

第24章 ボルン近似

散乱問題においても，厳密に解けない場合が多い。前章で取り上げた井戸型ポテンシャルはポテンシャル内の厳密解が求められる数少ない例である。厳密解が求められないときでも，ポテンシャルが強くない場合には，ボルン展開と呼ばれる，逐次近似によって近似解を系統的に求める方法が開発されている。特に，その第1近似はボルン近似と呼ばれて，多くの散乱問題の解法として用いられている。

24.1 境界条件を満たす積分方程式

24.1.1 第22章の復習

時間に依存しないポテンシャル $V(\mathbf{x})$ による質量 m の粒子の散乱を考える：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (24.1)$$

エネルギー E が一定の場合の定常状態の波動関数は，時間依存の因子を分離することができ，

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar} t\right) \quad (24.2)$$

$u(\mathbf{x})$ が満たすべき時間に依存しないシュレディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] u(\mathbf{x}) = E u(\mathbf{x}) \quad (24.3)$$

となる。これが，散乱問題で解くべき方程式である。

図 24.1 に示すように，入射粒子が波数ベクトル $\mathbf{k}_i = k\mathbf{e}_z$ (定ベクトル) で標的に向かって入射してくる平面波で表されるとき，多くの粒子は透過波としてそのまま \mathbf{k}_i で進行し，一部の粒子は標的粒子によって散乱され，それは外向き球面波として表される。すなわち，波動関数 $u(\mathbf{x})$ が満たすべき境界条件は

$$u^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (24.4)$$

である。ここに，一辺の長さが 2π の立方体の中，すなわち，体積 $V = (2\pi)^3$ に1個の入射粒子があるように波動関数を規格化してある。入射平面波も散乱球面波も，ポテンシャルが作用しない領域(遠方)での，自由粒子のシュレディンガー方程式の解になっている。な

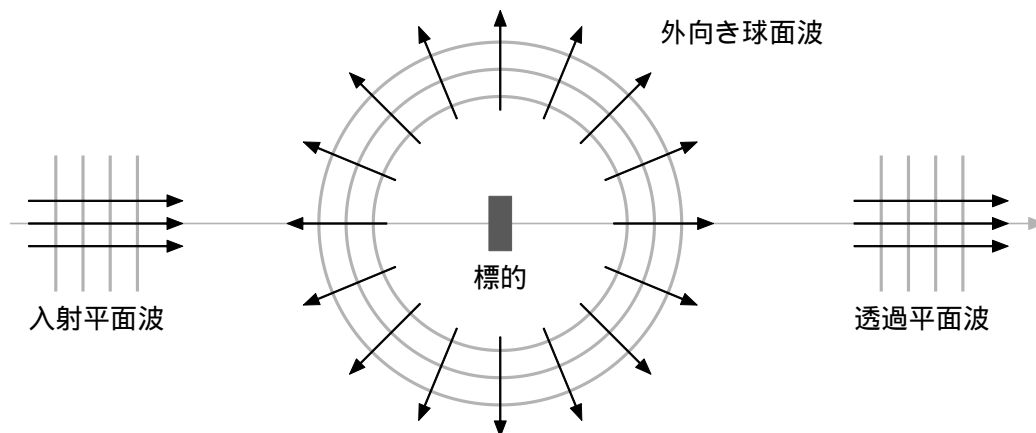


図 24.1: 散乱問題の境界条件

お, 内向き球面波もこの方程式の解であるが, 境界条件として外向き球面波しか含まないことを意味して, 波動関数に + の記号を付けてある。散乱振幅 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = -(2\pi)^{3/2} \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \exp(-ik_f \cdot \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') u^+(\mathbf{x}') \quad (24.5)$$

で与えられる。右辺に現れる波数ベクトル k_f が散乱される向きを表している。なお, 上に示した入射平面波と外向き球面波はポテンシャルが作用しない領域での漸近形であり, ポテンシャルが作用する領域での波動関数は複雑である。

24.1.2 グリーン関数を用いた解法

散乱問題のシュレディンガー方程式 (24.3) は (混乱が生じないように x を r で表すことにする)

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} V(\mathbf{r}) \quad (24.6)$$

として

$$(\nabla^2 + k^2) u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \quad (24.7)$$

と書き換えられる。右辺を非斉次項とみなすと, この方程式 (24.7) の一般解は, 非斉次項を 0 としたヘルムホルツ型の方程式 (ポテンシャルがない場合の自由粒子の方程式)

$$(\nabla^2 + k^2) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (24.8)$$

の一般解と, (24.7) の特解の和で与えられる。特解を求めるために次の微分方程式を考える:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (24.9)$$

ここで導入した $G(\mathbf{r})$ を微分方程式 (24.7) のグリーン関数という。 $G(\mathbf{r})$ を用いると, (24.7) の特解は

$$\chi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \quad (24.10)$$

で与えられる。実際， $\chi(\mathbf{r})$ を (24.7) の左辺に代入し，(24.9) を用いると，

$$(\nabla^2 + k^2)\chi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \quad (24.11)$$

と，(24.7) の右辺が得られる。

グリーン関数 $G(\mathbf{r})$ を求めるには，それを波数についての積分に書き直す。そのために， $G(\mathbf{r})$ 及び $\delta(\mathbf{r})$ をフーリエ変換の形に表す：

$$G(\mathbf{r}) = \int d^3k' G(\mathbf{k}') \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}), \quad (24.12)$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}). \quad (24.13)$$

ここで，同じ G の記号を用いているが， $G(\mathbf{r})$ は座標表示， $G(\mathbf{k})$ は波数表示のグリーン関数であり，互いのフーリエ変換になっている。これらを (24.9) に代入し，両辺を比較して

$$(k^2 - k'^2) G(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \quad (24.14)$$

が得られる。これを $G(\mathbf{r})$ のフーリエ変換の式 (24.12) の右辺に代入すると， $G(\mathbf{r})$ は波数の積分で次のように表せる：

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' \frac{\exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}{k^2 - k'^2}. \quad (24.15)$$

波数ベクトル \mathbf{k}' についての積分は，極座標をとると，その角度部分の積分が実行できる。ここでは，極座標を図 24.2 に示すように， \mathbf{r} の向きに z 軸をとる。積分は

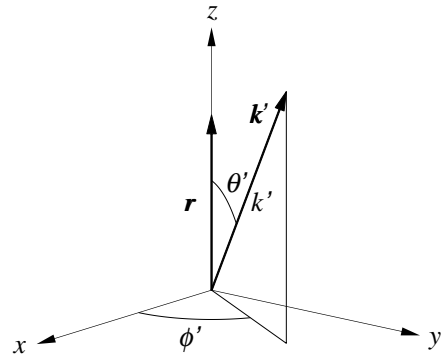


図 24.2: 運動量 \mathbf{k}' の極座標

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \frac{\exp(ik'r \cos \theta')}{k^2 - k'^2} \int_0^{2\pi} d\phi' \quad (24.16)$$

と書け， ϕ' についての積分は単に 2π を与え， θ' についての積分も容易にできる ($t = \cos \theta'$ と置換する)：

$$\int_0^\pi \sin \theta' d\theta' e^{ik'r \cos \theta'} = \int_{-1}^1 dt e^{ik'rt} = \frac{e^{ik'r} - e^{-ik'r}}{ik'r}.$$

その結果，

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{e^{ik'r} - e^{-ik'r}}{k^2 - k'^2} k' dk' \quad (24.17)$$

となる。被積分関数が偶関数であることを利用して，0 から ∞ までの積分範囲を $-\infty$ から ∞ までにして書き直す。また，このとき，第 1 項の積分と第 2 項の積分は等しい。よって，上の積分は次のようになる：

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 i r} \int_{-\infty}^\infty dk' \frac{e^{ik'r}}{k^2 - k'^2} k' dk'. \quad (24.18)$$

この積分を実行するため、波数を複素数に拡張して留数定理を用いる。被積分関数は $k' = \pm k$ に 1 位の極をもつが、 $k'^2 - k^2$ を $k'^2 - k^2 - i\varepsilon$ とすることによって特異点を避け、得られる散乱波が外向きの球面波になる。 $\exp(ik'r)$ は k' の虚数部分が正で大きくなるといくらでも小さくなるので、図 24.3 に示すように、上半面の無限に大きい半円を加えても、そこからの寄与は無視できる。2つの極のうち、 $k' = k + i\varepsilon$ からの寄与だけが残る：

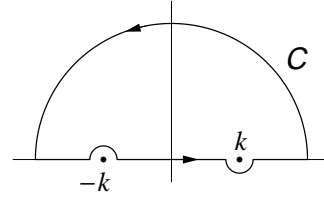


図 24.3: 波数 k' の積分路

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2 i r} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ik'r}}{k' - k - i\varepsilon} + \frac{e^{ik'r}}{k' + k + i\varepsilon} \right) dk' = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (24.19)$$

この結果を (24.10) に代入して ($G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ であることに注意)、積分方程式

$$\begin{aligned} u^{(+)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz} + \int d^3 r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u^{(+)}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') u^{(+)}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (24.20)$$

が得られる。

上の積分方程式の右辺の漸近形から、散乱振幅の表式が得られる。(24.20) の右辺第 2 項にある積分の範囲は、ポテンシャル $U(\mathbf{r}')$ が 0 でない領域に限られる。従って、 r の大きい (遠方) 領域では、 $r' \ll r$ が成り立ち、グリーン関数を r'/r で展開して近似することができる。グリーン関数の分子では

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' + O(r'/r)$$

より

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + O(kr'/r) \quad (24.21)$$

となる。ここに、外向き球面波の波数ベクトル \mathbf{k} は \mathbf{r} と同じ方向であるので、 $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_r$ とした。一方、分母は

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} + O(r'/r) \quad (24.22)$$

と近似できる。両式より

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \quad (r \rightarrow \infty) \quad (24.23)$$

となる。これを (24.20) に代入して、 $r \rightarrow \infty$ の漸近形

$$u^{(+)}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{ikz} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') u^{(+)}(\mathbf{r}') \right] \quad (24.24)$$

が得られる。境界条件の式 (22.11) と比較して ($U(\mathbf{r}')$ を $V(\mathbf{r}')$ に戻して)、散乱振幅 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = -(2\pi)^{3/2} \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') u^{(+)}(\mathbf{r}') \quad (24.25)$$

と表せることがわかる。

24.2 ボルン近似

24.2.1 ボルン展開

散乱の効果は全て散乱振幅に含まれ、観測できる微分散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (24.26)$$

で与えられる。散乱振幅は (24.25) より、ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ と波動関数 $u^+(\mathbf{r})$ から計算できる。この波動関数 $u^+(\mathbf{r})$ は積分方程式 (24.20) の解であるが、両辺に $u^+(\mathbf{r})$ を含んでいるので、この方程式を解くのは一般に容易ではない。そこで、積分方程式をポテンシャル V についての逐次近似（ボルン展開）で解いて、遷移振幅を計算することを考える。

第0近似

方程式 (24.20) の第0近似の解は右辺の第1項のみを取る解である：

$$u^+(\mathbf{r})^{(0)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}). \quad (24.27)$$

第1近似

第0近似の解を方程式 (24.20) の右辺に代入して、第1近似の解が得られる：

$$\begin{aligned} u^+(\mathbf{r})^{(1)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \right]. \quad (24.28) \end{aligned}$$

第1項は入射平面波であり、第2項が散乱を表す。第2項において、積分方程式では全波動関数 $u^+(\mathbf{r}')$ であったところが、第0近似の入射平面波で置き換えられている。すなわち、図 24.4 の左図に模式的に示すように、入射平面波がポテンシャルによって位置 \mathbf{r}' で散乱さ

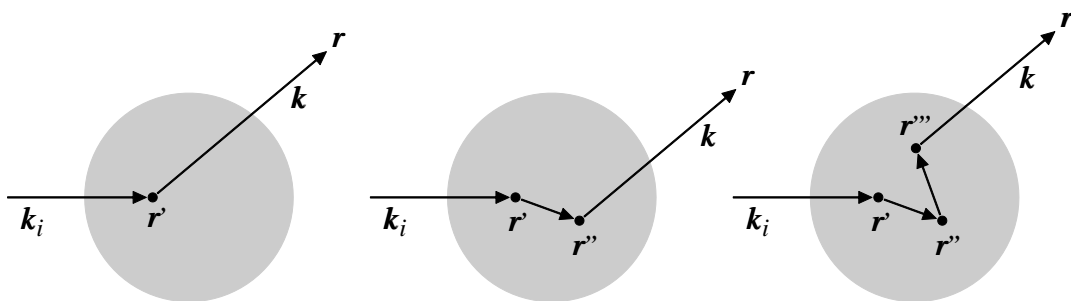


図 24.4: ボルン展開。左から順に1次の項，2次の項，3次の項。

れ、外向き球面波として r (遠方) へ伝播する。外向き球面波の伝播をグリーン関数が表している。

第 2 近似

ボルン展開の第 2 近似には, ポテンシャルによる 2 回の散乱の項 (図 24.4 の中央) が加わる:

$$u^+(\mathbf{r})^{(2)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \right. \\ \left. + \int d^3r' \int d^3r'' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') U(\mathbf{r}'') G(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \right]. \quad (24.29)$$

右辺の最後の項では, 入射が \mathbf{r}' でポテンシャルによって散乱され, グリーン関数 $G(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')$ によって伝播し, 再び \mathbf{r}'' でポテンシャルによって散乱され, グリーン関数 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')$ は外向き球面波として遠方 (\mathbf{r} の方向) への伝播を表している。以下, 同様にして, 第 3 近似, 第 4 近似と高次の項が求められる。

遷移振幅

ボルン展開において, 遷移振幅は, 波動関数の展開より

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \\ -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \int d^3r'' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'') U(\mathbf{r}'') G(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}') \\ + \dots \quad (24.30)$$

上で述べてきたように, ボルン展開は波動関数 $u^+(\mathbf{r})$ のポテンシャル $V(\mathbf{r})$ のべきに展開した摂動に他ならない。すなわち, ボルン展開の無限次までとれば (収束するならば) 積分方程式 (24.20) の右辺が求まることになる。言い換えれば, 積分方程式を解いて得られる $u^+(\mathbf{r})$ はボルン展開で得られるような多重散乱の効果も含んでいることになる。摂動が弱ければ, 摂動の 1 次まで取れば十分である。

24.2.2 ボルン近似

ボルン展開の 1 次の項まで取り入れた近似を ボルン近似 (Born approximation) と呼ぶ。このとき, 波動関数は

$$u^+(\mathbf{r})^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{\exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r})}{r} f(\theta, \phi) \right] \quad (24.31)$$

と表される。この近似が良い近似となるのは, 一般に, 右辺の第 1 項に対して第 2 項が小さいとき, すなわち, ポテンシャルが作用する範囲での波動関数が入射平面波とあまり違わないときである。エネルギーが高いときには, ボルン近似は常に良い近似になっているが, エネルギーが低いときは, ポテンシャルが弱いときに良い近似となる。

ボルン近似の散乱振幅

波動関数の近似 (24.31) より, 散乱振幅は直ちに次の式で与えられる:

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \quad (24.32)$$

すなわち，ボルン近似では，散乱振幅はポテンシャルのフーリエ変換に比例している。散乱振幅より，微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int d^3r' \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \right|^2 \quad (24.33)$$

となる。また，

$$\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (24.34)$$

は，入射粒子が散乱に際してポテンシャルから受け取る運動量であり，移行運動量とも呼ばれる。

ポテンシャル散乱においてエネルギーは保存するので，入射粒子の運動量と散乱粒子の運動量の向きは異なるが，大きさは等しい：

$$|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k. \quad (24.35)$$

従って，図 24.5 に示すように，散乱角 (\mathbf{k}_i と \mathbf{k}_f がなす角) を θ として，運動量移行の大きさを $\hbar q = \hbar |\mathbf{q}|$ として

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (24.36)$$

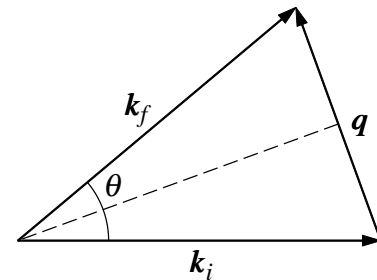


図 24.5: 波数ベクトルの関係

が成り立つ。

中心力ポテンシャルの場合

ポテンシャルが中心からの距離 $r = |\mathbf{r}|$ だけの関数であるとき，散乱振幅は散乱角 θ だけの関数になる。座標 \mathbf{r}' の 3 次元の積分 (フーリエ変換) は

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty V(r) dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{iqr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi$$

であるが，角度 θ と ϕ についての積分は実行でき，散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) r \frac{\sin qr}{q} dr \quad (24.37)$$

で与えられる。

24.2.3 部分波展開におけるボルン近似

ポテンシャルが向きに依存しない中心力ポテンシャル Vr の場合，波動関数 $u(r, \theta, \phi)$ は部分波に展開でき，動径波動関数 $R_\ell(r)$ と角度部分の波動関数 $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ は分離できる。軌道角運動量が ℓ の部分波の動径波動関数を

$$R_\ell = \frac{\chi_\ell(r)}{r} \quad (24.38)$$

と表すと, $\chi_\ell(r)$ はシュレディンガー方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) + k^2 \right] \chi_\ell(r) = 0 \quad (24.39)$$

を満たす。ここに,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad V(r) = \frac{\hbar^2}{2m} U(r) \quad (24.40)$$

である。ポテンシャルが $V(r) = U(r) = 0$ の時の解を $\varphi_\ell(r)$ と表すと,

$$\varphi_\ell(r) = kr j_\ell(kr) \quad (24.41)$$

である。両方の解 $\chi_\ell(r)$ と $\varphi_\ell(r)$ は原点における境界条件

$$\chi_\ell(r=0) = \varphi_\ell(r=0) = 0 \quad (24.42)$$

を満たす。ポテンシャルが弱い場合, シュレディンガー方程式 (24.39) の解 $\chi_\ell(r)$ は $\varphi_\ell(r)$ に近いはずであり, このとき, 位相のずれ δ_ℓ に対して近似式を求めることができる。

シュレディンガー方程式 (24.39) と, ポテンシャルがない場合の方程式を次のように書き直す:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] \chi_\ell(r) = U(r) \chi_\ell(r), \quad (24.43)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + k^2 \right] \varphi_\ell(r) = 0. \quad (24.44)$$

上の式に $\varphi_\ell(r)$ をかけ, 下の式に $\chi_\ell(r)$ をかけて辺々引き算すると,

$$U(r) \chi_\ell(r) \varphi_\ell(r) = \varphi_\ell(r) \frac{d^2 \chi_\ell(r)}{dr^2} - \chi_\ell(r) \frac{d^2 \varphi_\ell(r)}{dr^2} \quad (24.45)$$

が得られる。これを両辺 r について積分すると, 部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U(r) \chi_\ell(r) \varphi_\ell(r) dr &= \int_0^\infty \left(\varphi_\ell(r) \frac{d^2 \chi_\ell(r)}{dr^2} - \chi_\ell(r) \frac{d^2 \varphi_\ell(r)}{dr^2} \right) dr \\ &= \left[\varphi_\ell(r) \frac{d\chi_\ell(r)}{dr} - \chi_\ell(r) \frac{d\varphi_\ell(r)}{dr} \right]_0^\infty \end{aligned} \quad (24.46)$$

となる。右辺の $r=0$ での値は境界条件 (24.42) より 0 になる。一方, $r \rightarrow \infty$ の極限では, ポテンシャルがない領域でのシュレディンガー方程式の解の漸近形 (前章参照), 及び, (24.41) の漸近形を代入して,

$$\begin{aligned} \left[\varphi_\ell(r) \frac{d\chi_\ell(r)}{dr} - \chi_\ell(r) \frac{d\varphi_\ell(r)}{dr} \right]_0^\infty &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\sin \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} \right) k \cos \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell \right) k \cos \left(kr - \frac{\ell\pi}{2} \right) \right] \\ &= -k \sin \delta_\ell \end{aligned} \quad (24.47)$$

となる（最後の等号は加法定理）。(24.46) の左辺には $\varphi_\ell(r)$ の式 (24.41) を代入して、その結果、(24.46) は

$$\sin \delta_\ell = - \int_0^\infty U(r) \chi_\ell(r) r j_\ell(r) dr \quad (24.48)$$

と表せる。ここまでは、漸近形を用いたものの、ポテンシャルが弱いことによる近似は行っていない。

位相のずれに対するボルン近似

ポテンシャル $V(r)$ が十分弱い場合、ポテンシャルがある場合のシュレディンガー方程式の解 $\chi_\ell(r)$ はポテンシャルがない場合の解 $\varphi_\ell(r)$ に近く、位相のずれ δ_ℓ も小さくなる。このとき、位相のずれを表す式 (24.48) の右辺にある $\chi_\ell(r)$ を $\varphi_\ell(r)$ で置き換えるのは良い近似になっていて、その結果は

$$\sin \delta_\ell \approx \delta_\ell \approx - \frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) j_\ell^2(kr) r^2 dr \quad (24.49)$$

となる。これが位相のずれに対するボルン近似である。実際、前節のボルン近似では、シュレディンガー方程式の解 $u^+(r)$ をポテンシャルがない場合の解である入射平面波で置き換えて散乱振幅を求めたが、ここでも、シュレディンガー方程式の解 $\chi_\ell(r)$ をポテンシャルがない場合の解 $\varphi_\ell(r)$ で置き換えている。また、平面波を部分波展開したときの軌道角運動量が ℓ の部分波が $\varphi_\ell(r)$ になっている。

特にエネルギーが低い場合、 $kr \ll 1$ であるので、このとき、漸近形

$$j_\ell(kr) \approx \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell + 1)!} (kr)^\ell$$

を用いると、位相のずれはエネルギー $E = (\hbar k)^2/2m$ の関数として

$$\delta_\ell \approx k^{2\ell+1} \quad (24.50)$$

のように 0 に近づく。これからも、低エネルギーの散乱では s 波 ($\ell = 0$) での散乱が重要であることがわかる。