

第2章 不確定性関係

2.1 二重スリットによる干渉じま

光の波動性を示す有名な実験として、19世紀初頭にヤング (T. Young) によって行われた二重スリットによる実験がある。図 2.1 に示すように、遠方の点光源からの光を平行な2本のスリットを通すと、スクリーン上に干渉じまが生じる。2つのスリットからの距離

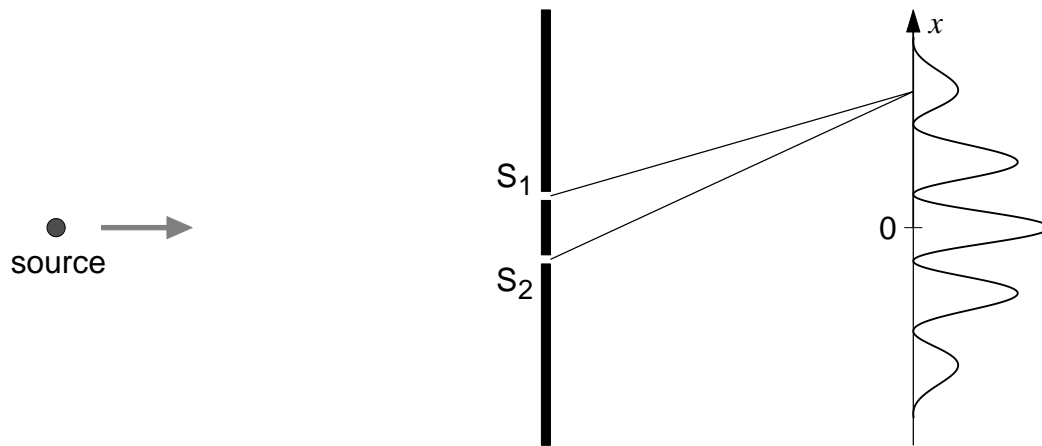


図 2.1: ヤングの実験

が等しい位置 (しま模様を中心) では明るくなる。さらに、2つのスリットからの光路差が光の波長の整数倍になる位置では干渉によって強め合っ明るくなり、2つの明るいしまの中間では干渉によって弱め合っ暗くなる。このように、スクリーン上には、明るい部分と暗い部分が交互に繰り返され、干渉じまができる。スリット間の間隔を d 、スリットとスクリーン間の距離を L とすると、光路差は

$$\Delta D = \left| \left[L^2 + \left(x + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[L^2 + \left(x - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right| \quad (2.1)$$

であり、ここに、 x はスクリーン上でのしま模様を中心からの距離である。 $L \gg d, x$ のとき、光の波長を λ とし、光が強め合う条件は次のように表すことができる：

$$x = \frac{nL\lambda}{d}. \quad (2.2)$$

n は整数で、 $n = 0$ がしま模様の中点に対応する。

同様の実験は電子を用いて行うこともできる。図 2.2 に示すように、光源の代わりに電子銃をおいて、電子銃から電子を発射する。スクリーンの代わりに写真乾板をおく。あるいは、写真乾板ではなく、電子の計数管を並べて配置する。電子銃から発射された電子は、2本あるスリットを通り、写真乾板に到達すると写真乾板は感光し、ヤングの実験と同様な濃淡のしま模様が生じる。計数管を配置した場合は、図 2.2 のように、計数管の計数は写真乾板の濃淡のしま模様と同様になる。もちろん、しま模様の間隔は実験に用いる電子のエネルギーによって異なり、光の場合の波長に対応して、電子のド・ブローイ波長 (1.38) を用いて間隔は計算できる。

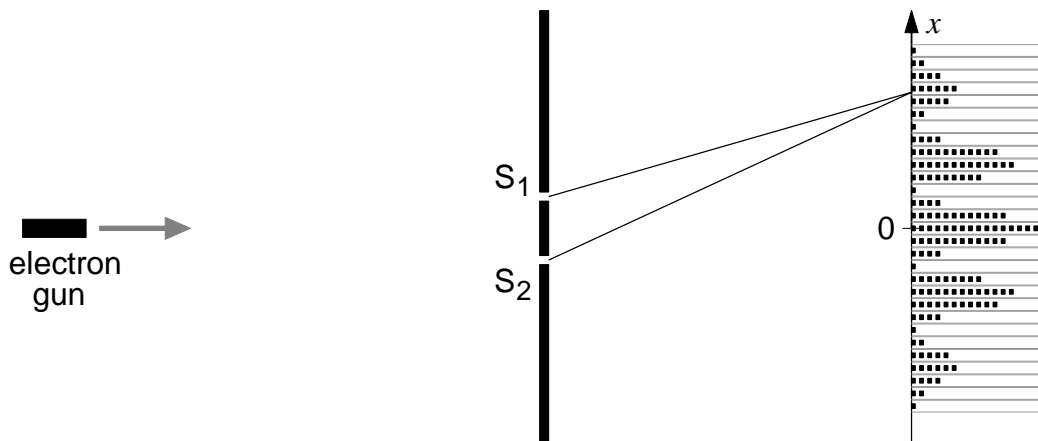


図 2.2: 電子による二重スリットの実験

この実験は、極端に弱い電子ビームを用いても行うことができ、結果は同じになる。つまり、一度に1つずつ電子を発射させることを何度も繰り返すと、写真乾板には同じような干渉じまが生じ、計数管の場合も同様である。すなわち、複数の電子がスリットを通ることによって干渉じまができるのではなく、1つ1つの電子がスリットを通ることによって干渉じまができるのである。また、計数管で測定するとき、弱い電子ビームを用いると、1つの電子が計数管に到達するたびに、どれかの計数管に電子が「ポツリ」と計測され、これを多数回繰り返すと「ポツリ」「ポツリ」と計数が蓄積されていき、その結果として図 2.2 に示すような計数のパターンが形成されるのである。

それでは、電子は、2つのスリットのうち、どちらを通過しているのだろうか。たとえば、下のスリット S_2 を閉じてしまえば、電子が通過するのは上のスリット S_1 であることは間違いない。しかし、2つのスリット的一方と閉じると、計数管に計数される数のパターンは2つのスリットの場合とは異なる（下に示す例を参照）。つまり、多数の電子が図 2.2 に示すような計数のパターンをつくる時、電子がどちらのスリットを通過したのかはわからない。というより、「どちらのスリットを通過したか」と問う意味がないのである。1つの電子が一方のスリットを通過し、他のスリットは通らなかったと考えるのは、古典的な粒子の性質をミクロな世界の電子に不当に拡張しているのである。

2.2 量子状態

量子状態

前節で見たように、ミクロな世界では、粒子（電子）の運動は古典力学の類推が成り立たない。古典力学では、1つの粒子の状態は、その位置と速度（または、位置と運動量）で表される。また、運動方程式は粒子に作用する力によって粒子の運動に生じる加速度を与え、これによって粒子の速度が、そして粒子の位置が求められる。しかし、電子の状態は、そのように表すことはできない。二重スリットの実験事実からもわかるように、電子が電子銃から放出されてから、スリットを通過して計数管で計測されるまで、その途中の連続的経路を問うことはできない。途中の経路を知ろうとすれば、電子に絶えず光を当てて電子の位置を確認することになる。しかし、光を当てることによって、電子は光と衝突して電子の状態は乱され、計数管に観測される結果は、光を当てない場合とは異なってしまう。光を当てない場合は、途中の経路を知ることができず、計数管で観測される計数は、確率的なものである。電子銃から発射されスリットを通過した電子は計数管のいずれかに入るが、どの位置の計数管に入る確率がどのくらいかということが問えるだけである。つまり、

古典力学では、粒子の位置はここである

という代わりに、

量子力学では、粒子の位置を決める測定をすると、
粒子がここに見出される確率はこれだけである

ということになる。このような古典力学と量子力学の違いは、位置だけでなく、運動量についても、エネルギーについても同様なことが言える。そこで、古典力学における状態と明確に区別するために量子力学における状態を 量子状態 と呼ぶことにする。

量子状態の決定と物理現象の連続性

量子状態の決定には、次に要約する物理現象の連続性が背景にある。

1つの粒子のある物理量（たとえば、位置、運動量など）を測定する実験を実行してある値（不確定さを含んでもよい）を得たとき、その直後、すなわち、無限に短い時間の後、再び同じ物理量を測定する実験を行うと、等しい値が（等しい不確定さを含んで）得られる。これを 物理現象の連続性（physical continuity）と呼ぶ。

たとえば、電子の位置を測定する実験を行ったところ、 $x = 1.0 \pm 0.1 \text{ nm}$ のところに電子が見出されたとする。 $\pm 0.1 \text{ nm}$ は位置の不確定さである。この測定によって電子は光子によって跳ね飛ばされるとしても、無限に短い時間の後、もう一度位置を決定する実験を行うと、電子は $x = 1.0 \pm 0.1 \text{ nm}$ のところに見出されるはずである。すなわち、一回目の測定によって、その電子は、「位置の測定をもう一度行うと、 $x = 1.0 \pm 0.1 \text{ nm}$ の範囲に見出される量子状態にある」ということができる。他の物理量についても同様であり、1つの水素原子のエネルギーを測定したところ $E = -13.6 \text{ eV}$ であることが見出された直後には、こ

の水素原子は、「エネルギーの測定を行うと、 $E = -13.6 \text{ eV}$ が見出される量子状態にある」ということができる。量子状態の決定は、このような意味であるが、いつもこのような言い方をしたのでは長いので、「水素原子は $E = -13.6 \text{ eV}$ のエネルギーをもつ」という言い方をすることが多い。

以上は、量子状態の決定に、ある測定を行った直後の状態を用いたが、次に述べるような別の決め方もある。

量子状態の準備

図 2.3 に示すように、幅が d のスリットに電子銃から撃ち出された電子を当て、スリットの後方に計数管を並べる。このとき、スリットを通過する1つの電子の量子状態を考える。スリットを通過した直後、スリットに平行な y 軸方向の電子の位置は、スリットの幅 d の

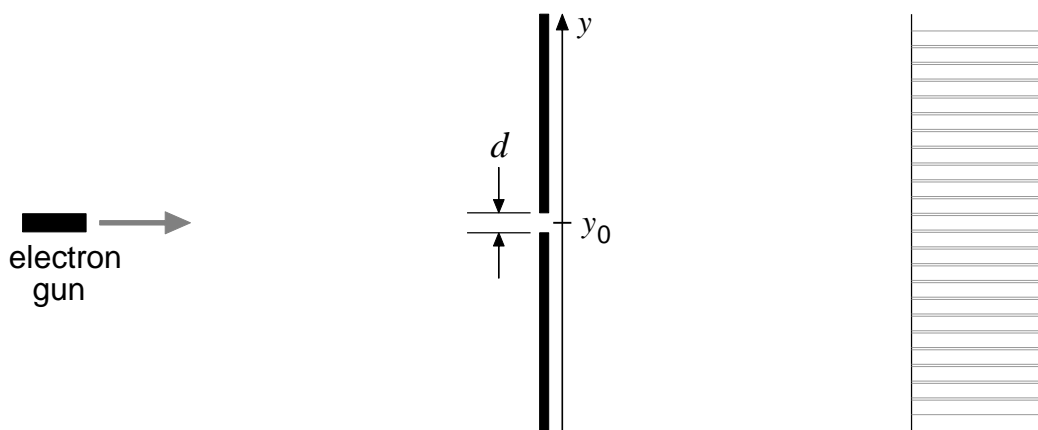


図 2.3: 量子状態の準備

範囲で決定される。すなわち、スリットの中央の y 座標を $y = y_0$ とすれば、スリットを通過した直後の電子の位置は

$$y = y_0 \pm \frac{d}{2}$$

の範囲に決められる。つまり、スリットが電子の位置 (y 座標) を決める実験の代わりになっている。このよう意味で、実験によって量子状態を決定するというよりは、 y 座標が $y = y_0 \pm d/2$ である電子の量子状態を準備する というほうが適切である。

粒子がある状態にあるとは、粒子の物理量が実験によって測定されたのと同時に、その後から見れば、その状態に準備されたことになる。

なお、図 2.3 において、スリットを通過した電子がどの計数管に飛び込むかを測定すれば、その計数管がスリットから見てどの方向にあるかを知ることによって、電子がスリットを通過した直後の電子の運動量を知ることになる。このことから、次節に示すように、電子の位置と運動量の不確定性について議論できる。

2.3 不確定性関係

2.3.1 位置と運動量の不確定性

図 2.3 に示したのはスリットによる，スリットに平行な y 軸方向の位置の決定である。電子はスリットを通過したのであるから，電子の y 軸方向の位置は $y = y_0$ を中心として

$$\Delta y = d \quad (2.3)$$

の不確定さがある量子状態にあると考えられる。電子の運動量の大きさは $p = h/\lambda$ である

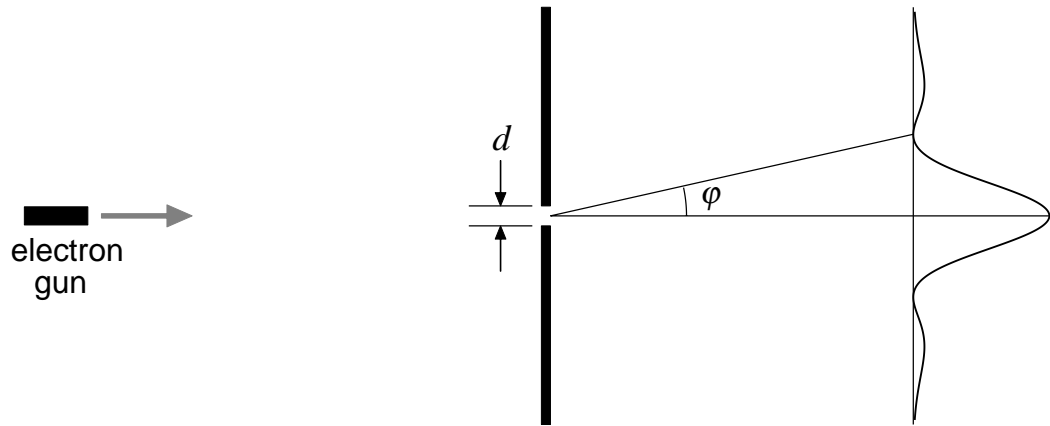


図 2.4: 運動量の不確定性

から，スリットを通過した電子が，スリットの中央からみて，スリットの法線と φ の角度の方向にある計数管に入ったとすると，スリットを通過した直後の運動量の y 方向成分は次の式で与えられる：

$$p_y = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi. \quad (2.4)$$

ところで，電子が多数並んだ計数管に入ると，波長 λ の光がスリットによって回折し，スクリーン上につくる明暗のしま模様と同じである。明線の部分は確率が高く，暗線の部分は確率が低い。単一スリットによる回折では，中央が明るく，第一の暗線は

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{d} \quad (2.5)$$

を満たす角 φ の方向にできる。この暗線より外側にも明るい部分ができるが，確率としては第一の暗線の間に入る確率がほとんどである。従って，スリットの幅が d であるとき，電子の運動量の y 軸方向の不確定さは

$$\Delta p_y \gtrsim \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \quad (2.6)$$

である。よって、 y 軸方向の位置の不確定さとの積は次のようになる：

$$\Delta y \Delta p_y \gtrsim h. \quad (2.7)$$

スリットの幅 d を狭くすると位置の不確定性 Δy は小さくなるが、運動量の不確定性 Δp_y は大きくなる。両者を同時に小さくすることはできない。この関係式 (2.7) を 不確定性関係 (uncertainty relation) と呼び、また、不確定性関係が成り立つことを 不確定性原理 (uncertainty principle) と呼ぶ。

2.3.2 ハイゼンベルクの思考実験

ハイゼンベルク (W. Heisenberg) が不確定性関係の説明に用いた思考実験について説明する。図 2.5 に示すように、電子に光を当てて、電子によって散乱された光を顕微鏡で観測する。顕微鏡の接眼レンズのすぐ後ろに小さな計数管を並べておき、顕微鏡の対物レンズに入り接眼レンズを通った光を計測する。

接眼レンズの後方に並んだ計数管のうち、中央の計数管 C で光が計測されたとする。しかし、これは、電子の位置 O からの光が幾何光学に従ってレンズ系を通して計数管 C に達したというわけではない。それは、レンズ系を通る光が回折により、ある大きさをもった回折像が計数管の領域にできるからであり、O から出た光が中央の計数管 C に入ることもあり、近くの別の計数管に入ることもある。また、点 O の近くから出た光が計数管 C に入ることもある。つまり、計数管 C に光が入った場合、回折の理論により、電子の位置は O の付近で、

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \theta} \quad (2.8)$$

程度の不確かさで位置が決められたと考えられる。すなわち、電子は位置の不確かさが Δx である量子状態にあると言える。

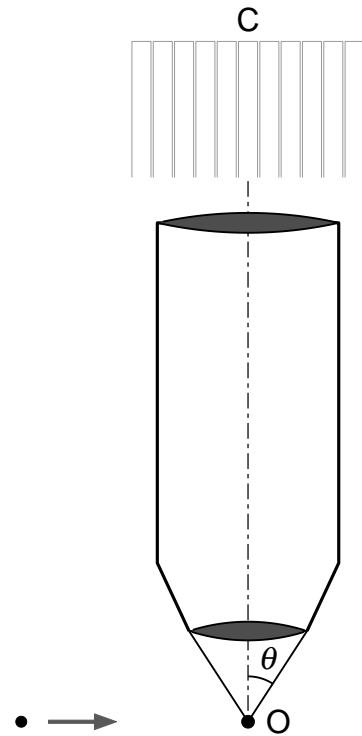


図 2.5: ハイゼンベルクの思考実験

図 2.5 の量子状態にある電子の運動量を考える。運動量の測定には、点 O を中心に大きな半径の球面上に計数管を並べ、どの方向の計数管に入るか、また、位置の測定からその計数管に光が入るまでに要した時間を測ればよい。電子によって散乱された光 (光子) が計数管 C に入ったとすると、レンズ系の軸 (図中の一点鎖線) を中心として O から $\pm\theta$ の範囲の方向に光子は散乱されたことになる。光 (光子) のもつ運動量は $p = h/\lambda$ であるから、散乱されるとき x 軸方向 (図中の水平方向) の運動量には

$$\pm \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

だけの不確定さがある。すなわち、運動量の保存より、電子の運動量も

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \theta \quad (2.9)$$

だけの不確定さがあることになる。位置の不確定性 (2.8) と運動量の不確定性 (2.9) より、不確定性関係が得られる：

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h. \quad (2.10)$$

電子の位置の不確定さを小さくするには、(2.8) より、光の波長を短くすればよい。可視光であれば $\lambda \sim 5 \times 10^{-7} \text{ m}$ であるが、その代わりにガンマ線を使えば $\lambda \sim 10^{-10} \text{ m}$ 程度の不確定さで位置が測定できる。しかし、光子の運動量は波長に反比例して大きくなるので、光との散乱によって電子の運動量を測定すると、(2.9) より、運動量の不確定性は大きくなる。両方の不確定さの積 (2.10) は測定に用いる顕微鏡の構造に係わるパラメータを含まず、また、電子の質量も含まない。従って、不確定性関係 (2.10) は位置と運動量の不確定性を表す関係として一般的であり、電子に限らず、一般の粒子に対しても成立する。

スリットを用いる場合でも、顕微鏡を用いるハイゼンベルクの思考実験の場合でも、観測が対象 (電子) の状態に影響を及ぼすことが重要である。影響を無視できるマクロの世界 (古典論) では、位置と運動量を同時に精確に測定することが可能であるが、観測が影響を及ぼすミクロの世界 (量子論) では、両者を同時に精確に測定することはできず、不確定性関係が成り立つ。

2.3.3 時間とエネルギーの不確定性関係

粒子の運動を考えることによって、時間とエネルギーについての不確定性を考える。いま、図 2.6 に示すように、質量が m の粒子が x 軸上を原点 O から点 A に向かって運動している。この粒子を運動させるとき、速度の不確定さはなく、その速度 (群速度) を v であるとする。よって、運動量の不確定さが無い。

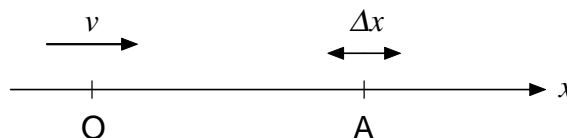


図 2.6: 時間とエネルギーの不確定性関係

粒子が点 A を通過するときの、粒子の速度を測定する。そのためには位置と運動量を測定しなければならないので、両者は同時に精確には測定できず、そのときの位置の不確定性を Δx 、運動量の不確定性を Δp とする。粒子が点 A を通過する時刻を決める際には、位置の不確定さを伴い、時刻の不確定さは

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} \quad (2.11)$$

である。一方、エネルギー (ポテンシャルはないと考えるので、運動エネルギーである) は、

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

より，エネルギーの不確定さ ΔE は，運動量の不確定さ Δp で表すと

$$\Delta E = \frac{p}{m} \Delta p \quad (2.12)$$

である。よって，エネルギーの不確定さと時間の不確定さの積は

$$\Delta E \Delta t = \frac{p}{m} \Delta p \cdot \frac{\Delta x}{v} = \frac{p}{mv} \Delta p \Delta x = \Delta p \Delta x$$

となるので，

$$\Delta E \Delta t \gtrsim h \quad (2.13)$$

が得られる。

2.3.4 最小波束

不確定性関係より，位置と運動量は同時に確定することはできない。空間的に局在した波（波束）の場合だけ波の位置について議論できるが，波束が局在するほど波束に含まれる波数は単一ではなくなり，広がりをもつようになる。波数 k と運動量 p は

$$k = \frac{p}{\hbar} \quad (2.14)$$

の関係にある。一般に，波束 $\psi(x)$ は異なる波数をもつ波の重ねあわせとして表すことができる：

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A(k) e^{ikx} dk, \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.15)$$

ここでは結果だけを述べるが，波束がガウス型であるとき，フーリエスペクトルもガウス型であり，

$$\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-ax^2), \quad A(k) = \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \quad (2.16)$$

このとき，位置の不確定性 Δx と運動量の不確定性 Δp_x の積は

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2} \quad (2.17)$$

となる。これが不確定さとして実現しうる最小値であり，このような波束を最小波束という。

2.4 相補性

粒子像と波動像についてのボーアの相補性原理

古典的類推によれば，電子や光子は，あるときは粒子として振る舞い，あるときは波動として振る舞う。これは，電子や光子が粒子的性質と波動的性質を併せもつと言い換えることもできる。一方の性質が明確に認められる実験を行うと他方の性質はあいまいになるが，2つの性質が互いに補い合って，電子，あるいは光子の全容を捕らえることができる。これを相補性原理 (Principle of Complementarity) という。

図 2.7 に示すような，光子によるヤングの実験を考える。極めて弱い光源からの一つ一つの光子を単一スリットがある P_1 に入射させる。光子の運動量を p とする。 P_1 の後方に二重スリットをもつスクリーン P_2 があり，さらに後方にスクリーン P_3 がある。紙面上の左から右へ x 軸を，下から上へ y 軸をとる。

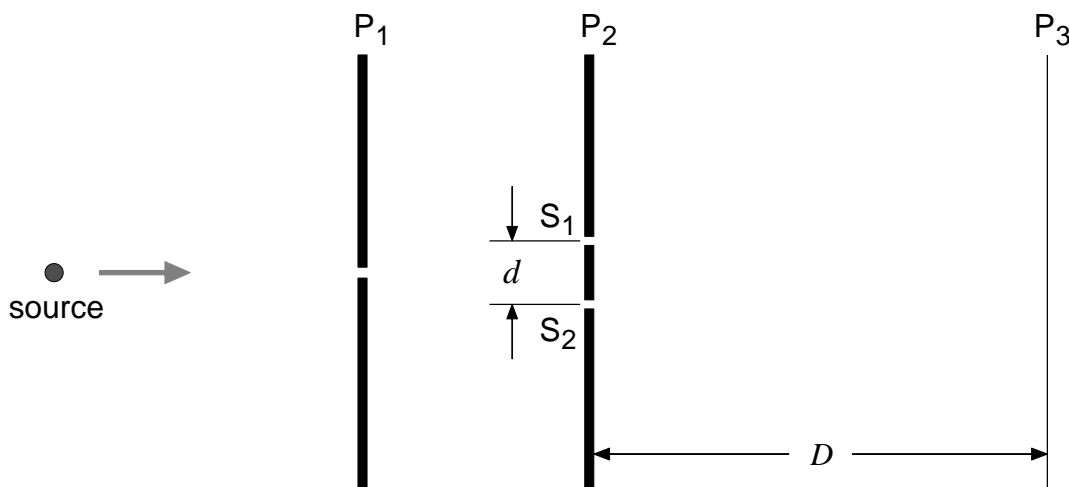


図 2.7: 光子の相補性原理

スクリーン P_2 の2つのスリットの直後に電子の雲をただよわせておき，光子がスリット S_1, S_2 のどちらを通過したかがわかるようにするために，光子が電子を跳ね飛ばしたときの電子の位置が測定できるようにしておく。スリットを通過した直後の光の位置を測定したとき， y 軸方向の不確定性 Δy を伴うとする。

もし， $\Delta y < d/2$ であるならば (d は2つのスリットを隔てる距離)，光は2つのスリット S_1 と S_2 のどちらを通過したか区別できる。すなわち，どちらのスリットを通過したかを測定したことになるので，光子の粒子像が強調されたことになる。光子に跳ね飛ばされた電子の運動量の y 成分を測定すると，その不確定さ Δp_y は，不確定性関係

$$\Delta y \Delta p_y \gtrsim h \quad (2.18)$$

より,

$$\Delta p_y \gtrsim \frac{h}{d/2} \quad (2.19)$$

である。電子の運動量の y 成分に (2.19) で与えられる不確定さ Δp_y があれば, 電子を跳ね飛ばした光子の運動量の y 成分にも Δp_y の不確定さがあるはずである。光子は電子を跳ね飛ばした後, スクリーン P_3 の方へ運動するが, 光子の運動量は p であるので, x 軸に対する角度 φ の不確定さ $\Delta\varphi$ は

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta p_y}{p} \gtrsim \frac{2h}{pd} = \frac{2\lambda}{d} \quad (2.20)$$

となる。ここに, (2.19) と, ド・ブROI波長の関係式 (1.38) を用いた。 $\Delta\varphi$ に二重スリット P_2 からスクリーン P_3 までの距離 D をかけると,

$$P_3 \text{ 上の不確定さ } \gtrsim \frac{2\lambda D}{d}$$

が得られる。これは, 光子がスリットを通過した直後に運動量の不確定さ Δp_y をもっていたことによる, スクリーン P_3 上での不確定さである。ところで, 二重スリットによる干渉じまの明線と暗線の距離は $\lambda D/(2d)$ であるので, 干渉じまは現れないことになる。つまり, 二重スリットのところで, どちらのスリットを通過したかを決定(測定)したことにより, 波動性が壊れたのである。

逆に, 光子の波動性を求めて, スクリーン P_3 上での不確定さが $2\lambda D/d$ より小さくなるようにすると, スリットを通過した直後の運動量の不確定さは $\Delta y > d/2$ となり, 光子が2つのスリット S_1 と S_2 のどちらを通過したのかは区別できない。すなわち, この場合には光子の粒子性は壊れてしまう。