第20章　角運動量の合成

前章では，スピン-軌道相互作用があるとき，スピン角運動量 $\boldsymbol{s}$ と軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ を合成して全角運動量 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{s}$ を定義した。このとき，全角運動量の２乗 $\boldsymbol{j}^2$ の固有関数はスピン波動関数と軌道部分の波動関数の積の線型結合で表され，その係数としてクレプシュ-ゴルダン係数を定義した。一般に，２つの角運動量を合成する場合にはクレプシュ-ゴルダン係数を用いる。クレプシュ-ゴルダン係数は角運動量演算子の交換関係から求められる。また，この章では，球テンソル演算子とウィグナー-エッカートの定理についても触れる。

20.1　角運動量の結合とクレプシュ-ゴルダン係数

20.1.1　クレプシュ-ゴルダン係数

２つの可換な角運動量のベクトル和

２つの角運動量の結合を考える：

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2. \tag{20.1}$$

それぞれの角運動量演算子は交換関係を満たすが，２つの角運動量は互いに可換であるとする。

$$\begin{aligned} [\, J_{1i},\, J_{1j}\,] &= \sum_k i\epsilon_{ijk}\, J_{1k} \\ [\, J_{2i},\, J_{2j}\,] &= \sum_k i\epsilon_{ijk}\, J_{2k} \end{aligned} \qquad [\, J_{1i},\, J_{2j}\,] = 0 \tag{20.2}$$

すなわち，$\boldsymbol{J}_1$ と $\boldsymbol{J}_2$ は異なる空間（異なる波動関数）に作用する場合を考える。たとえば，前章で扱ったスピン角運動量と軌道角運動量の結合，２つの粒子の角運動量の結合などである。

２つの部分の波動関数を $|j_1 m_1\rangle$，$|j_2 m_2\rangle$，結合した状態の波動関数を $|jm\rangle$ とする：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_1{}^2\,|j_1 m_1\rangle &= j_1(j_1+1)\,|j_1 m_1\rangle, & J_{1z}\,|j_1 m_1\rangle &= m_1\,|j_1 m_1\rangle, \\ \boldsymbol{J}_2{}^2\,|j_2 m_2\rangle &= j_2(j_2+1)\,|j_2 m_2,\rangle & J_{2z}\,|j_2 m_2\rangle &= m_2\,|j_2 m_2\rangle, \\ \boldsymbol{J}^2\,|jm\rangle &= j(j+1)\,|jm\rangle, & J_z\,|jm\rangle &= m\,|jm\rangle. \end{aligned} \tag{20.3}$$

このとき，$\boldsymbol{J}^2$ と可換な演算子は，

$$[\, \boldsymbol{J}^2,\, J_z\,] = [\, \boldsymbol{J}^2,\, \boldsymbol{J}_1^2\,] = [\, \boldsymbol{J}^2,\, \boldsymbol{J}_2^2\,] = 0 \tag{20.4}$$

であるから，j_1 と j_2 は j 及び m と同時固有状態をもつ。しかし，J_{1z} と J_{2z} は $\boldsymbol{J}^2$ と可換ではないので

$$[\,\boldsymbol{J}^2,\,J_{1z}\,] \neq 0, \qquad [\,\boldsymbol{J}^2,\,J_{2z}\,] \neq 0, \tag{20.5}$$

その固有値である m_1 と m_2 は角運動量を合成した系の良い量子数ではない。すなわち，2 つの部分の波動関数 $|j_1m_1\rangle$ と $|j_2m_2\rangle$ の積波動関数 $|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle$ は，合成した角運動量 j を良い量子数としてもたない。j を良い量子数として持つ状態をつくるには，m_1 と m_2 を混合させなければならない。なお，積波動関数を $|j_1m_1,\,j_2m_2\rangle$ と表すこともある。

クレプシュ-ゴルダン係数

$\boldsymbol{J}^2$ の固有状態は，積波動関数の線形結合で表される。

$$|jm\rangle \;=\; \sum_{m_1m_2} \langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,|j_1m_1,\,j_2m_2\rangle \tag{20.6}$$

変換係数 $\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle$ をクレプシュ-ゴルダン係数（Clebsch-Gordan coefficient）という。

クレプシュ-ゴルダン係数は次の性質をもつ。

(1)　$m_1+m_2=m$ 以外の場合，値は 0 である。

$$\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle = 0 \qquad m_1+m_2 \neq m \tag{20.7}$$

この関係式は，(20.1) から直ちに導かれる。なぜならば，(20.1) は

$$\boldsymbol{J} \;=\; \boldsymbol{J}_1\cdot 1_2 + 1_1\cdot\boldsymbol{J}_2 \tag{20.8}$$

を意味するからである。ここで，1 は演算子で，それが作用する波動関数を全く変えない。また，添え字 1 は状態 $|j_1m_1\rangle$ に作用する演算子であることを，添え字 2 は状態 $|j_2m_2\rangle$ に作用する演算子であることを表す。従って，(20.8) の z 成分を積波動関数 $|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle$ に作用させれば，

$$\begin{aligned} J_z\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle &= (J_{1z}\,|j_1m_1\rangle)\,(1\,|j_2m_2\rangle) + (1\,|j_1m_1\rangle)\,(J_{2z}\,|j_2m_2\rangle) \\ &= m_1\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle + m_2\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle \\ &= (m_1+m_2)\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle \end{aligned}$$

となる。従って，クレプシュ-ゴルダン係数の定義式 (20.6) の両辺に $J_z = J_{1z}+J_{2z}$ を作用させると

$$m\,|jm\rangle \;=\; \sum_{m_1m_2} (m_1+m_2)\,\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle$$

となる。左辺を (20.6) で展開して

$$\sum_{m_1m_2} (m-m_1+m_2)\,\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle \;=\; 0$$

を得る。積波動関数 $|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle$ は一次独立であるから，その係数は 0 である。

$$(m - m_1 + m_2)\,\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle \;=\; 0$$

従って，$m_1 + m_2 = m$ でないとき，クレプシュ-ゴルダン係数は 0 である。

(2) 次の直交関係が成り立つ。

$$\sum_{m_1m_2} \langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,j'm'\,\rangle \;=\; \delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{20.9}$$

$$\sum_{jm}\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,\langle\, j_1m_1'j_2m_2'\,|\,jm\,\rangle \;=\; \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} \tag{20.10}$$

$\boldsymbol{J}^2$ の固有関数，及び，積波動関数の直交性を用いる：

$$\begin{aligned}\langle\, jm\,|\,j'm'\,\rangle \;&=\; \delta_{jj'}\delta_{mm'},\\ \langle\, j_1m_1,\, j_2m_2\,|\,j_1m_1',\, j_2m_2'\,\rangle \;&=\; \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}.\end{aligned} \tag{20.11}$$

第１式を (20.6) で展開すると，(20.9) が直ちに得られる。
また，角運動量を合成して得られる状態 $|\,jm\,\rangle$ の完全性

$$\sum_{jm}\,|\,jm\,\rangle\,\langle\, jm\,| \;=\; 1 \tag{20.12}$$

を用いると (20.10) が得られる。

(3) (20.6) の逆変換は次の式で与えられる：

$$|j_1m_1,\, j_2m_2\rangle \;=\; \sum_{jm}\langle\, j_1m_1j_2m_2\,|\,jm\,\rangle\,|jm\rangle. \tag{20.13}$$

（m についての和があるが，$m = m_1 + m_2$ 以外は係数が 0 である）

積波動関数の集合 $\{\,|j_1m_1,\, j_2m_2\rangle\,\}$ から合成された角運動量の固有状態の集合 $\{\,|jm\rangle\,\}$ への変換 (20.6) は，$|jm\rangle$ が規格直交化された状態であることから，**ユニタリー変換**である。従って，逆変換 (20.13) が得られる。

(4) j_1 と j_2 が与えられたとき，合成された角運動量 j が取る値は，最小値 $|\,j_1 - j_2\,|$ から最大値 $j_1 + j_2$ までで，隣合う値の差は１である：

$$j \;=\; |\,j_1 - j_2\,|,\; |\,j_1 - j_2\,| + 1,\; \cdots,\; j_1 + j_2 - 1,\; j_1 + j_2. \tag{20.14}$$

積波動関数の集合 $\{\,|j_1m_1,\, j_2m_2\rangle\,\}$ の独立な状態の数は $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ であるが，これは合成した波動関数の集合 $\{\,|jm\rangle\,\}$ に属する状態の数

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) \;=\; (2j_1+1)(2j_2+1)$$

に等しい。

20.1.2　クレプシュ-ゴルダン係数の値

クレプシュ-ゴルダン係数の値は，関与する状態の作り方によって定められる。

まず，$j=j_1+j_2$ の状態を考える。中でも $m=j$ の状態を作れるのは，$m_1=j_1, m_2=j_2$ の場合だけである。すなわち，

$$|jj\rangle = \langle\, j_1j_1j_2j_2\,|\,jj\,\rangle\,|j_1j_1,\, j_2j_2\rangle. \qquad (\, j=j_1+j_2\,) \tag{20.15}$$

クレプシュ-ゴルダン係数のユニタリー性から，２乗は 1 であり，通常，

$$\langle\, j_1j_1j_2j_2\,|\,jj\,\rangle = 1 \qquad (\, j=j_1+j_2\,) \tag{20.16}$$

とする（**位相の約束-２**）。すなわち，

$$\langle\, j_1j_1j_2j_2\,|\,jj\,\rangle = |j_1j_1,\, j_2j_2\rangle \qquad (\, j=j_1+j_2\,) \tag{20.17}$$

と書ける。次に，降演算子を用いて $m=j-1$ の状態を作る。降演算子は，１番目と２番目の状態に作用する演算子を陽に書くと

$$J_- = J_{1-}\cdot 1_2 + 1_1\cdot J_{2-} \tag{20.18}$$

である。左辺の演算子を (20.17) の左辺に作用させ，一方，右辺の演算子を (20.17) の右辺に作用させる。降演算子の行列要素 (18.43) を用いると，

$$\sqrt{2j}\,|j\,j-1\rangle = \sqrt{2j_1}\,|j_1j_1-1,\, j_2j_2\rangle + \sqrt{2j_2}\,|j_1j_1,\, j_2j_2-1\rangle$$

すなわち，

$$|j\,j-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j}}\,|j_1j_1-1,\, j_2j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j}}\,|j_1j_1,\, j_2j_2-1\rangle \tag{20.19}$$

が得られる。これより，直ちに次の２つのクレプシュ-ゴルダン係数の値が決まる：

$$\begin{aligned} \langle\, j_1j_1-1\,j_2j_2\,|\,jj-1\,\rangle &= \sqrt{j_1/j} \\ \langle\, j_1j_1\,j_2j_2-1\,|\,jj-1\,\rangle &= \sqrt{j_2/j} \end{aligned} \qquad (\, j=j_1+j_2\,) \tag{20.20}$$

降演算子の行列要素の位相の約束により，ここでの位相の任意性はなく，値は一意的に定まる。この過程を繰り返すと，合成した角運動量が $j=j_1+j_2$ である状態が一意的に決まり，従って，それに対応するクレプシュ-ゴルダン係数も一意的に決まる。

次は角運動量の大きさが１つ小さい $j-1=j_1+j_2-1$ の状態である。その中で z 成分が最大の状態は $m=j-1=j_1+j_2-1$ である。この状態は (20.19) の状態と直交した状態である：

$$|j-1j-1\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j}}\,|j_1j_1-1,\, j_2j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j}}\,|j_1j_1,\, j_2j_2-1\rangle. \tag{20.21}$$

ただし，右辺に負号をかけた状態でも (20.19) との直交性は保証される。ここに新たな位相の自由度がある。しかし，この符号を決めてしまえば（**位相の約束-３**），角運動量 j をも

つ状態と同様にして，降演算子を用いて，m の小さい状態を順次,（符号まで含めて）一意的に作ることができる。

以下，同様にして，角運動量が 1 つ小さい状態を作るごとに，新たな符号の自由度があり，それを除けば状態は一意的に作られる。状態を作ると同時に，対応したクレプシュ-ゴルダン係数の値も定まる。

20.1.3 クレプシュ-ゴルダン係数の一般形と対称性

一般形 一般のクレプシュ-ゴルダン係数は閉じた形で与えられる：

$$\begin{aligned}\langle\, a\alpha b\beta \,|\, c\gamma \,\rangle &= \delta_{\alpha+\beta,\gamma} \\ &\times \left[\frac{(c+a-b)!(c-a+b)!(a+b-c)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)}{(c+a+b+1)!(a-\alpha)!(a+\alpha)!(b-\beta)!(b+\beta)!}\right]^{1/2} \\ &\times \sum_k \frac{(-1)^{k+b+\beta}(c+b+\alpha-k)!(a-\alpha+k)!}{(c-a+b-k)!(c+\gamma-k)!k!(k+a-b+\gamma)!} \qquad (20.22)\end{aligned}$$

ここで，k についての和は分母が 0 にならない範囲で整数値をとる。

対称性 クレプシュ-ゴルダン係数には次の対称性がある：

$$\begin{aligned}\langle\, j_1 m_1 j_2 m_2 \,|\, jm \,\rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j}\langle\, j_1 \, {-m_1} j_2 \, {-m_2} \,|\, j \, {-m} \,\rangle \qquad (20.23) \\ &= (-1)^{j_1+j_2-j}\langle\, j_2 m_2 j_1 m_1 \,|\, j \, {-m} \,\rangle \qquad (20.24) \\ &= (-1)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}}\langle\, j_1 m_1 j \, {-m} \,|\, j_2 \, {-m_2} \,\rangle \qquad (20.25)\end{aligned}$$

この 3 つの関係式から，他の対称性も導ける。

20.2　球テンソル演算子とウィグナー-エッカートの定理

20.2.1　球テンソル演算子

球テンソル演算子は，座標軸の回転に対する変換性によって定義される。球テンソルは，既約テンソルと呼ばれることもある。

例として，ベクトル演算子を考える。ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，テンソルの言葉で言えば１階のテンソルである。ベクトル $\boldsymbol{A}$ はデカルト座標系において３つの成分 A_x, A_y, A_z をもつが，角運動量を扱うときにはデカルト座標の成分は不便である。それは，波動関数が，角運動量 j とともに，その z 軸への射影 m を良い量子数としてもつ状態として表されるからである。そこで，デカルト座標における３つの成分の線形結合

$$A_{\pm 1} \,=\, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(A_x \pm i\,A_y), \qquad A_0 \,=\, A_z \tag{20.26}$$

をつくると，このように書いた A_μ の添字 μ は角運動量の z 軸への射影に対応している。

角運動量の演算子 $\boldsymbol{J}$ もベクトル演算子であるから，上と同様にして，１階の既約テンソル演算子としての３つの成分 J_μ は

$$J_{\pm 1} \,=\, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(J_x \pm i\,J_y), \qquad J_0 \,=\, J_z \tag{20.27}$$

で与えられる。ベクトルである座標の演算子，運動量の演算子も全く同様である。

球テンソル演算子の定義（ラカーの定義）
１組の演算子

$$\{\,T_{LM}\,\} \qquad M \,=\, -L,\, -L+1,\, \cdots,\, L-1,\, L \tag{20.28}$$

があり，角運動量の演算子と交換関係

$$\begin{aligned} [\,J_{\pm 1},\, T_{LM}\,] &\;=\; \mp\sqrt{\frac{(L\mp M)(L\pm M+1)}{2}}\,T_{L\,M\pm 1} \\ [\,J_0,\, T_{LM}\,] &\;=\; M\,T_{LM} \end{aligned} \tag{20.29}$$

を満たすとき，上の演算子の集合は L 階の球テンソル演算子を構成する。ただし，ここに現れている角運動量の演算子の成分は，(20.27) で定義された成分 J_μ である。

球テンソル演算子の別の例として，位置演算子の積で定義される四重極遷移演算子がある：

$$Q_{2\mu} \,=\, r^2\,Y_{2\mu}(\theta,\phi) \qquad \mu \,=\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2 \tag{20.30}$$

これら５つの成分は，位置演算子のデカルト座標成分 x, y, z で表すと

$$\begin{aligned} Q_{2\,\pm 2} &\;=\; \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,(x\pm iy)^2 \\ Q_{2\,\pm 1} &\;=\; \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,(x\pm iy)\,z \\ Q_{20} &\;=\; \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,[\,2z^2 - x^2 - y^2\,] \end{aligned} \tag{20.31}$$

となる。

20.2.2　ウィグナー-エッカートの定理

この定理は，球テンソル演算子の行列要素を扱う上で大変重要であるが，詳細は省いて，その意味するところを述べるに留める。

$\boldsymbol{J}^2$ と J_z の固有状態（既約表現）に対して，球テンソル演算子の行列要素は次のように書ける：

$$\langle\, j_1 m_1 \,|\, T_{LM} \,|\, j_2 m_2 \,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} \langle\, j_2 m_2 L M \,|\, j_1 m_1 \,\rangle \langle\, j_1 \,\|\, \boldsymbol{T}_L \,\|\, j_2 \,\rangle \tag{20.32}$$

右辺の行列要素の 2 本の縦棒は角運動量について reduce したことを表し，この行列要素を換算行列要素（reduced matrix element）とよぶ。換算行列要素は角運動量の z-成分，m_1，m_2 には依存しない。なお，上の式で，$1/\sqrt{2j_1+1}$ を換算行列要素に含める場合もあるので，注意を要する。

ウィグナー-エッカートの定理（Wigner-Eckart theorem）により，行列要素の物理的因子と幾何学的因子が分離される。球テンソル演算子の物理的性質，始状態・終状態の物理的性質は全て換算行列要素の中に含まれる。J_z の固有値に依存する部分（幾何学的因子）はクレプシュ-ゴルダン係数に含まれる。この結果，$(2j_1+1)$ 表現と $(2j_2+1)$ 表現の状態に対する，L 階の球テンソル演算子の行列要素は全部で

$$(2j_1+1)\times(2j_2+1)\times(2L+1) \text{ 個}$$

あるが，幾何学的因子を除いた，物理的性質に依存する因子は唯一つしかない。個々の行列要素のあいだの関係はクレプシュ-ゴルダン係数によって決定される。もちろん，クレプシュ-ゴルダン係数が 0 になる場合は，行列要素も 0 である。

20.3　補講：SU(2) 群

20.3.1　SU(2) 群と生成子

群

座標軸の回転に伴う波動関数を変換する演算子 (18.1)

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta) \;=\; \exp\left(-i\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}\,\theta\right) \tag{20.33}$$

を元とする集合を考える。ここで，$\boldsymbol{J}$ は角運動量演算子であり，$\hbar=1$ とした。角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ はエルミート演算子であり，

$$J_i^{\dagger} \;=\; J_i \qquad i \;=\; x,\, y,\, z \tag{20.34}$$

よって，$\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ はユニタリー演算子である：

$$\Big(\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)\Big)^{\dagger}\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta) \;=\; \mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)\Big(\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)\Big)^{\dagger} \;=\; 1. \tag{20.35}$$

演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ は群をなす。実際，以下の群の条件を満たしている：

(1)　任意の２つの元 a, b の積 ab は元である。

(2)　単位元 e が存在する。単位元とは，任意の元 a に対して，$ae=ea=a$ を満たす元である。

(3)　任意の元 a に対して逆元 a^{-1} が存在する。このとき，$aa^{-1}=a^{-1}a=e$ である。

(4)　結合則 $(ab)c=a(bc)$ が成り立つ。

演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ において，単位元は $\theta=0$ とした元であり，逆元は $\theta \;\rightarrow\; -\theta$ とした元である。

生成子，代数

３つの角運動量演算子 J_i $(i=x,\,y,\,z)$ を群の生成子（generator）と呼ぶ。生成子の交換子は生成子の線型結合で表され

$$[\,J_i,\,J_j\,]=i\sum_k f_{ijk}J_k, \tag{20.36}$$

f_{ijk} を構造定数（structure constants）という。今の場合，生成子の交換関係 (18.12) より，構造定数は反対称テンソルで与えられる：

$$f_{ijk} \;=\; \epsilon_{ijk}. \tag{20.37}$$

この交換関係より，互いに可換な生成子は１個であり（互いに可換な異なる生成子はない），これより，群のランクは 1 であるという。

　生成子を行列で表すと，(18.46) や (18.48) に示したように，トレース（対角要素の和）が 0 の行列である。従って，群をなす演算子 $\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ を行列で表したとき，その行列式は 1

である。行列式が 1 であるユニタリー演算子がなす群を特殊ユニタリー群（special unitary group）と呼ぶ。ランクが 1 である特殊ユニタリー群を SU(2) と呼ぶ。なお，交換関係より，この群は非アーベル群（non-Abelian group）である。

生成子の集合を代数（algebra）と呼び，$su(2)$ と表すことが多い。生成子の中で互いに可換な生成子からなる集合をカルタン部分代数（Cartan subalgebra）と呼ぶ。カルタン部分代数を構成する生成子の個数が群のランクである。SU(2) 群の場合，ランクは 1 であり，通常，J_z をカルタン部分代数を構成する生成子にとる。なお，$\boldsymbol{J}^2$ は SU(2) 群の 2 次のカシミア演算子（Casimir operator）である。

20.3.2 既約表現

角運動量を良い量子数としてもつ状態は，通常，カシミア演算子 $\boldsymbol{J}^2$ とカルタン部分代数をなす生成子 J_z の固有状態であり，それらの固有値を用いて状態を指定する：$|\,jm\,\rangle$。18.2.2 で述べたように，$(2j+1)$ 個の状態

$$\{\,|\,jm\,\rangle\,\} \qquad m \;=\; j,\, j-1,\, \cdots,\, -(j-1),\, -j.$$

は，$\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ に変換されたとき，再び $(2j+1)$ 個の固有状態 $\{\,|\,jm\,\rangle\,\}$ の線形結合で表され，

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{n},\theta)\,|\,jm\,\rangle \;=\; \sum_{m'} c_{jm'}\,|\,jm'\,\rangle$$

角運動量の値が j とは異なる状態は生成されない。この $(2j+1)$ 個の状態を $(2j+1)$-次元の既約表現（irreducible representation）という。

既約表現は以下のように言い換えることもできる。次のような線型結合でつくられている状態 $|\,k\,\rangle$ の集合を考える：

$$|\,k\,\rangle \;=\; \sum_{jm} C^{\,k}_{jm}\,|\,jm\,\rangle. \tag{20.38}$$

ただし，j について和を取るときには，その $(2j+1)$-個の z-成分 m について全て和を取るものとする。状態 $|\,k\,\rangle$ の個数を N とすると，$|\,k\,\rangle$ を基底として 3 つの角運動量演算子を行列で表現すると，それらの行列は $N\times N$ である。$|\,k\,\rangle$ の線型結合をつくると（$C^{\,k}_{jm}$ を変える），3 つの行列を，同時に，同じ形のブロック対角（block diagonal）な行列に変換できることがある。どのように線型結合を選んでも，それ以上小さいブロックに変換できないとき，各ブロックに対応する基底を既約表現という。なお，(20.38) に示した例では，$(2j+1)$-個の状態 $|\,jm\,\rangle$ が $(2j+1)$-次元の既約表現である。

20.3.3 クレプシュ-ゴルダン分解

上に示した線型結合 (20.38) において，右辺に，$(2j_1+1)$-次元の既約表現と $(2j_2+1)$-次元の既約表現の積を考える：

$$|\,k\,\rangle \;=\; \sum_{jm} C^{\,k}_{m_1 m_2}\,|\,j_1 m_1\,\rangle\,|\,j_2 m_2\,\rangle. \tag{20.39}$$

ここに，j_1 と j_2 は固定し，m_1 と m_2 については可能な全ての値の和をとる。$|\,k\,\rangle$ の個数は $(2j_1+1)\times(2j_2+1)$ である。N 個の $|\,k\,\rangle$ を基底として，３つの角運動量演算子を $N\times N$ の行列で表したとき，線型結合 (20.39) を適当にとると，３つの行列は，同時に，同じ形のブロック対角（block diagonal）な行列に変換できる。このとき，各ブロックに対応する基底は既約表現であり，$\boldsymbol{J}^2$ と J_z の同時固有状態である。このように，既約表現の積（直積）を既約表現の和（直和）で表すことをクレプシュ-ゴルダン分解という。既約表現を構成する状態が規格化されているとき，(20.39) の係数 $C^{\,k}_{m_1m_2}$ がクレプシュ-ゴルダン係数になる。

たとえば，$j_1=1$，$j_2=3/2$ の場合，それぞれは 3-次元（既約）表現，4-次元（既約）表現である。その積からつくられる既約表現は，(20.14) より，$J=1/2,\,3/2,\,5/2,$ に対応する。それぞれ，2-次元（既約）表現，4-次元（既約）表現，6-次元（既約）表現である。このとき，

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{4}\;=\;\mathbf{2}\oplus\mathbf{4}\oplus\mathbf{6} \tag{20.40}$$

と表す。