

第 9 章 電弱相互作用の標準模型

ゲージ理論に基づいて、弱い相互作用と電磁相互作用を統一した新しい理論が構築された。ゲージ理論が現在の物理学において重要な地位を占めているのは、繰り込み可能な理論であるからである [1,2]。ゲージ理論は対称性(群)に基づいたゲージ変換に対して理論形式が不変であるという要請によって定式化される。また、その際に導入されるゲージ場が相互作用を媒介する粒子を表し、ゲージ不変性は相互作用の形を自動的に規定する。ここでは、まず、電磁場ポテンシャルのゲージ変換と電磁場と荷電粒子の相互作用の関係を量子力学で示し、その後、ゲージ不変性と対称性の自発的破れ [3-6] に基づいて構築された、電弱相互作用の標準模型 [7-9] について説明する。

9.1 荷電粒子と電磁場の相互作用

9.1.1 電磁場のゲージ変換

非相対論的古典論

電荷 q をもち、速度 v で運動する非相対論的な粒子は、電場 E と磁束密度 B から Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (9.1)$$

を受ける。この力は、古典的な Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (9.2)$$

から、Hamilton 方程式によって導くことができる。 ϕ と A は、それぞれ、電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルである。

非相対論的量子論

量子力学への移行は、エネルギー E と運動量 p を微分演算子に置き換えることによって行われ

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (9.3)$$

電磁場と相互作用する電荷 q をもつ粒子の Schrödinger 方程式は次のように書ける：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\phi \right] \psi(t, \mathbf{x}) \quad (9.4)$$

電磁場のゲージ変換 Schrödinger 方程式 (9.4) の解 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は電磁場のポテンシャルのもとで運動する粒子の状態を完全に記述する。しかし、電磁場のポテンシャルには不定性があり、時間と位置の関数 $\chi(t, \boldsymbol{x})$ を用いたゲージ変換

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \chi \quad (9.5)$$

によって、Maxwell 方程式も、従って、電場 E と磁束密度 B も変わらない。

波動関数の変換 電磁場のゲージ不変性から、直ちに次の問題が生じる。Schrödinger 方程式 (9.4) において、電磁場のポテンシャルのゲージ変換 (9.5) を行ったら、波動関数 ψ も何らかの変更を受ける可能性がある。それを ψ' とすると、Schrödinger 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi'(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\boldsymbol{A}' \right)^2 + q\phi' \right] \psi'(t, \boldsymbol{x}) \quad (9.6)$$

と書ける。問題は、この方程式の解である ψ' が ψ と同じ物理を表しているか否かである。もし、同じ物理を表しているならば、Maxwell 方程式は量子論の世界においても正しいことになる。しかし、違いがあるならば、量子論においては Maxwell 方程式がもつゲージ不変性が破られるので、何らかの修正が必要になる。

2つの Schrödinger 方程式 (9.4), (9.6) が一致するためには、

$$\psi'(t, \boldsymbol{x}) = \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi(t, \boldsymbol{x}) \quad (9.7)$$

を満たさなければならない。 $\chi(t, \boldsymbol{x})$ は電磁場のポテンシャルのゲージ変換 (9.5) に現われるのと同じ関数である。実際、(9.6) の左辺の時間微分の項とスカラーポテンシャルの項を合わせて

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi' \right) \psi' &= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi + q \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \left[\exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi \right] \\ &= -q \frac{\partial \chi}{\partial t} \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi + \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ &\quad - q\phi \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) + q \frac{\partial \chi}{\partial t} \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi \\ &= \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \psi \end{aligned} \quad (9.8)$$

右辺の空間座標の微分においては

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\boldsymbol{A}' \right) \psi' &= \left[\frac{\hbar}{i} \nabla - q\boldsymbol{A} - q(\nabla \chi) \right] \left[\exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi \right] \\ &= q(\nabla \chi) \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi + \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \psi \right) \\ &\quad + \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \left(-\frac{q}{c} \boldsymbol{A} \psi \right) - q(\nabla \chi) \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \psi \\ &= \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\boldsymbol{A} \right) \psi \end{aligned} \quad (9.9)$$

が成り立つ。Schrödinger 方程式 (9.6) は, (9.4) に左から $\exp(iq\chi/\hbar)$ をかけたものに等しい。すなわち, 電磁場のゲージ変換 (9.5) に対して, 波動関数が (9.7) に従って変換するならば, Schrödinger 方程式は不変である。

ψ と ψ' は同じ物理を記述している。たとえば, ψ と ψ' は位相の違いだけであるから, 確率密度 $|\psi|^2$ は同じである。自由粒子の確率の流れの密度は

$$\mathbf{j} = \psi^* (\nabla\psi) - (\nabla\psi^*) \psi \quad (9.10)$$

で定義されるが, 微分演算子を含んでいるので波動関数の変換 (9.7) に対して不変ではない。電磁場と相互作用するときには,

$$\nabla \longrightarrow \mathbf{D} = \nabla - \frac{iq}{\hbar} \mathbf{A} \quad (9.11)$$

と置き換えて,

$$\mathbf{j} = \psi^* (\mathbf{D}\psi) - (\mathbf{D}\psi^*) \psi \quad (9.12)$$

を確率の流れの密度と考えれば, ゲージ変換に対して不変となる。

相対論的量子論

上で導入した置き換えは, 全て相対論に適合している。自由粒子の Schrödinger 方程式から, 微分演算子の置き換え

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A_\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \phi \\ \nabla \longrightarrow \mathbf{D} = \nabla - \frac{iq}{\hbar} \mathbf{A} \end{array} \right. \quad (9.13)$$

によって, 電磁場のもとで運動する粒子の Schrödinger 方程式が得られる。 D_μ は共変微分と呼ばれ, 置き換え (9.13) は基本的に重要な役割を果たす。また, 電磁場のポテンシャルに対するゲージ変換 (9.5) は相対論的な 4 元ベクトルの変換

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \end{array} \right. \quad (9.14)$$

として表せる。従って, 相対論的な Dirac 方程式の場合も, 非相対論的な Schrödinger 方程式と同様にゲージ変換に対する不変性が保たれる。自由粒子の Dirac 方程式

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0 \quad (9.15)$$

において, 微分演算子 ∂_μ を共変微分で置き換えると, 電磁場のポテンシャルのもとで運動する Dirac 粒子の方程式

$$\left[i\hbar \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A_\mu \right) - mc \right] \psi = 0 \quad (9.16)$$

が得られる．ここで，電磁場のポテンシャルに対するゲージ変換 (9.14) と同時に波動関数 (4成分スピノール) の変換

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp\left(\frac{iq}{\hbar}\chi\right)\psi \quad (9.17)$$

をして得られる方程式

$$\left[i\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A'_\mu \right) - mc \right] \psi' = 0 \quad (9.18)$$

は Dirac 方程式 (9.16) を同じ方程式である．これは，(9.8), (9.9) と同様の計算で確かめられる．

9.1.2 ゲージ原理

前の subsection では，電磁場の作用を受けて運動する荷電粒子の Schrödinger 方程式が既知であるとして，波動関数の位相変換を行うと，電磁場のポテンシャルのゲージ変換のもとで Schrödinger 方程式が不変であることを確かめた．

ここでは，議論を逆転して，波動関数の位相変換に対して方程式が不変であることを要請する．Schrödinger 方程式は時間及び空間座標の微分を含んでいるので，自由粒子の Schrödinger 方程式が不変でないことは明らかである．不変性の要請は，相互作用する粒子の方程式を必要とする．波動関数の変換

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp\left(i\alpha(t, \mathbf{x})\right)\psi \quad (9.19)$$

を考えると，上の議論からわかるように，微分演算子 ∂_μ を共変微分 D_μ による置き換え

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar} A_\mu \quad (9.20)$$

によって得られる方程式は， A_μ のゲージ変換

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha \quad (9.21)$$

のもとで不変である．ここで， A_μ は電磁場の4元ポテンシャルであり， q を電荷であると考えられる．すなわち，波動関数の変換に対する方程式の不変性の要請から，電磁場のポテンシャルのもとで運動する荷電粒子の方程式が導かれ，電磁場のポテンシャルのゲージ変換の対して方程式は不変である．不変性の要請から導入される A_μ をゲージ場といい，不変性の要請から相互作用を規定する原理をゲージ原理という．

9.2 対称性とゲージ変換

9.2.1 Lagrangian 密度

ゲージ理論は場の量子論に基づいている。物理系を表すのに、系のすべての情報を含んでいる Lagrangian 密度が用いられる。物理系に関係する場の演算子を ψ_1, \dots, ψ_n とすると、Lagrangian 密度は場 ψ_1, \dots, ψ_n と場の 1 階微分 $\partial_\mu \psi_1, \dots, \partial_\mu \psi_n$ の多項式で表される：

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\psi_i(x), \partial_\mu \psi_i(x)) \quad (9.22)$$

Lagrangian 密度を空間部分について積分して Lagrange 関数が得られ

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\psi_i(x), \partial_\mu \psi_i(x)) \quad (9.23)$$

粒子 ψ_i の運動方程式は、古典力学と同様に、Hamilton の原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = 0 \quad (9.24)$$

に従って Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} \right] = 0 \quad (9.25)$$

として求められる。たとえば、質量 m のフェルミオンが 1 つだけあるときの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi \quad (9.26)$$

と書くことができ、Euler 方程式によって Dirac 方程式（運動方程式）

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 \quad (9.27)$$

が得られる。

9.2.2 大域的不变性と保存量

質量 m の自由なフェルミオン（たとえば、電子）を例にとって、大域的（global）ゲージ変換に対する不变性を考える。Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (9.28)$$

である。このとき、フェルミオンの場 $\psi(x)$ に対して次のゲージ変換を施す

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \exp(-iq\beta)\psi(x) \quad (9.29)$$

ここで, q は粒子の電荷, β は時間 t にも位置 x にも依存しない定数であるとする. $e^{-iq\beta}$ は γ 行列や微分演算子と可換であり, 変換によって得られる $\psi'(x)$ は明らかに $\psi(x)$ と同じ Dirac 方程式を満足し, また, Dirac 方程式と同様に Lagrangian 密度も不変である:

$$\mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}'(x) = i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) - m\bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \mathcal{L}(x) \quad (9.30)$$

この性質は, ゲージ変換が単に定数をかける場合には常に成り立つが, (9.29) に粒子の電荷 q を用いたことの意味は, 下の議論で明らかになる.

Noether の定理 [10] によると

Lagrangian 密度がゲージ変換に対して大域的不変性を持つとき,
時間と共に変化しない保存量 (観測量) が常に存在する.

ゲージ変換によってフェルミオンの場 ψ が $\delta\psi$ だけ変化したとき, Lagrangian 密度が $\delta\mathcal{L}$ の変化をしたとする:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = \psi(x) + \delta\psi(x) \\ \mathcal{L}(x) &\longrightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Lagrangian 密度の変化 $\delta\mathcal{L}$ は Euler 方程式と $\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu(\delta\psi)$ を用いて

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\psi(x)}\delta\psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\psi(x))}\partial_\mu(\delta\psi(x)) = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\psi(x))}\delta\psi(x)\right] \quad (9.32)$$

となる. Noether の定理は (9.32) の右辺が 0 になることを意味している. ここで, ゲージ変換 (9.29) で β が小さいとして $e^{-iq\beta}$ を展開して β の 1 次の項までとり

$$\delta\psi(x) = -iq\beta\psi(x) \quad (9.33)$$

さらに, Lagrangian 密度の式 (9.28) を代入すると

$$\delta\mathcal{L}(x) = \beta\partial_\mu\left[q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\right] = 0 \quad (9.34)$$

が得られる. この式は, まさに, フェルミオンの場 $\psi(x)$ による電流密度の保存

$$\partial^\mu j_{\text{em}\mu}(x) = 0 : \quad j_{\text{em}\mu}(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \quad (9.35)$$

を表している. CVC の議論で見たように, 電流密度の保存は電荷の保存を意味している. このように, 電荷 q を用いたゲージ変換 (9.29) に対する大域的不変性は, 電荷の保存と密接に関係している. 上の議論は 1 つのフェルミオンの場合であるが, 複数の粒子から成る系にも同様に適用できる.

9.2.3 局所的不変性：U(1)

ゲージ変換

フェルミオンの場 $\psi(x)$ に対する局所的 (local) ゲージ変換 を考える：

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \exp(-iq\alpha(x))\psi(x) \quad (9.36)$$

ここで $\alpha(x)$ は $x = (t, \mathbf{x})$ の関数であり，時空の異なる点で異なる値をとり得る．これは位相の変換であり，1次元 unitary 変換 U(1) に分類される．このゲージ変換によって得られる $\psi'(x)$ は自由粒子の Dirac 方程式を満たさない．実際， $\psi'(x)$ を Dirac 方程式に代入すると

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi'(x) = q(\partial_\mu \alpha(x))\gamma^\mu \psi'(x) \neq 0 \quad (9.37)$$

となり，ゲージ関数の微分が残ってしまう．そこで，ゲージ場 A_μ を導入し，微分の置き換えをする

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (9.38)$$

このとき，フェルミオンの場 $\psi(x)$ は，場 A_μ のもとで運動する場合の運動方程式を満たす：

$$[i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu(x)) - m]\psi(x) = 0 \quad (9.39)$$

場の変換 (9.36) に対して，ゲージ場が

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (9.40)$$

によって変換すると仮定すると，方程式 (9.39) は不変である．

Lagrangian 密度

Lagrangian 密度は次のように表せる：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (9.41)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (9.42)$$

新しい場 A_μ を導入したので， A_μ の運動エネルギーを表す項を (9.41) の最後に付け加えた． $F_{\mu\nu}$ のゲージ不変性は容易に確かめられる：

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \quad (9.43)$$

場 A_μ に対応した粒子が質量を持つならば，上の Lagrangian 密度に 質量項

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} M^2 A^\mu A_\mu \quad (9.44)$$

を付け加えなければならない．しかし，この項はゲージ不変ではない．すなわち，ゲージ不変性の要請はゲージ場の質量が 0 であることを意味している．

このように，局所的 U(1) ゲージ不変性の要請は，場 A_μ が関与する共変微分 (9.38) を導入し，相互作用の形を決定する．すなわち，フェルミオンの場 $\psi(x)$ に対するゲージ変換 (9.36) と同時に，それに応じた場 A_μ のゲージ変換 (9.40) を規定している．また，相互作用を媒介する，質量が 0 である場を予言している．

9.2.4 局所的不变性：SU(2)

SU(2) 2重項

U(1) ゲージ変換はフェルミオンの種類が変化しない相互作用を規定する．弱い相互作用においては，常に2種類のフェルミオンが対になって関与する．たとえば，ベータ崩壊のレプトンカレントではニュートリノが電子に変わり ($\nu_e \rightarrow e$)，ニュートリノと電子が対になっている．このように対になった粒子の変化を記述するには SU(2) が最適である．ニュートリノと電子は SU(2) の2重項

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

として扱われる．SU(2) は行列式が1の 2×2 の unitary 行列 (2次元表現) として表される群である．SU(2) の2行2列の任意の行列は，3つの実パラメータ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と，Pauli 行列 $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ を用いて表すことができる：

$$\alpha \cdot \sigma = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.46)$$

$\frac{1}{2}\sigma$ は SU(2) の生成子である．このような行列はニュートリノの場 ψ_{ν_e} と電子の場 ψ_e の混合を引き起こす

$$\alpha \cdot \sigma \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - i\alpha_2)\psi_e + \alpha_3\psi_{\nu_e} \\ (\alpha_1 + i\alpha_2)\psi_{\nu_e} - \alpha_3\psi_e \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

ゲージ不变性が成り立つためには，ニュートリノと電子の質量が等しいとしなければならない (問題点1)．

ゲージ変換

U(1) ゲージ変換 (9.36) と同様に，SU(2) のゲージ変換

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu_e} \\ \psi'_e \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha(x) \cdot \sigma\right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

を考える．ここで， α は $x = (t, \mathbf{x})$ に依存する．フェルミオン対の運動方程式には，粒子対の場の微分しか現れないので，恒等変換の近傍の微小変換を考えれば良い．すなわち， α が小さいとして，ゲージ変換を1次の項までとる：

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu_e} \\ \psi'_e \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{i}{2}\alpha(x) \cdot \sigma\right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad (9.49)$$

このゲージ変換に対して相互作用のない Dirac 方程式は不変ではなく，ゲージ関数の微分項が残る：

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \begin{pmatrix} \psi'_{\nu_e} \\ \psi'_e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\gamma^\mu (\partial_\mu \alpha(x)) \cdot \sigma \begin{pmatrix} \psi'_{\nu_e} \\ \psi'_e \end{pmatrix} \neq 0 \quad (9.50)$$

ゲージ変換の位相の微分に対応した場 W_μ を導入し，共変微分による置き換えをする：

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (9.51)$$

ここで，定数（結合パラメータ） g を導入した．また，3つのパラメータ（3つの生成子）に対応して，3つの場 W^1, W^2, W^3 を導入した． W_μ のゲージ変換を

$$W_\mu^i(x) \longrightarrow W_\mu'^i(x) = W_\mu^i(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha_i(x) - \sum_{jk} \epsilon_{ijk} W_\mu^j(x) \alpha_k(x) \quad (9.52)$$

とすると，ゲージ場 W_μ と相互作用するフェルミオン対の運動方程式

$$\left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) - m \right] \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} = 0 \quad (9.53)$$

は不変である．

W_μ のゲージ変換 (9.52) が A_μ の変換と異なり，右辺の第3項が必要なのは，SU(2) の生成子である σ^i が互いに可換でない

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma^k \quad (9.54)$$

からである（Pauli 行列の交換関係）．実際，(9.49) の変換 $U(\boldsymbol{\alpha}) = 1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ に対してゲージ理論の処方に従って具体的に計算してみると， $\boldsymbol{\alpha}(x)$ を微量量として

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} &\longrightarrow U \frac{1}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \frac{1}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \\ &\quad + \frac{i}{g} \left(-\frac{i}{2} \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{4} \sum_{ij} \alpha^i(x) W_\mu^j (\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i) + \frac{1}{2g} \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{W}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \alpha^i(x) W_\mu^j(x) \sigma^k + \frac{1}{2g} \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (9.55) \end{aligned}$$

となる． ϵ_{ijk} が完全反対称であることに注意して， W_μ^i の変換が (9.52) で与えられることがわかる．

Lagrangian 密度

ゲージ変換 (9.49) と (9.52) のもとで不変な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = (\bar{\psi}_{\nu_e}, \bar{\psi}_e) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}$$

$$-\frac{g}{2} (\bar{\psi}_{\nu_e}, \bar{\psi}_e) \gamma^\mu \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} \quad (9.56)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial^\mu W_\nu^i - \partial^\nu W_\mu^i + g \sum_{jk} \epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (9.57)$$

である．この Lagrangian 密度から Euler 方程式によって導かれるフェルミオン対の運動方程式は，ゲージ変換 (9.49) と (9.52) のもとで不変である．Lagrangian 密度にはゲージ場の質量項が含まれていない．質量項はゲージ不変性を破る．すなわち，ゲージ不変性の要請は， A_μ と同様に， W_μ に対しても，その質量が 0 であることを要求する（問題点 2）．新たに導入された場 W_μ は Lorentz 変換のもとでベクトル（スピン 1）として振る舞う．

問題点

局所的 SU(2) ゲージ変換に対する不変性の要請から W ボソンが導入されるが，それによって媒介される相互作用は幾つかの点で現実の弱い相互作用とは異なっている．

- 第 1 に，フェルミオン対に対するゲージ変換が異なる粒子の場を混合させることから，ゲージ変換不変性は対になるフェルミオン（上の議論ではニュートリノと電子）に対して，質量が等しいなどの，明らかに現実とは異なる対称性を要求する．
- 第 2 に，ゲージ変換不変性はゲージボソンが質量を持たないことを要請する．これは相互作用が無限遠方まではたらくことを意味する．一方，点状相互作用を仮定した古典論が低エネルギー領域で数々の成功を収めたことからわかるように，現実の弱い相互作用の到達距離は短く，媒介するボソンの質量は極めて大きいと思われる．
- 第 3 に，上で導出された相互作用はベクトル型 ($\bar{\psi} \gamma^\mu W_\mu \psi$) でありパリティを保存する．現実の弱い相互作用の流れは左巻きであり，ベクトル型と軸性ベクトル型が寄与してパリティを破っている．

第 3 の点に関しては，ゲージ変換 (9.49) に左巻き成分の射影演算子を含めることによって解決できるであろう

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu_e} \\ \psi'_e \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} \quad (9.58)$$

しかし，この変換に対して運動方程式 (9.53) は不変ではなくなる．それは，質量 m が左巻きの性質を保存しないからである．

9.3 Glashow-Weinberg-Salam 理論

9.3.1 電弱ゲージ変換

電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ不変性で、弱い相互作用は $SU(2)$ ゲージ不変性で定式化できるようにみえる。しかし、それぞれ独立したゲージ理論と考えて $SU(2)_{\text{weak}} \otimes U(1)_{\text{EM}}$ とすると、現実と合わない性質が現れる。Glashow-Weinberg-Salam の理論は、電磁相互作用と弱い相互作用を 1 つのゲージ理論の異なる成分として表す。この理論は直積

$$SU(2)_L \otimes U(1) \quad (9.59)$$

のゲージ変換に基づいている。ただし、 $SU(2)$ が弱い相互作用に、 $U(1)$ が電磁相互作用に対応すると区別されるわけではない。 $SU(2)$ と $U(1)$ の対称性が自発的に破れ、その結果、 $SU(2) \otimes U(1)$ の、破れのない部分群 $U(1)$ が電磁相互作用になる。また、 $SU(2)_L$ と L の添字を付けたが、これは $SU(2)$ が主として左巻き成分に作用するからであり、数学的な意味は何もない。

$SU(2)_L \otimes U(1)$ ゲージ変換

弱い相互作用の荷電カレントは左巻きであり、また、ニュートリノは左巻きだけで右巻きニュートリノは存在しない。従って、左巻き成分と右巻き成分に対して異なるゲージ変換を考える必要がある（前ページの問題点 3 を解決する）。そこで、電子と（電子）ニュートリノの左巻き成分を $SU(2)$ の 2 重項、電子の右巻き成分を $SU(2)$ の 1 重項と考える。簡単のために、左巻き成分からなる 2 重項を L 、右巻き成分からなる 1 重項を e_R と表し

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_{\nu_e} \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_e \end{pmatrix}, \quad e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_e \quad (9.60)$$

次の局所的ゲージ変換を考える：

$$\begin{aligned} SU(2) \quad L &\longrightarrow L' = \exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) L \\ e_R &\longrightarrow e'_R = e_R \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$\begin{aligned} U(1) \quad L &\longrightarrow L' = \exp\left(-\frac{i}{2}\beta(x)Y\right) L \\ e_R &\longrightarrow e'_R = \exp\left(-\frac{i}{2}\beta(x)Y\right) e_R \end{aligned} \quad (9.62)$$

このとき、直積 $SU(2)_L \otimes U(1)$ の微小ゲージ変換は次のようになる：

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow L' = \left(1 - \frac{i}{2}\beta Y - \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) L \\ e_R &\longrightarrow e'_R = \left(1 - \frac{i}{2}\beta Y\right) e_R \end{aligned} \quad (9.63)$$

Y は $U(1)$ Lie 代数の生成子であり **weak hypercharge** と呼ばれる． $\frac{1}{2}\sigma^i$ ($i = 1, 2, 3$) は $SU(2)$ の生成子 T^i ($i = 1, 2, 3$) の 2次元表現 (Pauli 行列) である．Weak hypercharge は，電荷の演算子 Q と，**weak isospin** と呼ばれる T^3 と次のような関係にある：

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (9.64)$$

この式は強い相互作用で用いられる hypercharge, isospin と電荷の関係式 [11,12] と同じ形をしている．

L と e_R の weak hypercharge は，電荷 Q と weak isospin T^3 による変換から，(9.64) によって求められる．左巻き成分 L に電荷の演算子 Q を作用させると，ニュートリノの電荷は 0 で電子の電荷は (素電荷を単位にして) -1 であるから，

$$Q \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} \quad (9.65)$$

weak isospin を作用させると

$$T^3 \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_L \\ -e_L \end{pmatrix} \quad (9.66)$$

となる．従って，左巻成分の 2 重項の weak hypercharge $Y = 2(Q - T^3)$ は

$$Y \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_L \\ -e_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (9.67)$$

となるので，2 重項は Y の固有状態で，固有値は $Y(L) = -1$ であることがわかる．一方，右巻き成分 e_R に関しては

$$Q e_R = -e_R, \quad T^3 e_R = 0 \quad (9.68)$$

である (e_R は $SU(2)$ の 1 重項であるから， T^3 を作用させると 0 になる) ので $Y(e_R) = -2$ である．

ゲージ場

$U(1)$ と $SU(2)$ 変換に対応してゲージ場 B_μ と W_μ を導入する．共変微分の置き換えは，2 重項と 1 重項に対して，それぞれ，

$$\begin{aligned} L: \quad \partial_\mu &\longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ e_R: \quad \partial_\mu &\longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y \end{aligned} \quad (9.69)$$

である (L の場合は $Y = -1$ ， e_R の場合は $Y = -2$ であるが，演算子を残したまま示しておく)．ゲージ場とフェルミオンとの結合定数をそれぞれ g' と g として，2 つのパラメー

タを導入した．ゲージ場は (9.40) と (9.52) と同様に，

$$B_\mu \longrightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta \quad (9.70)$$

$$\mathbf{W}_\mu \longrightarrow \mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{W}_\mu \times \boldsymbol{\alpha} \quad (9.71)$$

と変換するものとする．フェルミオンとゲージ場の Lagrangian 密度

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) L \\ & + i\bar{e}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y \right) e_R \\ & - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9.72)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (9.73)$$

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (9.74)$$

はゲージ不変になる．

フェルミオンの運動方程式は Lagrangian 密度 (9.72) から Euler 方程式によって得られる：

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) L &= 0 \\ i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y \right) e_R &= 0 \end{aligned} \quad (9.75)$$

これは質量が 0 のフェルミオンの運動方程式である．また，ゲージ場 B_μ , \mathbf{W}_μ の質量も 0 である．Lagrangian 密度に質量項を加えるとゲージ不変性が破れてしまう．

9.3.2 Higgs 機構

電磁相互作用及び弱い相互作用に対応したゲージ変換不変性は，ゲージ場が表す粒子(ゲージボソン)が厳密に 0 の質量を持つことを要求する．ゲージ理論を現実に合った理論にするため「自発的対称性の破れ」という考え方が導入された．物理系を表す Lagrangian 密度はゲージ不変であるが「真空」がゲージ不変ではないという考え方である．この考え方を具体化するのが Higgs 場(スカラー場)であり，真空は Higgs 場の期待値が 0 ではなく，有限な値を持つ状態であるとする．ゲージボソンの運動方程式は Higgs 場との相互作用により修正され，ゲージボソンが有限な質量を持っているかのような形式に書き直される．ただし，現在のところ，Higgs 場の存在を示す直接的な実験事実はない．ここでは，ゲージ不変性を満たしながら，質量 0 のゲージ場の幾つかを質量のある粒子の場にかえる Higgs 機構について述べる [13,14]．

複素スカラー 2 重項

Glashow-Weinberg-Salam 理論では 1 組の複素スカラー場 ϕ^+ , ϕ^0 を導入する:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

ϕ^+ の電荷は $Q = 1$ で ϕ^0 の電荷は $Q = 0$ である. 複素スカラー場に電荷の演算子, 及び T^3 を作用させると

$$Q \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ -\phi^0 \end{pmatrix} \quad (9.77)$$

となる. すなわち, ϕ^+ と ϕ^0 は $SU(2)$ の 2 重項をなし, weak hypercharge は $Y = 1$ である. 従って, 1 組の複素スカラー場はレプトンの 2 重項と同様のゲージ変換を受け, 共変微分は $Y = 1$ として

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu + \frac{ig}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \phi \quad (9.78)$$

である.

Lagrangian 密度

ゲージ場に複素スカラー場を加えた Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (9.79)$$

と書ける. 第 3 項は複素スカラー場の運動エネルギー項で, 第 4 項がポテンシャル項である. ポテンシャル $V(\phi)$ は繰り込み可能であることから ϕ のたかだか 4 次の関数であり, 一般的に次の形で表される:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (9.80)$$

このとき, Lagrangian 密度 (9.79) は $SU(2) \otimes U(1)$ ゲージ変換に対して不変である. μ^2 と λ は行列で表すべきであるが, (9.84) に示すように, 1 つの Hermite 場だけが有限な期待値をもつ真空に対しては, ポテンシャルの 2 階微分 (質量行列) は対角になり, その上, 真空期待値をもつ 1 つの場に対応した係数だけが意味を持つ. そのため, これらの量を定数としても何ら不都合は生じない.

Higgs 機構を考えるには, 複素スカラー場を Hermite スカラー場に分解すると便利である

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R^+ + i\phi_I^+ \\ \phi_R^0 + i\phi_I^0 \end{pmatrix} \quad (9.81)$$

後で見るように, 4 個の Hermite スカラー場のうちの 3 個の自由度が, 弱い相互作用を媒介する 3 つのゲージボソン (弱ボソン) に有限な質量を持たせるのに使われ, 残りの 1 個が有限な真空期待値を持つ Higgs 場になる. 従って, この 1 組の複素スカラー場 ϕ^+ , ϕ^0 は, 弱い相互作用のゲージボソンに質量を持たせるのに必要最小限の構成である.

自発的対称性の破れ

ポテンシャル $V(\phi)$ は4つの Hermite 場で

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \left[(\phi_R^+)^2 + (\phi_I^+)^2 + (\phi_R^0)^2 + (\phi_I^0)^2 \right] + \frac{1}{4}\lambda \left[(\phi_R^+)^2 + (\phi_I^+)^2 + (\phi_R^0)^2 + (\phi_I^0)^2 \right]^2 \quad (9.82)$$

と書き直せる．ポテンシャルは4つの実変数の実関数とみなすことができる．ポテンシャルの極小が真空状態 $|0\rangle$ に対応する（図 9.1）．実数の2乗は0または正であるので，ポテ

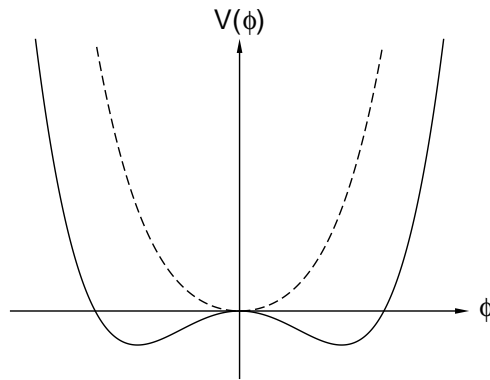


図 9.1: ポテンシャル $V(\phi)$. 破線は $\mu^2 > 0$ のとき，実線は $\mu^2 < 0$ のとき．

ンシャルが極小をもつためには $\lambda > 0$ でなければならない． $\mu^2 \geq 0$ であるならば，極小は4つの実変数が全て0のとき，すなわち，4つの Hermite 場の真空状態における期待値が0でありときである．このとき，対称性は破れていないので，ゲージ場に質量をもたせることはできない．従って，対称性が破れるのは $\mu^2 < 0$ のときであり，ポテンシャルの極小は4つの Hermite 場の少なくとも1つの真空期待値が0でないとき（図 9.1 の実線）である．(9.82) から，極小は

$$(\phi_R^+)^2 + (\phi_I^+)^2 + (\phi_R^0)^2 + (\phi_I^0)^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} \quad (9.83)$$

のときに実現される．この段階では，4つの Hermite 場は同等である．言い換えると，4つの Hermite 場の変換に対する自由度が残っている．

真空状態 $|0\rangle$ は（必要なら大域的ゲージ変換の後）1つの Hermite 場 ϕ_R^0 だけが有限の期待値をもち，残りの3つの場の期待値が0である状態とする．有限な期待値を ν として，

$$\langle 0 | \begin{pmatrix} \phi_R^+ \\ \phi_I^+ \\ \phi_R^0 \\ \phi_I^0 \end{pmatrix} | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.84)$$

と書ける． ϕ_R^0 は Hermite 場であるから ν は実数である．複素スカラー場の真空期待値 (9.84) を

$$v = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \quad (9.85)$$

と表すことにすると，(9.83) から， ϕ_R^0 の真空期待値 ν は

$$\nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (9.86)$$

である．

同等な4つの Hermite 場の中で，特に ϕ_R^0 の真空期待値だけが0でないとした．これを自発的対称性の破れという．本来，4つの同等な Hermite 場の中の回転に対して全く対称であるが，真空状態として1つの状態を選んだ結果，回転の対称性が破られたのである．——— この現象は磁性体の磁化にたとえられる．磁性体を構成する原子のスピン向きが揃うことによって磁化が生成されるが，どの方向を向いてもエネルギー的な違いはない．しかし，実際には，スピンはある特定の方向を向いて磁化が生成されている．

$SU(2) \otimes U(1)$ の生成子を (9.85) で表される v に作用させると0にはならないが，1つの線形結合に対しては0になる：

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^3 + \frac{1}{2}Y \right) v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} = 0 \quad (9.87)$$

すなわち， $SU(2) \otimes U(1)$ 対称性は破れているが，電荷 $Q = T^3 + \frac{1}{2}Y$ に関する対称性だけが破れていない．

Higgs 場

真空状態はポテンシャルが極値をもつ安定点である．安定点のまわりで理論を考えるのに適当な手法として，3つの関数 ξ^i ($i = 1, 2, 3$) とひとつの Hermite な Higgs 場 η を導入して，複素スカラー場 ϕ を書き直す：

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(i \sum_{i=1}^3 \xi^i L^i \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta \end{pmatrix} \quad (9.88)$$

そこで，

$$U(\xi) = \exp \left(-i \sum_{i=1}^3 \xi^i L^i \right) \quad (9.89)$$

によるゲージ変換

$$\phi \longrightarrow \phi' = U(\xi)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta \end{pmatrix} \quad (9.90)$$

をして，ポテンシャル V は

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(\nu + \eta)^2 + \frac{1}{4}\lambda(\nu + \eta)^4 = -\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda} - \mu^2\eta^2 + \lambda\nu\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \quad (9.91)$$

となる．Higgs 場の 2 乗 η^2 の項が Higgs 粒子の質量項であり，その係数から質量は

$$M_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \quad (9.92)$$

と表される．複素スカラー場の 4 つの自由度のうち，1 つの自由度が物理的な Higgs 場 η になり，残りの 3 つの自由度 ξ_i はゲージ変換によって陽には現われない．これは，ゲージ変換に対する不変性を利用して，特定のゲージに固定したためである．ここで取ったゲージは unitary ゲージと呼ばれ，物理的な自由度を見るのに最も適したゲージである．

ゲージボソンの質量

ゲージ場とその質量は， ϕ の運動エネルギーの項に現れる：

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{2}(0, \nu) \left(\frac{g'}{2} B_\mu + \frac{g}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + (\text{terms of } \eta) \quad (9.93)$$

第 2 項は Higgs 場の項である．第 1 項は次のように書き直せる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(0, \nu) \left(\frac{g'}{2} B_\mu + \frac{g}{2} \mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{g^2 \nu^2}{8} (W^{1\mu} - iW^{2\mu}) (W_\mu^1 + iW_\mu^2) + \frac{\nu^2}{8} (gW^{3\mu} - g'B^\mu) (gW_\mu^3 - g'B_\mu) \\ &= \frac{1}{2} M_W^2 (W^{+\mu} W_\mu^- + W^{-\mu} W_\mu^+) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^\mu Z_\mu \end{aligned} \quad (9.94)$$

ここで，ゲージ場 W_μ^\pm ， Z_μ とその質量に相当する量を

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad Z_\mu = \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (9.95)$$

$$M_W = \frac{g\nu}{2}, \quad M_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} \nu}{2} \quad (9.96)$$

とした．質量を持たないゲージ場 (フォトン) A_μ は， Z_μ に直交するように

$$A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (9.97)$$

で与えられる．

ゲージ不変性はゲージ場が表す粒子 (ゲージボソン) の質量が 0 であることを要請した．質量が 0 であるスピンの 1 のベクトル粒子は，フォトンがそうであるように，2 つの自由度しかもたない．すなわち，横波の 2 成分だけが存在し，縦波成分がない．従って，ベクトル粒子が質量をもつためには縦波成分が必要である．電弱相互作用の標準模型では，1 組の複素スカラー場がもつ 4 つの自由度のうち，1 つの自由度だけが Higgs 場になり，残りの 3 つ

の自由度が、それぞれ、3つのゲージボソンの縦波成分として吸収されたのである。このように、本来2つの横波成分しかないゲージ場が、縦波成分を得て質量をもつ機構を Higgs 機構 という。

Weinberg 角

U(1) ゲージ変換で導入されたゲージ場 B と SU(2) ゲージ変換で導入されたゲージ場 W^3 の混合を表す Weinberg 角 θ_W を次の式で定義する (図 9.2 参照):

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (9.98)$$

$$\left(\begin{array}{l} \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{array} \right)$$

このとき、 W_μ^3 と B_μ の混合、及び、ゲージボソンの質量の関係は

$$\left(\begin{array}{l} A_\mu \\ Z_\mu \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \sin \theta_W & \cos \theta_W \\ \cos \theta_W & -\sin \theta_W \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{array} \right) \quad (9.99)$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \quad (9.100)$$

と表せる。これは、式 (9.94) の W_μ^3 と B_μ に関する項を

$$\frac{\nu^2}{8} (W^{3\mu\dagger}, B^{\mu\dagger}) \left(\begin{array}{cc} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{array} \right) \quad (9.101)$$

と書いたとき、質量行列

$$M = \left(\begin{array}{cc} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{array} \right) \quad (9.102)$$

が対角ではなく、直交行列

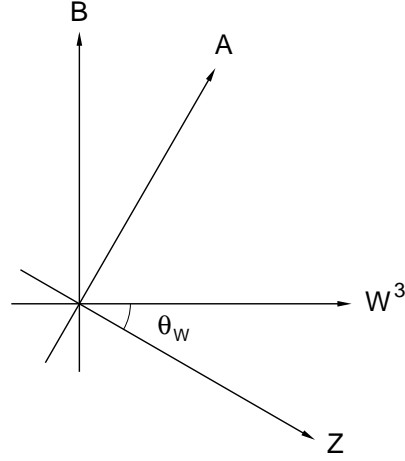
$$U = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left(\begin{array}{cc} g' & g \\ g & -g' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \sin \theta_W & \cos \theta_W \\ \cos \theta_W & -\sin \theta_W \end{array} \right) \quad (9.103)$$

によって

$$U M U^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \frac{(g^2 + g'^2)\nu^2}{4} \end{array} \right) \quad (9.104)$$

と対角化されることに対応している。

なお、ここまで見てきたように Glashow-Weinberg-Salam 理論では、2つの結合定数 g 、 g' 及び Higgs 場の真空期待値 ν の3つがパラメータとして導入されている。ゲージ粒子の質量と Weinberg 角は3つのパラメータで表されている。

図 9.2: Weinberg 角 θ_W

9.3.3 レプトンの相互作用

レプトンとゲージ場との相互作用は (9.72) から求められる. B_μ と W_μ^3 を光子の場 A_μ と中性弱ボソンの場 Z_μ で書き直す (微分 ∂_μ の項を除いて) と次のようになる

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= i\bar{L}\gamma^\mu \left(\frac{ig'}{2}B_\mu Y + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \frac{ig'}{2}B_\mu Y e_R \\
 &= -\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu \left(\frac{gg'(Y+1)}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu - \frac{g'^2Y-g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu \right) \nu_L \\
 &\quad -\frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu \left(\frac{gg'(Y-1)}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu - \frac{g'^2Y+g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu \right) e_L \\
 &\quad -\frac{1}{2}\bar{e}_R\gamma^\mu \left(\frac{gg'Y}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu - \frac{g'^2Y}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu \right) e_R \\
 &\quad -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_L\gamma^\mu W_\mu^+ e_L + \bar{e}_L\gamma^\mu W_\mu^- \nu_L \right) \tag{9.105}
 \end{aligned}$$

ここで weak hypercharge の値 (左巻き成分は $Y = -1$, 右巻き成分は $Y = -2$) を代入すると, 電子と光子の相互作用の結合定数の大きさは $gg'/\sqrt{g^2+g'^2}$ となる. そこで, これを素電荷 e に等しいとする

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} = g \sin \theta_W. \tag{9.106}$$

このとき,

$$e = e_L + e_R \tag{9.107}$$

$$\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \quad (9.108)$$

を用いて, Lagrangian 密度 (9.105) は次のように書ける:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \left[-e(\bar{e}\gamma^\mu e) \right] A_\mu \\ & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \left[\bar{\nu}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu + \bar{e}\gamma^\mu \left(2\sin^2 \theta_W - \frac{1-\gamma_5}{2} \right) e \right] Z_\mu \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} e W_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu W_\mu^- \right) \end{aligned} \quad (9.109)$$

右辺の1行目は, 電子のカレント $-e(\bar{e}\gamma^\mu e)$ と光子 A_μ の相互作用(電磁相互作用)を表す. フォトン は左巻き成分と右巻き成分と同じ強さで結合する. フォトンとニュートリノが結合する項は現われない. (9.109) の右辺の2行目はレプトンと中性弱ボソン Z との結合で, 中性カレントによる弱い相互作用を表す. 3行目が電荷が変化する弱い相互作用で, 電荷をもった荷電弱ボソン W^\pm との結合によって表される. 荷電弱相互作用が左巻成分しかないのに対して, 中性弱相互作用は右巻成分も存在する. 中性相互作用の存在, 及び右巻成分の存在は, Glashow-Weinberg-Salam 理論によって予言され, その後, 実験的に確かめられた.

フェルミオンの質量

ゲージ粒子の質量と同様に, フェルミオンの質量は Higgs 場とのゲージ不変な相互作用の結果生じる. しかし, ゲージ理論の必然的な結果というよりは多少任意性があり, その結合定数はパラメータになる. Glashow-Weinberg-Salam 理論は, 電子と Higgs 場の相互作用として次の Lagrangian 密度を仮定する [9]

$$\mathcal{L} = -g_e (\bar{L} \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger L). \quad (9.110)$$

SU(2) 2重項を構成する複素スカラー場の真空期待値 (9.85) から

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{g_e}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0, \nu) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] \\ &= -\frac{g_e \nu}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = -\frac{g_e \nu}{\sqrt{2}} \bar{e} e \end{aligned} \quad (9.111)$$

となる. パラメータ g_e は電子の質量 m_e との関係式

$$m_e = \frac{g_e \nu}{\sqrt{2}} \quad (9.112)$$

によって決められる. このように, Glashow-Weinberg-Salam 理論は電子の質量に対してなんら予言をしていない. この事情はクォークに対しても同様である. しかし, フェルミオンと Higgs 粒子の Yukawa 結合を通して, その結合定数とフェルミオンの質量とを関連づけている.

9.3.4 クォークの相互作用

ハドロンも含めた理論への拡張は、ハドロンのカレントをクォークレベルで表現することによって行われる。たとえば、中性子と陽子は、それぞれ3つのクォーク udd , uud で構成されるので、中性子のベータ崩壊はクォークの遷移 $d \rightarrow u$ で記述できると考えられる。SU(2) \otimes U(1) ゲージ理論では、 u クォークと d クォークの左巻き成分は SU(2) の2重項を成し、右巻き成分はそれぞれ SU(2) 1重項を成す：

$$L_q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R \quad (9.113)$$

レプトンの場合と同様に、電荷 Q と weak isospin T^3 の作用を求めると、左巻き成分 L_q に関しては

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +\frac{2}{3}u_L \\ -\frac{1}{3}d_L \end{pmatrix} \\ T^3 \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +u_L \\ -d_L \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.114)$$

右巻き成分 u_R, d_R に関しては

$$\begin{aligned} Qu_R &= +\frac{2}{3}u_R, & T^3u_R &= 0 \\ Qd_R &= -\frac{1}{3}d_R, & T^3d_R &= 0 \end{aligned} \quad (9.115)$$

であるから、クォークの weak hypercharge は

$$Y \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad Yu_R = \frac{4}{3}u_R, \quad Yd_R = -\frac{2}{3}d_R \quad (9.116)$$

すなわち、 $Y(L_q) = \frac{1}{3}$, $Y(u_R) = \frac{4}{3}$, $Y(d_R) = -\frac{2}{3}$ であることがわかる。

クォークとゲージ場の相互作用の Lagrangian 密度は、レプトンの場合 (9.72) に対応して次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{L}_q\gamma^\mu \left(\frac{ig'}{2}B_\mu Y + \frac{ig}{2}\mathbf{W}_\mu \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) L_q \\ &\quad + i\bar{u}_R\gamma^\mu \frac{ig'}{2}B_\mu Yu_R + i\bar{d}_R\gamma^\mu \frac{ig'}{2}B_\mu Yd_R \\ &= -e \left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d \right) A_\mu \\ &\quad - \frac{g}{2\cos\theta_W} \left[\bar{u}\gamma^\mu \left(\frac{4}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1-\gamma_5}{2} \right) u \right. \end{aligned} \quad (9.117)$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{d} \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) d \Big] Z_\mu \\
& - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} d W_\mu^+ + \bar{d} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u W_\mu^- \right) \quad (9.118)
\end{aligned}$$

クォークの相互作用の場合も，電磁相互作用の強さは左巻き成分と右巻き成分で等しく，電荷の大きさに比例する．弱い相互作用に関しても同様で，荷電カレントには左巻き成分だけが関与し，中性カレントには右巻き成分も寄与する．

9.3.5 3つの世代

ここまでは，レプトンとクォークの第1世代だけを扱ってきた．第2世代 (ν_μ, μ, c, s)，第3世代 (ν_τ, τ, t, b) へも同様に拡張できる．左巻き成分は，レプトンとクォークがそれぞれ $SU(2)$ 2重項を構成し，右巻き成分は全て1重項を成す．従って，フェルミオンは次のように分類される．

		Q	T^3	Y	第1世代	第2世代	第3世代
レプトン	2重項	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$
	1重項	-1	0	-2	e_R	μ_R	τ_R
クォーク	2重項	$\begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$+\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$
	1重項	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{4}{3}$	u_R	c_R	t_R
		$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	d'_R	s'_R	b'_R

しかし，全く同じように扱えるのはレプトンであり，クォークに関してはそれほど単純にはいかない．たとえば，第2世代に属するクォークは s クォークと c クォークである．これらの粒子について，対応する第1世代の粒子，すなわち， u クォークと d クォークと同じ式を満たすと考えると，弱い相互作用の荷電成分は s クォークと c クォークの遷移として表される．しかし， Λ 粒子から陽子への崩壊は，クォークレベルでは s クォークから u クォークへの遷移であり，第1世代から第2，第3世代への単なる拡張では記述できない．ここまで展開してきたゲージ理論を保持しつつ，現実を正しく記述するには，弱い相互作用の荷電成分において，クォークの世代間の混合が必要である．すなわち，フレーバーで区別される（質量の固有状態の）クォークと，Glashow-Weinberg-Salam 理論の $SU(2)$ 2重項・1重項を構成するクォークは同一ではないと考える．前者を d, s, b で，後者を d', s', b' で表すことにする．このとき，クォークの混合は Kobayashi-Maskawa 行列 と呼ばれ

る unitary 行列で通常次のように表される [15] :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = U_{\text{KM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (9.119)$$

$$U_{\text{KM}} = \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix} \quad (9.120)$$

Kobayashi-Maskawa 行列が対角でないのは，質量行列が対角でないことに起因する．式 (9.119) は d, s, b の混合を表し， u, c, t のあいだの混合はないとしているが，これは便宜的な表現であり，逆も可能である．また，Glashow-Weinberg-Salam 理論では，レプトンの質量行列は対角であり，レプトンの混合はないとしている．

電磁相互作用と弱い相互作用を記述する Lagrangian 密度は，レプトンとクォークのカレントとゲージボソンとの結合として次のように表される．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} = & -e \left(l_\mu^{\text{EM}} + q_\mu^{\text{EM}} \right) A^\mu \\ & - \frac{g}{2 \cos \theta_W} \left(l_\mu^n + q_\mu^n \right) Z^\mu \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(l_\mu^c W^{-\mu} + q_\mu^c W^{-\mu} + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (9.121)$$

$$l_\mu^{\text{EM}} = -\bar{e}\gamma_\mu e + (e \rightarrow \mu) + (e \rightarrow \tau) \quad (9.122)$$

$$q_\mu^{\text{EM}} = +\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d + (u, d \rightarrow c, s) + (u, d \rightarrow t, b) \quad (9.123)$$

$$\begin{aligned} l_\mu^n = & \bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_e + \bar{e}\gamma_\mu \left(2\sin^2\theta_W - \frac{1-\gamma_5}{2} \right) e \\ & + (\nu_e, e \rightarrow \nu_\mu, \mu) + (\nu_e, e \rightarrow \nu_\tau, \tau) \end{aligned} \quad (9.124)$$

$$\begin{aligned} q_\mu^n = & \bar{u}\gamma_\mu \left(-\frac{4}{3}\sin^2\theta_W + \frac{1-\gamma_5}{2} \right) u + \bar{d}\gamma_\mu \left(+\frac{2}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1-\gamma_5}{2} \right) d \\ & + (u, d \rightarrow c, s) + (u, d \rightarrow t, b) \end{aligned} \quad (9.125)$$

$$l_\mu^c = \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e + (\nu_e, e \rightarrow \nu_\mu, \mu) + (\nu_e, e \rightarrow \nu_\tau, \tau) \quad (9.126)$$

$$q_\mu^c = \bar{d}'\gamma_\mu(1-\gamma_5)u + (u, d' \rightarrow c, s') + (u, d' \rightarrow t, b') \quad (9.127)$$

Kobayashi-Maskawa 行列はクォークの弱荷電カレントだけに現れ， q_μ^c は3つの世代をまとめて次のように表すこともできる．

$$q_\mu^c = (d, s, b) U_{\text{KM}}^\dagger \gamma_\mu (1-\gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \quad (9.128)$$

なお，特に，

$$d' = \cos \theta_C d + \sin \theta_C s \quad (9.129)$$

として， $\theta_C \approx 13^\circ$ を Cabibbo 角 という [16] .

中性カレントに関しては， d, s, b を d', s', b' で置き換えても，Kobayashi-Maskawa 行列の unitary 性から，フレーバーの変化 ($d \leftrightarrow s, u \leftrightarrow c$ など) がない表式 (9.125) になる [17] .

9.3.6 Glashow-Weinberg-Salam 理論のパラメータ

電弱相互作用を統一する Glashow-Weinberg-Salam の標準模型は，Lagrangian 密度 (9.121) に示すように3つのパラメータを含んでいる (Higgs 粒子の質量，フェルミオンの質量，クォークの混合振幅を除いて) . すなわち，弱ボソンの質量を生成するスカラー場の真空期待値 ν と，フェルミオンの場とゲージ場の2つの結合定数 g と g' である . しかし，より有用な3つのパラメータとして，しばしば，微細構造定数 α , Fermi 定数 G_F , 及び Weinberg 角の $\sin^2 \theta_W$ が用いられる .

微細構造定数

電磁相互作用の結合定数である素電荷 e は次のように表される .

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} : \quad e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W \quad (9.130)$$

微細構造定数は高い精度で測定されている [18] :

$$\alpha = \frac{1}{137.03599976(50)}. \quad (9.131)$$

しかし，関与する過程のエネルギースケールに依存する走る結合定数 (running coupling constant) を定義するほうが都合が良く，近年では，上に示した値は低エネルギーの極限での値と考えられる . W^\pm ボソンのエネルギースケールでは $1/128$ 程度である .

Fermi 定数

レプトンだけが関与する μ 粒子のベータ崩壊

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (9.132)$$

を標準模型と古典論で比較することによって，Fermi 定数 G_F と標準模型のパラメータとが関係づけられる (図 9.3 参照) . Glashow-Weinberg-Salam 理論に従えば，この過程は W ボソンの2次の過程として記述され，運動量空間における T 行列は

$$T = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[\bar{u}(\nu_\mu) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(\mu) \right] \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \left[\bar{u}(e) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} v(\nu_e) \right] \quad (9.133)$$

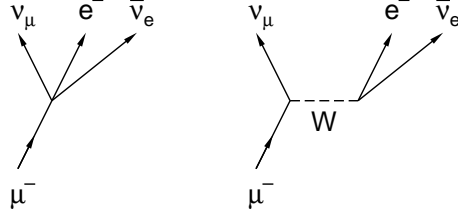


図 9.3: μ 粒子崩壊．左：古典論，右：Glashow-Weinberg-Salam 理論．

と表される．ここで， q は W ボソンの運動量であり， u, v はフェルミオンのスピノールを表す．他方，古典論では次のように記述される：

$$T = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(\nu_\mu) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(\mu) \right] \left[\bar{u}(e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(\nu_e) \right] \quad (9.134)$$

低エネルギーの極限 $q^2 \rightarrow 0$ で両者は一致することから

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{e^2}{8M_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\nu^2}{2} \quad (9.135)$$

が得られる．ここでは，(9.130) の関係と W ボソンの質量

$$M_W = \frac{g\nu}{2} \quad (9.136)$$

を用いた． μ 粒子のベータ崩壊寿命の逆数（崩壊確率）は，輻射補正などを施した後

$$\left(\tau_\mu \right)^{-1} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} F(m_e^2/m_\mu^2) \left(1 + \frac{3}{5} \frac{m_\mu^2}{M_W^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha(m_\mu)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right] \quad (9.137)$$

で与えられ，ここで， $F(x)$ と $\alpha(m_\mu)$ は

$$F(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x \quad (9.138)$$

$$\frac{1}{\alpha(m_\mu)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3\pi} \ln(m_\mu/m_e) + \frac{1}{6\pi} \approx 136 \quad (9.139)$$

で定義される [19] ． μ 粒子の崩壊確率の測定から，

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.16639(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (9.140)$$

が得られている [18] ．

Weinberg 角

Weinberg 角の $\sin^2 \theta_W$ は，弱中性カレントによって起こる過程から求めることができる．たとえば， μ ニュートリノと電子の弾性散乱

$$\nu_\mu + e^- \longrightarrow \nu_\mu + e^- \quad (9.141)$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \longrightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \quad (9.142)$$

は弱い相互作用の中性カレントにのみによって生じる．また，2つの過程の散乱断面積の比は $\sin^2\theta_W$ の関数になる．実験データの解析から [20,21]

$$\sin^2\theta_W = 0.232 \pm 0.012 \pm 0.008 \quad (9.143)$$

が得られている． t クォークと Higgs 粒子の質量を 100 GeV と仮定し輻射補正を加えている．

$\sin^2\theta_W$ は Z の質量や W^\pm の質量の測定からも求められる：

$$M_W^2 = \left(\frac{g\nu}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}e^2}{8G_F \sin^2\theta_W} \quad (9.144)$$

$$M_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)\nu^2}{4} = \frac{M_W^2}{\cos^2\theta_W} \quad (9.145)$$

$$\sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad (9.146)$$

このような場合にも，得られる値は繰り込みの処方に多少依存する．Particle Data Group は物理定数の表に modified minimal subtraction scheme ($\overline{\text{MS}}$) を採用した場合の値として

$$\sin^2\theta_W = 0.23113 \quad (15) \quad (9.147)$$

を載せている [18]．これは $\sin^2\theta_W$ よりも M_Z を3番目の基本的なパラメータとして採用することに対応している．

Kobayashi-Maskawa 行列

クォークの混合を表す Kobayashi-Maskawa 行列に対しては，実験データの解析と unitarity から，それぞれの要素の大きさの制限が次のように求められている [18]．

$$U_{\text{KM}} = \begin{pmatrix} 0.9741 - 0.9756 & 0.219 - 0.226 & 0.0025 - 0.0048 \\ 0.219 - 0.226 & 0.9732 - 0.9748 & 0.038 - 0.044 \\ 0.004 - 0.014 & 0.037 - 0.044 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix} \quad (9.148)$$

位相（虚数部）についての制限も求められていて，すべての要素に対して実数と矛盾しない．しかし， K メソンの崩壊における CP の破れに対する明確な答えは得られておらず，Kobayashi-Maskawa 行列の微小な虚数部に帰着されるのかも知れない．

原子核のベータ崩壊を扱う際に，Kobayashi-Maskawa 行列の左上の対角要素 U_{ud} は常に崩壊確率にかかる定数として現れる．この要素の値は，クォークが関与しない μ 粒子のベータ崩壊と原子核の Fermi 型ベータ崩壊（ベクトルカレントのみが寄与する）とを比較することによって求められる．10種類の原子核 ^{10}C , ^{14}O , $^{26}\text{Al}^m$, ^{30}S , ^{34}Cl , $^{38}\text{K}^m$, ^{42}Sc , ^{46}V , ^{50}Mn , ^{54}Co の Fermi 遷移確率を精確に測定し，主に Coulomb 力によって生じる isospin の混合（Fermi 遷移強度の分散），内部・外部輻射補正などを考慮した結果，

$$|U_{ud}| = 0.9734 \pm 0.0008 \quad (9.149)$$

が得られている [18] . しかし , 補正の仕方への依存性がかなり大きく , 誤差の範囲で一致しない値が得られている . さらに , (9.148) に示した値と比べると有意に小さく , Kobayashi-Maskawa 行列の unitary 性とも絡んで , 解決されていない問題となっている .

原子核の Fermi 遷移が弱い相互作用のベクトルカレントによって起こるのに対して , Gamow-Teller 遷移は軸性ベクトルカレントによって起こる . 軸性ベクトルカレントの強さは , もっぱら中性子のベータ崩壊の寿命から求められる . 超低エネルギーの中性子を用いた実験データの重み付き平均として

$$\tau_n = 885.7 \pm 0.8 \text{ s} \quad (9.150)$$

軸性ベクトルカレントとベクトルカレントの強さの比

$$\frac{g_A}{g_V} = 1.2739 \pm 0.0019 \quad (9.151)$$

が得られている [18] .

9.4 Glashow-Weinberg-Salam 理論のテスト

9.4.1 弱い相互作用の中性カレント

Glashow-Weinberg-Salam 理論は、古典論では考えられなかった弱い相互作用における中性カレントの存在を実験に先だって予言している。しかも、その存在だけではなく、Weinberg 角 θ_W が求められたら、中性カレントの構造も決定してしまう。

中性カレントの存在を示す一つの例は $\nu_\mu - e^-$ 散乱である。もし荷電 W^\pm ボソンが交換されるのであれば、 W^\pm は電荷を持つので、 ν_μ と e^- で荷電カレントを構成しなければならない。しかし、レプトンには世代間の混合がないので第1世代に属する e^- と第2世代に属する ν_μ ではカレントをつくれぬ。従って、もし荷電カレントしか存在しないならば、 $\nu_\mu - e^-$ 散乱は禁止される。他方、中性カレントは電荷を運ばないので、 e^- がつくる中性カレントと ν_μ がつくる中性カレントの両者と結合し得る。この過程は、図 9.4 に示すように、

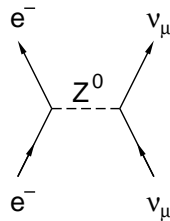


図 9.4: $\nu_\mu - e^-$ 弾性散乱

弱中性ボソン Z^0 の交換によってのみ起こり得る。実際、実験によって $\nu_\mu - e^-$ 散乱が確認され、中性カレントの存在が明瞭に検証された。

電子と陽電子の対消滅過程も中性カレントの存在の証拠になる。電子とその反粒子の陽電子は、電磁相互作用で光子に対消滅するが、中性弱相互作用でも Z^0 に対消滅する。 Z^0 の質量が大きいので ($M_Z \approx 90 \text{ GeV}$) 低いエネルギーでは Z^0 は実粒子としては生成されないが、virtual な粒子として生成され、それが、たとえば、レプトン対として崩壊して検出できる：

$$e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+ \quad (9.152)$$

すなわち、この過程の断面積は、図 9.5 に示すように、光子 γ と弱中性ボソン Z^0 を経由する振幅の和から求められる。実際、角分布の実験データは光子への対消滅だけでは説明できず、光子 γ と弱中性ボソン Z^0 の寄与の干渉を考慮に入れて初めて説明される。

電子と電子ニュートリノの弾性散乱は、弱い相互作用の荷電カレント (W^\pm) と中性カレント (Z^0) によって起こり得る：

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad (9.153)$$

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \quad (9.154)$$

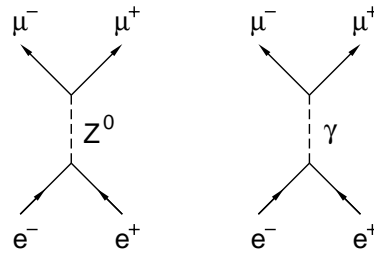


図 9.5: 電子と陽電子の対消滅

図 9.6 に示すように Z^0 は電子の中性カレントと(反)ニュートリノの中性カレントと結合する．一方, W^\pm は電子と反ニュートリノがつくる荷電カレントと結合するので, ν_e と $\bar{\nu}_e$ では結合の仕方が異なる．また, 荷電カレントが左巻き成分だけを持つのに対して, 電子の

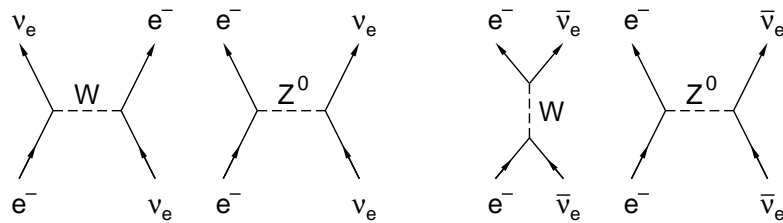


図 9.6: 電子と電子ニュートリノの弾性散乱．左: ν_e - e^- 散乱, 右: $\bar{\nu}_e$ - e^- 散乱．

中性カレントは $\sin^2\theta_W$ に依存した右巻き成分も持つので, 散乱断面積の測定は中性カレントの存在を示す証拠となるだけでなく, Glashow-Weinberg-Salam 理論が予言する中性カレントの構造を検証する手段も提供する．なお, 電子, ニュートリノ, 反ニュートリノの中性カレントは

$$l_\mu^n(e) = \bar{e} \gamma_\mu \left(2 \sin^2\theta_W - \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) e \tag{9.155}$$

$$l_\mu^n(\nu) = \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu \tag{9.156}$$

$$l_\mu^n(\bar{\nu}) = \nu \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \bar{\nu} \tag{9.157}$$

と表される．

弱い相互作用を媒介するゲージボソンの生成は, Glashow-Weinberg-Salam 理論の直接的な検証になる．荷電および中性弱ボソンは陽子と反陽子の衝突によって生成され, その崩壊を観測して生成が確認された [22,23] ．

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow W^- + X & W^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \\ p + \bar{p} &\rightarrow Z^0 + X & Z^0 &\rightarrow e^+ + e^- \end{aligned} \tag{9.158}$$

もちろん、荷電および中性弱ボソンの崩壊は上にあげた例だけではなく、数多くのいろいろな粒子が現れる。

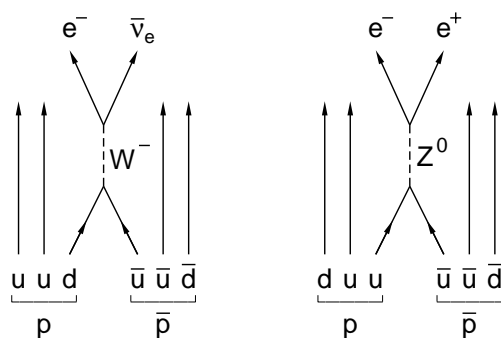


図 9.7: 陽子・反陽子衝突による W^- , Z^0 生成

荷電弱ボソン W^- は、陽子を構成する d クォークと反陽子を構成する \bar{u} クォーク（あるいは、陽子を構成する u クォークと反陽子を構成する \bar{d} クォーク）がつくる荷電カレントとの結合として生成される。一方、中性カレントはフレーバーを変えないので、中性ボソン Z^0 は u と \bar{u} （あるいは、 d と \bar{d} ）との結合によって生成される。弱ボソンの生成に関与しなかったクォークから、強い相互作用によって派生する、低いエネルギーの粒子が同時に数十個放出される。

Glashow-Weinberg-Salam 理論は、中性カレントの存在と共に、弱ボソンの質量を预言している。

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{\sqrt{2}g^2}{8G_F} \approx 80 \text{ GeV}/c^2 \\ M_Z &= \frac{M_W}{\cos\theta_W} \approx 90 \text{ GeV}/c^2 \end{aligned} \tag{9.159}$$

実験で測定された質量は

$$\begin{aligned} M_W &= 80.423 \pm 0.039 \text{ GeV}/c^2 \\ M_Z &= 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2 \end{aligned} \tag{9.160}$$

であり [18]、预言値と極めて良い一致を示している。 W^\pm の崩壊が検出の難しいニュートリノを含むのに対して、 Z^0 は電荷を持った粒子に崩壊するので、 Z^0 の質量のほうが正確に測定される。

9.4.2 メソンの崩壊

クォークを基本的な粒子と考える Glashow-Weinberg-Salam 理論では、古典論の限界の1つであったメソンの崩壊も基本的なクォークのカレント（レプトンのカレントと共に）によって記述できる。たとえば、 π^- のベータ崩壊

$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \tag{9.161}$$

$$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e \quad (9.162)$$

はクォークの描像で 図 9.8 のように表される． π^- のフレーバー部分の波動関数は

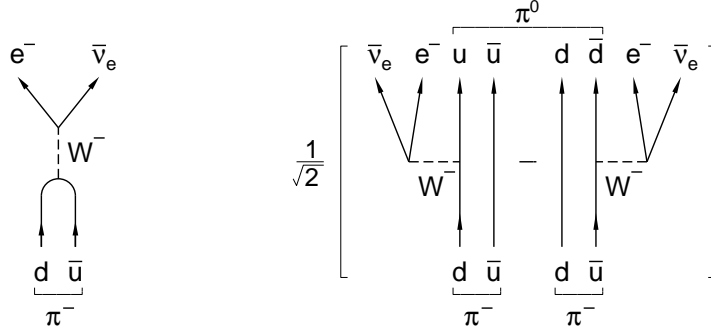


図 9.8: クォーク描像での π^- の崩壊

$$|\pi^- \rangle = |d\bar{u} \rangle \quad (9.163)$$

である． π^\pm と π^0 はアイソスピンの三重項を成しているので， π^0 の波動関数は π^- の波動関数から容易に求められる：

$$|\pi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} T^- |\pi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u} \rangle - |d\bar{d} \rangle) \quad (9.164)$$

図 9.8 の右側の過程では， d と u あるいは \bar{d} と \bar{u} がつくる荷電カレントが W^- と結合し (W^- を生成し)， W^- はレプトンの荷電カレントと結合して， e^- と $\bar{\nu}_e$ に崩壊する． π 粒子のスピン・パリティは $J^\pi = 0^-$ であるので，この過程は Fermi 遷移によって起こる．従って， π 部分の行列要素は直ちに計算できる：

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 | T^- | \pi^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle d\bar{u} | (T^-)^\dagger T^- | d\bar{u} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle d\bar{u} | 2T^3 | d\bar{u} \rangle = \sqrt{2} \end{aligned} \quad (9.165)$$

この結果は， π 粒子のアイソスピンの性質を利用して得られるが，メソンの崩壊がクォークの描像で，他の過程と同じように記述できるところが古典論とは異なっている．

図 9.8 の左側の過程も， d と \bar{u} がつくる荷電カレント，及びレプトンの荷電カレントと W^- の結合として記述できる：

$$\begin{aligned} & -\frac{g^2}{2} \langle f | \int d^4x d^4x' T [q_\mu^{c\dagger}(x) W^{+\mu}(x) W^{-\nu}(x') l_\nu^c(x')] | i \rangle \\ &= -\frac{g^2}{2} \int d^4x d^4x' \langle 0 | q_\mu^{c\dagger}(x) | \pi^- \rangle P_W^{\mu\nu}(x-x') \langle e^- \bar{\nu}_e | l_\nu^c(x') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.166)$$

ここで, $P_W^{\mu\nu}(x-x')$ は W ボソンの propagator である:

$$\begin{aligned} P_W^{\mu\nu}(x-x') &= \langle 0 | T[W^{+\mu}(x)W^{-\nu}(x')] | 0 \rangle \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{-iq(x-x')} \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \end{aligned} \quad (9.167)$$

クォークの荷電カレントの行列要素は次のように表される:

$$\langle 0 | q_\mu^{c\dagger}(x) | \pi^- \rangle = \cos \theta_C \langle 0 | \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 d(x) | \pi^- \rangle \quad (9.168)$$

π^- のスピン・パリティ ($J^\pi = 0^-$) を考慮すると, この場合には荷電カレントの軸性ベクトルの項だけが寄与する. さらに, 荷電カレントには Kobayashi-Maskawa 行列が含まれるので, $\cos \theta_C$ (θ_C は Cabibbo 角) が現れる. 一方, レプトンの行列要素は

$$\langle e^- \bar{\nu}_e | l_\nu^c(x') | 0 \rangle = \langle e^- \bar{\nu}_e | \bar{e}(x') \gamma_\nu (1 - \gamma_5) \nu_e(x') | 0 \rangle \quad (9.169)$$

と表される. レプトンカレントの行列要素 (9.169) は直ちに計算できるが, クォークカレントの行列要素 (9.168) は自明ではない. これは, 弱い相互作用の理解が足りない (Glashow-Weinberg-Salam 理論が不十分である) のではなく, 強い相互作用が主要な役割を果たす π^- におけるクォークの波動関数 (特に空間部分の波動関数) について十分な知識がないためである. また, π^- の主要な崩壊モード $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の場合は, 上の式で置き換え $e^- \rightarrow \mu^-$, $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ をすれば良い.

図 9.8 に示した π 粒子のベータ崩壊は, 弱い相互作用の古典論で見たように, カレントの保存と密接な関係がある. すなわち, 中性子 (原子核の中の中性子) のベータ崩壊は, 裸の中性子のベータ崩壊だけでなく, 中性子が陽子と π^- に解離して生じる π^- のベータ崩壊によっても起こる. 図 9.9 の左側のダイアグラムは裸の中性子のベータ崩壊をクォークの描像で表している. 核子のベータ崩壊には Fermi 型と Gamow-Teller 型がともに寄与する. 中央のダイアグラムは, 図 9.8 の右側のダイアグラムに対応する Fermi 遷移である (図 9.8 に示したように二つのダイアグラムがあるが, ここではそのうちの一つだけを示した.) 裸の核子のベータ崩壊との違いは, W^- ボソンと結合するときに, 5 つのクォークが存在する点である. W^- ボソンと結合しない傍観者のクォークが, W^- ボソンとの結合に影響を与えないなら, 結合の強さは裸の核子の場合となんら変わりがない. これは Fermi 型遷移を引き起こすベクトルカレントが保存することを意味する.

一方, 図 9.9 の右側のダイアグラムは, Gamow-Teller 型遷移に対応する. 上の $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ のところで述べたように, Gamow-Teller 遷移のクォーク部分の行列要素は自明ではないが, クォーク多体系の軸性ベクトルカレントの部分的保存は, 系の波動関数の知識の範囲内で計算可能であると言える.

最後に, ストレンジネスを持った粒子のベータ崩壊も, クォークの描像に立った標準模型では, π 粒子や核子のベータ崩壊と同様に記述されることを, 2 つの例を取り上げて示す:

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (9.170)$$

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (9.171)$$

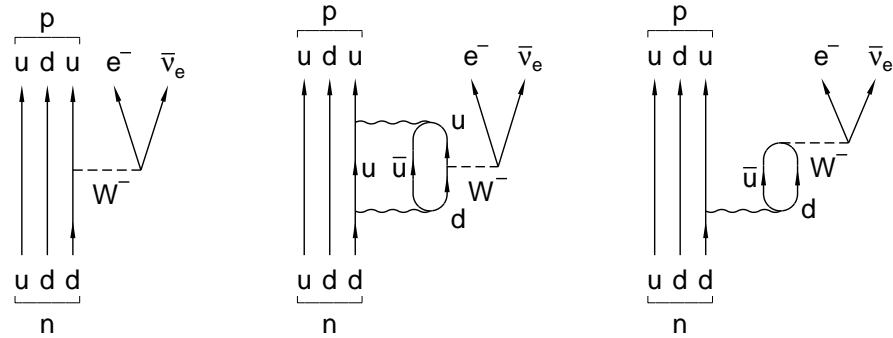


図 9.9: クォーク描像での核子のベータ崩壊

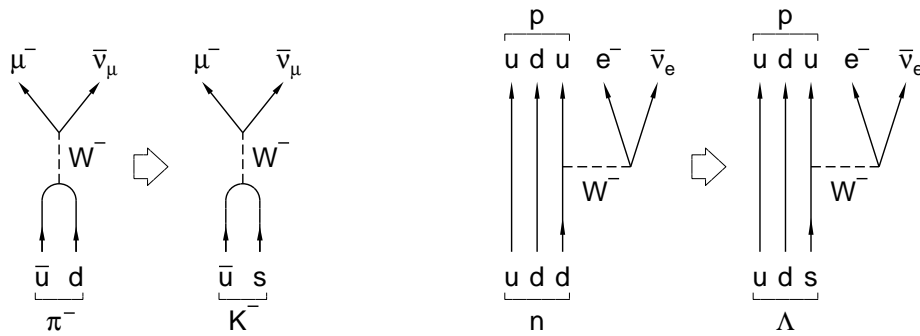


図 9.10: クォーク描像での K^- と Λ 粒子のベータ崩壊

ダイアグラムでは 図 9.10 のように表される．これを π^- ，中性子のベータ崩壊のダイアグラム（それぞれの左側のダイアグラム）と比較すると，単に d クォークを s クォークに置き換えただけである．これは， $SU(2)$ ゲージ理論の多重項とフレーバー固有状態が一致せず， d クォークと s クォークの混合があるためである．その混合を特徴づけるのが Cabibbo 角 θ_C で， d クォークが W^- ボソンとの結合に關与する過程では $\cos \theta_C$ が， s クォークが關与する過程では $\sin \theta_C$ が遷移振幅に現れる．

9.5 第 9 章の参考文献

1. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B50** (1972) 318
2. B.W. Lee and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **D5** (1972) 3121, 3137, 3155
E. Abers and B.W. Lee, Phys. Rep. **9** (1973) 1
3. C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electroweak Interactions* (London, Amsterdam, Benjamin)
4. F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons* (New York, Wiley)
5. I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics* (Bristol, Adam Hilger)
6. 竹内外史, リー代数と素粒子論 (東京, 裳華房)
7. S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579
8. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264
9. A. Salam, Proc. Eighth Nobel Symposium, (Stockholm, 1968) p.367
10. E. Noether, Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, Göttingen (1918) p.235
11. K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **13** (1955) 285
12. M. Gell-Mann, Nuovo Cimento **4** (1956) 848
13. P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508
14. T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **155** (1967) 1554
15. M. Kobayashi and K. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652
16. N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531
17. S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. **D2** (1970) 1285
18. Particle Data Group, Phys. Rev. **D66** (2002) 010001-1
19. W.J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1815
20. C. Baltay, Proc. 19th Int. Conf. on High Energy Physics, (Tokyo, 1978) p.882
21. CHARM II collaboration, Phys. Lett. **232B** (1989) 539
22. UA1 collaboration, Phys. Lett. **122B** (1983) 103, **126B** (1983) 398, **129B** (1983) 141
23. UA2 collaboration, Phys. Lett. **122B** (1983) 476