sigma_j \cosh(j\lambda)\, h_{j,j+1}$$

こんなハミルトニアンが候補に上がる。

普通の格子ハミルトニアンの１パラメター変形である。

バリエーションは色々。

* 双曲変形されたスピンハミルトニアン

$$H = \sum_i \cosh(\lambda i)\, S_i \cdot S_{i+1}$$

中心から離れるにつれてエネルギースケールが上がって行く。

* 球変形??

$$H = \sum_i \cos(bi)\, S_i \cdot S_{i+1}$$

こうすると、不思議なことに open boundary な系を扱っているのに、
periodic boundary のようなデータを得ることができる。

* クラインの壷変形? 射影平面変形?

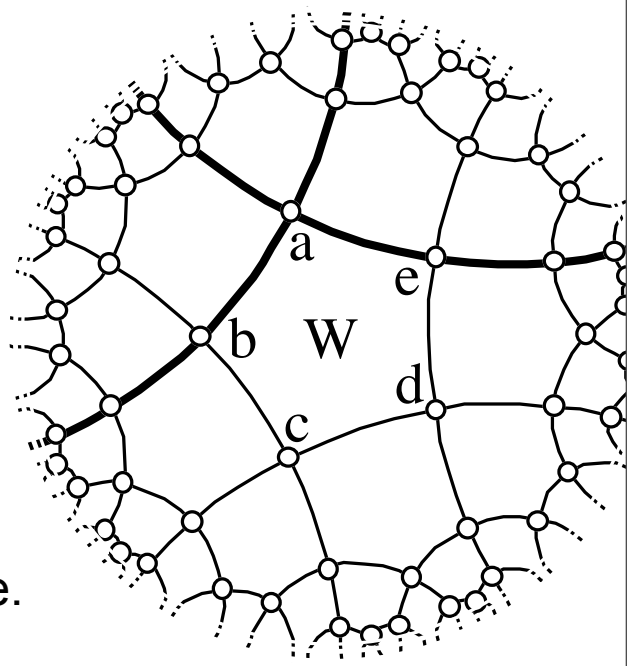
あらゆる等質空間を相手にできるか？
固有状態の性質は？

◎ Properties:

◇ Block spin transformation increases the curvature of the plane, and does NOT preserve the lattice geometry.

→ The well known scaling relation does NOT hold.

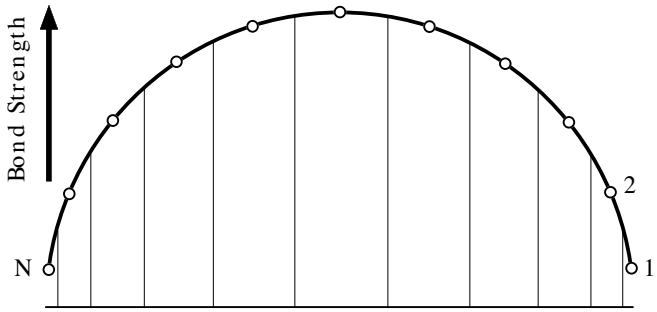
$$\lambda^d f(t, h) \neq f(\lambda^x t, \lambda^y h)$$

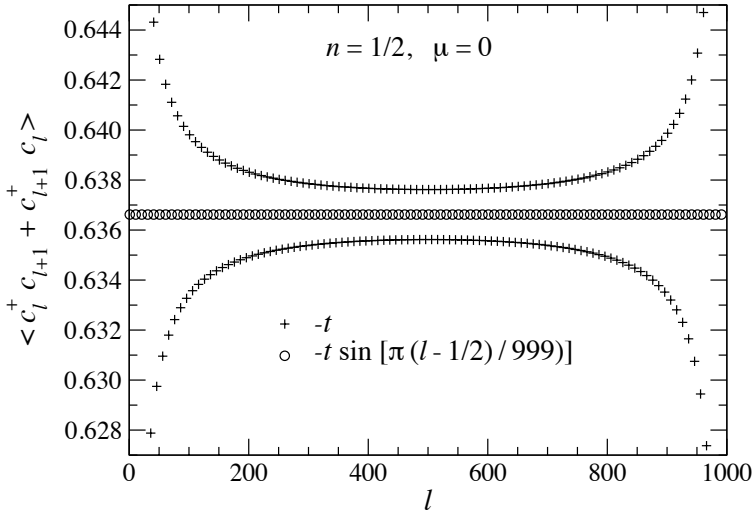


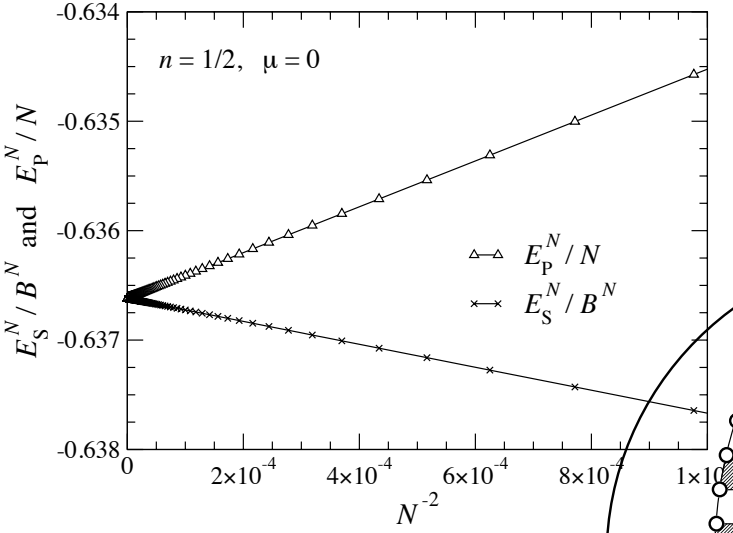
◇ Below Tc, there are infinite number of Gibbs state, according to the ``boundary" spin configurations.
(Chris Wu, J. Stat. Phys. 100 (2000), 893.)

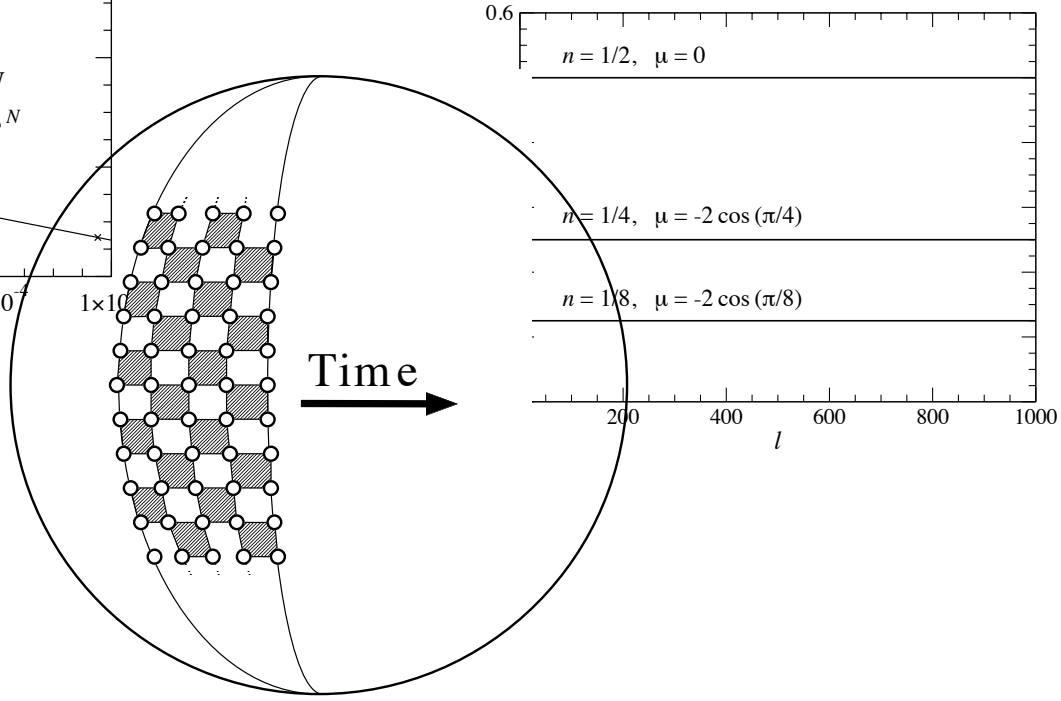
→ We consider only the ferromagnetic phase.

◇ conjectured Mean field like transition is verified.
(H. Shima and Y. Sakiniwa, J. Phys. A 39 (2006) 4921.)


Bond Strength
N
2
1


n = 1/2, μ = 0
-t
-t sin [π (l - 1/2) / 999)]
l


n = 1/2, μ = 0
N^-2


Time
n = 1/2, μ = 0
n = 1/4, μ = -2 cos (π/4)
n = 1/8, μ = -2 cos (π/8)
l

* DMRG は繰込み群なのか?

- Wilson 繰込み群は、系がもともとエネルギースケールを含んでいる。

Kouichi Okunishi J.Phys.Soc.Jpn. 74 (2005) 3186–3192

$$H = S_1 \cdot S_2 + b\, S_2 \cdot S_3 + b^2 S_3 \cdot S_4 + \ldots$$
$$= \sum_i b^i S_i \cdot S_{i+1}$$

ひとつ格子をシフトすると、エネルギースケールが b < 1 倍になる、
という状況下であれば、Wilson 繰込み群も悪くはない。
幾つか異なる b についてデータ収集して、b=1 の極限を取ると良い。
更に DMRG 的に、行列積を改良することも可能である。

- こういう周期格子の「変形問題」を、我々は 指数変形 と呼んでいる。
- 余談ながら、Free Fermion 格子を指数変形すると、一体波動関数は直交ウェーブレットになる。
- 冗長な数の表現と、何か関係がありそうに思う。
- 指数変形では、半無限系 しか取り扱えない。

◎ Conclusions

- CTMRG can be applied to (q, p=even) lattice. Using the duality transformation, (q=even, p) lattice can be also treated. How about (odd, odd) lattice?
- Ising model on (q>4, 4) shows the mean-field like phase transition.
- There is a cross over from the Ising universality class to the Gaussian, which can be observed from the spontaneous magnetization below Tc.

◎ Discussions

- How does a quantum system on hyperbolic 1+1 dimensional space looks like?
  ----> Hyperbolic Deformation (arXiv.0808.3858)
- What happens on Spherical 1+1 dimensional space?
  ---> Spherical Deformation (arXiv.0810.0622)
- What happens on the surface with more complicated geometry?
  ---> ??? thermodynamics of INTERACTING STRING ?????

◎ .... about DMRG Web Page

- Please e-mail me if some articles are missing from the list in the URL
  http://quattro.phys.sci.kobe-u.ac.jp/dmrg.html