

## 第 3 章 質量公式

### 3.1 原子核の質量

原子核の最も基本的な物理量の 1 つは、基底状態の全エネルギー、すなわち、質量である。原子核の質量を議論するときには、電気的に中性な原子の質量を用いることが多い。それは、原子核が通常、そのまわりに電子を伴った原子の状態にあり、また、原子核の反応や崩壊（壊変）においても電荷が保存するからである。そういう意味で正確には原子の質量であるが、以下では、原子核の質量と言ったら中性原子の質量を意味することにする。

#### 3.1.1 質量の単位

基本単位  $\text{kg}$ ,  $\text{m}$ ,  $\text{s}$  で構成されるエネルギーの単位は

$$\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$$

であるが、これではミクロな原子核の世界を記述するには大きすぎる。通常、原子核物理学で現われるエネルギーのスケールは以下の単位の程度である。

MeV

原子核物理学においては、エネルギーの単位として MeV が広く用いられる [ 1 ] :

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.602\,176\,462\,(63) \times 10^{-13} \text{ J} \quad (3.1)$$

質量に光速の 2 乗をかけるとエネルギーになるので、質量の単位は [ 1 ]

$$1 \text{ MeV}/c^2 = 1.782\,661\,731\,(70) \times 10^{-30} \text{ kg} \quad (3.2)$$

である。なお、自然単位系がしばしば用いられる。この単位系では光速を  $c = 1$  とするので、質量の単位は MeV になる。

原子質量単位 (atomic mass unit)

原子核の質量は概ね質量数に比例しているので、ある基準の質量を単位として表すのも便利である。基準として  $^{12}\text{C}$  を原子核としてもつ中性炭素原子が用いられる。これを原子質量単位と言い、

$$u = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) \quad (3.3)$$

で定義される．値は

$$u = 931.494013(37) \text{ MeV}/c^2 \quad (3.4)$$

である [ 1 ] . 記号として ,  $u$  の代わりに  $amu$  が使われることもある .

原子核の質量を表す際の基本となる , 陽子の質量  $m_p$  , 中性子の質量  $m_n$  [ 1 ] , および水素原子の質量  $m_H$  の値 [ 2 ] は

$$\begin{aligned} m_p &= 938.27200(4) \text{ MeV}/c^2 = 1.00727646688(13) u \\ m_n &= 939.56533(4) \text{ MeV}/c^2 = 1.00866491578(55) u \\ m_H &= 938.78298(4) \text{ MeV}/c^2 = 1.007825023(55) u \end{aligned} \quad (3.5)$$

で , 中性子は陽子より約 0.1% 質量が大きい . 中性子と陽子の差 , 中性子と水素原子の差は

$$\begin{aligned} m_n - m_p &= 1.2933318(5) \text{ MeV}/c^2 \\ m_n - m_H &= 0.782354(2) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

電子の質量  $m_e$  は

$$m_e = 0.510998902(21) \text{ MeV}/c^2 \quad (3.7)$$

である [ 1 ] .

### 3.1.2 質量の表し方

$Z$  個の電子を伴った中性原子の質量を , 原子核の質量数  $A$  と原子番号 ( 陽子数 )  $Z$  を用いて  $M(A, Z)$  で表すことにする . この表し方を用いると , 中性子の質量は  $m_n = M(1, 0)$  , 水素原子の質量は  $m_H = M(1, 1)$  , 原子質量単位の基準となる中性炭素原子の質量は  $M(^{12}\text{C}) = M(12, 6)$  である .

原子核の質量は , 構成する粒子の質量と結合エネルギーで決まるが , 後者は前者の 1% 程度である . そのため , 質量そのものよりは , 結合エネルギーや , ある基準からの差を用いることが多い .

結合エネルギー ( binding energy )

陽子数が  $Z$  中性子数が  $N$  の原子核をもつ中性原子の質量は  $Zm_H + Nm_n$  に近い . 我々はこの値からのずれの特徴に興味がある . 原子核の結合エネルギーは次式で定義される .

$$B(A, Z) = Zm_H + Nm_n - M(A, Z) \quad (N = A - Z) \quad (3.8)$$

この定義式からも明らかなように , 結合エネルギーは原子核 ( 中性原子 ) を  $Z$  個の水素原子と  $N$  個の中性子に分けるのに必要なエネルギーである .

結合エネルギー  $B(A, Z)$  は電子の結合エネルギーを含むが , 通常は無視できるほど小さい . 結合エネルギーについては次の節で詳しく述べる .

## Mass Excess

同じ質量数  $A$  をもつ原子核におけるエネルギーの関係を考える際には、質量そのものや結合エネルギーよりも、次の式で定義される mass excess のほうが便利ことが多い。

$$\Delta M(A, Z) = M(A, Z) - Au \quad (3.9)$$

結合エネルギーを用いて mass excess を表すと、

$$\begin{aligned} \Delta M(A, Z) &= Z m_{\text{H}} + N m_n - B(A, Z) - Au \\ &= -B(A, Z) + Z(m_{\text{H}} - u) + N(m_n - u) \end{aligned} \quad (3.10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} m_{\text{H}} - u &= 7.28897(5) \text{ MeV}/c^2 \\ m_n - u &= 8.07132(5) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

である。質量数が等しい原子核に関して、mass excess の差が質量差を与えるのに対して、結合エネルギーの差は質量差を与えない。それは、水素原子と中性子の質量が異なるからである ( $m_n - m_{\text{H}} > 0$ )。

例として、質量数が  $A = 56$  の原子核の mass excess, 結合エネルギー, および核子あたりの結合エネルギーは次の表のようになる [2]。

表 3.1 質量数  $A = 56$  と  $57$  の原子核

$Z$		$\Delta M(56, Z)$	$B(56, Z)$	$B/56$	$\Delta M(57, Z)$	$B(57, Z)$	$B/57$
20	Ca	-13.237	449.584	8.028	-7.120	451.539	7.922
21	Sc	-25.467	461.032	8.233	-21.387	465.023	8.158
22	Ti	-39.132	473.914	8.463	-34.558	477.412	8.376
23	V	-46.239	480.239	8.576	-44.376	486.448	8.534
24	Cr	-55.289	488.506	8.723	-52.393	493.682	8.661
25	Mn	-56.905	489.341	8.738	-57.485	497.991	8.737
26	Fe	-60.601	492.254	8.790	-60.176	499.900	8.770
27	Co	-56.035	486.905	8.695	-59.340	498.282	8.742
28	Ni	-53.900	483.988	8.643	-56.075	494.234	8.671
29	Cu	-38.601	467.907	8.355	-47.305	484.682	8.503
30	Zn	-25.728	454.251	8.112	-32.686	469.281	8.233
31	Ga	-4.741	432.482	7.723	-15.901	451.713	7.925

単位 MeV

## 3.2 Weizsäckerの質量公式

### 3.2.1 結合エネルギーの特徴

実験によって測定された原子核の質量は、次のような特徴を示す [2, 3] .

1. 原子核の結合エネルギー  $B(A, Z)$  は質量数  $A$  に比例する . すなわち , 核子あたりの結合エネルギーはほぼ一定である ( 図 3.1 参照 ) . 質量数の小さい原子核を除くと ,  $B(A, Z)/A$  は 7.4 MeV と 8.8 MeV のあいだにある .
2. 核子あたりの結合エネルギーは  $A \approx 60$  で最大になる . 質量数が 60 から増加すると ,  $B(A, Z)/A$  の値は単調に減少する ( 図 3.1 参照 ) .
3. 質量数  $A$  を固定して , 結合エネルギーの陽子数  $Z$  依存性をみると ,  $B(A, Z)$  は  $Z$  の 2 次曲線で近似できる ( 図 3.2 参照 ) .
4. 3. をさらに詳しく見ると , 質量数  $A$  が奇数のときは 1 つの 2 次曲線で表されるのに対して , 質量数  $A$  が偶数のときは , 2 つの 2 次曲線で表される . 陽子数  $Z$  が偶数 ( 中性子数も偶数 ) の原子核は陽子数  $Z$  が奇数 ( 中性子数も奇数 ) の原子核に比べて結合エネルギーがやや大きい ( 図 3.2 参照 ) .
5. 質量数が小さい領域では , 陽子と中性子を同数ずつ (  $Z = N$  ) もとうとする傾向がある ( 図 3.3 参照 ) [ 4 ] .

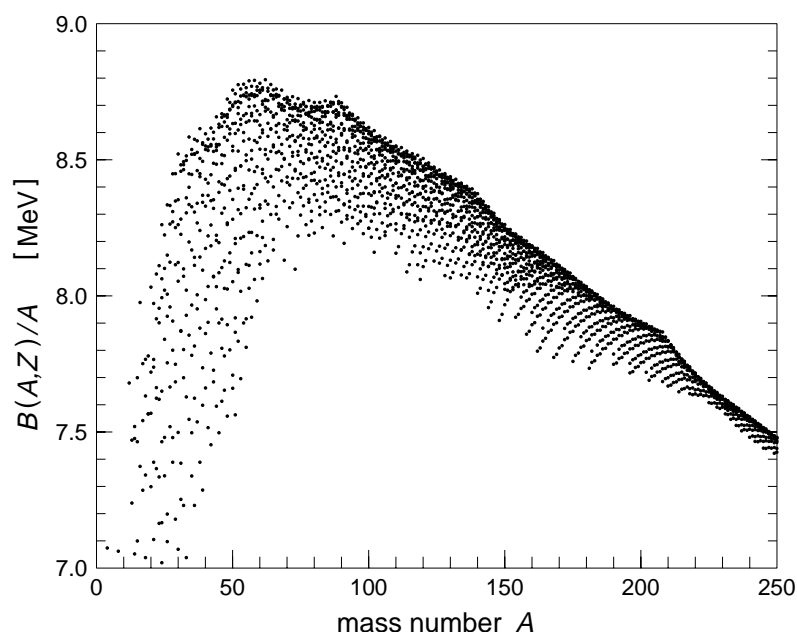


図 3.1: 中性子 , 陽子放出に対して安定な原子核の核子あたりの結合エネルギー

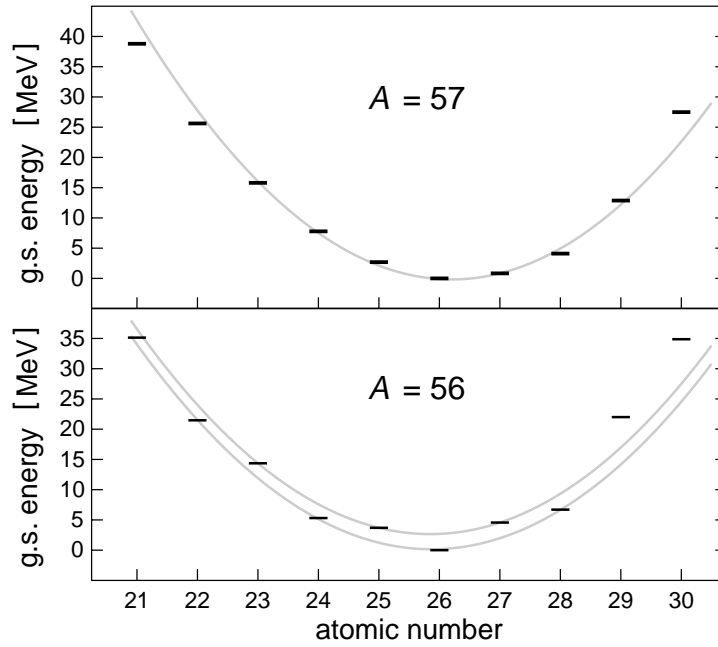


図 3.2: 質量数  $A = 57$  と  $A = 56$  の原子核

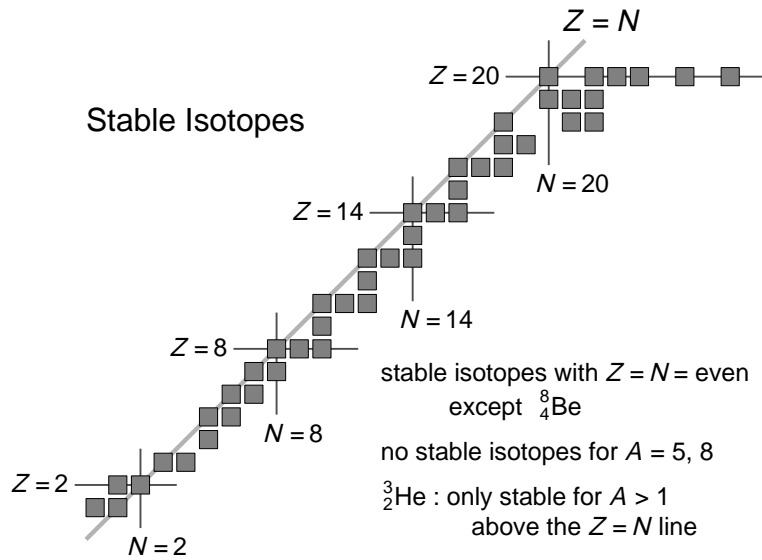


図 3.3:  $Z \leq 20$  の安定な原子核

## 3.2.2 半経験的質量公式

Weizsäcker によって提唱された半経験的な質量公式 (mass formula) [5] は原子核を一種の液滴とみなしている。

体積エネルギー (volume energy)

液体の凝集エネルギーは液体の量に比例すると考えられる。従って、原子核のエネルギーは最も粗い近似で質量数に比例する：

$$E_1 = -b_{\text{vol}} A \quad (3.12)$$

核子のあいだにはたらく核力は平均して引力である。引力であるから、自己束縛系として原子核が存在できるのである。従って、体積項にはエネルギーの減少 (結合エネルギーの増加) を意味する負号をつけてある。体積エネルギー項は、上に示した結合エネルギーの第1の特徴に対応している。

この特徴を結合エネルギーの飽和性 (saturation property) という。これは核子間にはたらく強い相互作用が短距離力であることを示唆している。1つの核子に着目すると、短距離力によってすぐ近くにいる少数の核子としか相互作用しない。従って、結合エネルギーは核子数に比例すると考えられる。もし、核子間にはたらく相互作用が長距離力であるならば、核子は原子核内の全ての核子と相互作用する。このときには、 $A$  個の核子からなる原子核の結合エネルギーは  $A$  個から2個取り出す組合せの数  ${}_A C_2 = A(A-1)/2 \approx A^2$  に比例する。

表面エネルギー (surface energy)

液滴の表面では表面張力がはたらいているので表面エネルギーが生じると考えられる。単位面積あたりの表面張力を  $\sigma$  とすると、半径  $R$  の球状液滴の表面エネルギーは表面張力  $\sigma$  と表面積  $4\pi R^2$  の積で与えられる：

$$E_2 = 4\pi R^2 \sigma \quad (3.13)$$

表面エネルギーは結合エネルギーを減少させる。液滴の体積が質量数に比例すると考えると、半径は質量数の  $1/3$  乗に比例する：

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (3.14)$$

従って、表面エネルギー項は

$$E_2 = 4\pi r_0^2 \sigma A^{2/3} = b_{\text{surf}} A^{2/3} \quad (3.15)$$

と表せる。

原子核が核子からなる系であると考え、核の内部にある核子にはそのまわりの核子から引力を受けている。しかし、表面にある核子には内部にある核子からだけ引力を受けている。従って、表面効果として、エネルギーを増加させる表面エネルギー項が現れる。質量

数とともに、体積は  $R^3$  に従って増加し、表面積は  $R^2$  に従って増加する。そのため、質量数が小さいと表面効果が大きく、核子あたりの結合エネルギーは減少する。

#### Coulomb エネルギー (Coulomb energy)

陽子は正の電荷  $e$  をもつので、陽子間には Coulomb 斥力がはたらき、原子核のエネルギーを増加させる。半径  $R$  の球に電荷  $Ze$  が一様に分布しているとすると、Coulomb 相互作用のエネルギーは静電気学の処方に従って計算できる：

$$E_3 = \frac{Z(Z-1)}{2} \iint \frac{\rho_0 dr \rho_0 dr'}{|r-r'|} \quad \rho_0 \frac{4\pi R^3}{3} = e \quad (3.16)$$

積分の前の因子  $Z(Z-1)/2$  は  $Z$  個の陽子から 2 個の陽子を取り出す組合せの数である。積分は  $r$  と  $r'$  について、それぞれ半径  $R$  の球の内部にわたって行う。積分を実行して

$$E_3 = \frac{Z(Z-1)e^2}{2} \frac{6}{5} \frac{1}{R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \approx b_{\text{Coul}} Z^2 A^{-1/3} \quad (3.17)$$

を得る。ここで、 $Z(Z-1)$  を  $Z^2$  で近似した。陽子数とともに Coulomb エネルギーは増加するので、核子あたりの結合エネルギーは減少する。

#### 対称エネルギー (symmetry energy)

Coulomb 相互作用を除くと、原子核は同数の陽子と中性子をもとうとする傾向があり、質量数が小さい領域で顕著に見られる。質量数が大きい領域では、Coulomb エネルギーの寄与が顕著になるが、この傾向は変わらないと考えられる。

原子核のエネルギーはこれに対応した対称エネルギー項を含まなければならない：

$$E_4 = c \left( \frac{N-Z}{N+Z} \right)^2 A = c \left( \frac{A-2Z}{A} \right)^2 A = b_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{2A} \quad (3.18)$$

$N/Z$  の比の値が同じで 2 倍の核子があれば、対称エネルギーも 2 倍になるはずであるので、対称エネルギーは質量数  $A$  に比例すると考えられる。上に仮定した対称エネルギー項は、 $Z=N$  のまわりに  $N-Z$  について展開して、最低次の 2 次の項だけをとったものである。

#### 対エネルギー (pairing energy)

結合エネルギーの特徴の 4 番目に示したように、原子核は同種の核子を偶数個もとうとする性質がある。実際、陽子数  $Z$  も中性子数  $N$  も奇数で安定な核種は、 ${}^2\text{H}$ ,  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^{10}\text{B}$  と  ${}^{14}\text{N}$  の 4 種だけである。この性質は対エネルギー (後述) の結果である。そこで、次の形の対エネルギー項を加えることにする：

$$E_5 = \Delta(A) = \begin{cases} -\delta(A) & Z = \text{偶数}, N = \text{偶数} \\ 0 & Z + N = \text{奇数} \\ \delta(A) & Z = \text{奇数}, N = \text{奇数} \end{cases} \quad (3.19)$$

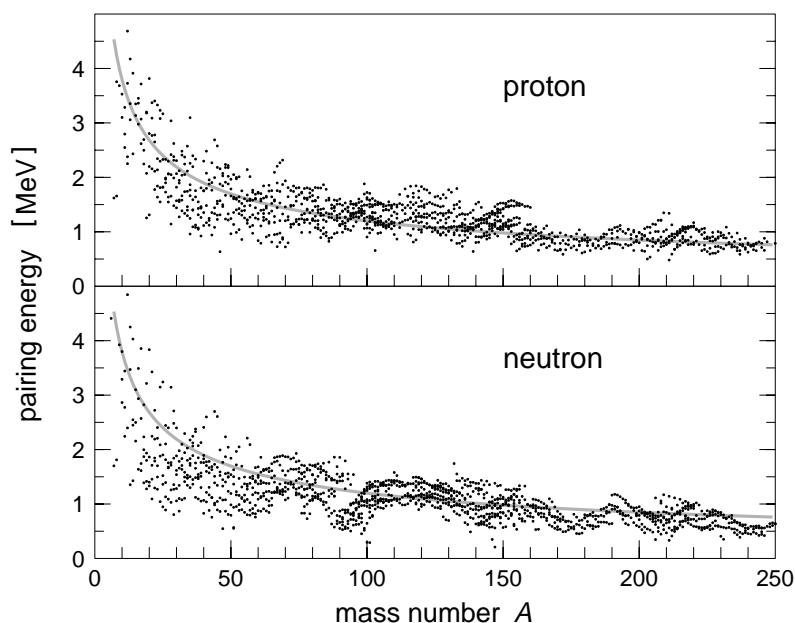


図 3.4: 対エネルギー．曲線は  $12/\sqrt{A}$

ただし，

$$\delta(A) = \frac{12}{\sqrt{A}} \text{ MeV} \quad (3.20)$$

とする．この質量数依存性と大きさは 図 3.4 に示すように，対エネルギーの実験値 [2] から経験的に決めたものである．

以上をまとめて，Weizsäcker の質量公式は次のように表される：

$$\begin{aligned}
 B(A, Z) &= b_{\text{vol}} A && \text{体積エネルギー} \\
 &- b_{\text{surf}} A^{2/3} && \text{表面エネルギー} \\
 &- b_{\text{Coul}} \frac{Z^2}{A^{1/3}} && \text{Coulomb エネルギー} \\
 &- b_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} && \text{対称エネルギー} \\
 &- \Delta(A) && \text{対エネルギー}
 \end{aligned} \quad (3.21)$$

パラメータの値は Green [6] によって求められた．その後，多くの原子核の質量が測定され，実験値を再現するパラメータとして，たとえば，次の値の組が用いられている：

$$b_{\text{vol}} = 15.56, \quad b_{\text{surf}} = 17.23, \quad b_{\text{Coul}} = 0.697, \quad b_{\text{sym}} = 23.29 \quad (3.22)$$

単位は MeV である．



### 3.3 安定な原子核

#### 3.3.1 ベータ安定線

Weizsäcker の質量公式には陽子数  $Z$  に依存する 2 つの項，すなわち，Coulomb エネルギー項と対称エネルギー項がある．質量数  $A$  が等しい原子核の中で結合エネルギーが最大の核種は

$$\left. \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} \right|_{A=\text{一定}} = 0 \quad (3.23)$$

によって決定され，その陽子数  $Z^*$  は

$$Z^* = \frac{A}{2 + \frac{b_{\text{Coul}} A^{2/3}}{b_{\text{sym}}}} \quad (3.24)$$

で与えられる．

最も安定な原子核の分布は 2 つのパラメータの比  $b_{\text{Coul}}/b_{\text{sym}}$  が決定している．対称エネルギーは  $Z = N$  である原子核を安定にしようとするが，Coulomb エネルギーが増加すると  $Z^*$  が大きくなり，安定な原子核は  $Z = N$  の線から中性子が多い方へ離れる．それぞれの質量数  $A$  に対する  $Z^*$  を示したのが図 3.5 である．この図には自然界に存在する安定同位体を小さな黒い四角形で表してある．詳細に見るとずれはあるものの，全体としては安定な同位体の分布を良く再現していることがわかる．なお，それぞれの質量数に対する最も安定な原子核は，下に述べるベータ崩壊に対して安定な原子核であり，これらの原子核をつないだ線を  $\beta$  安定線 ( $\beta$ -stability line) という．

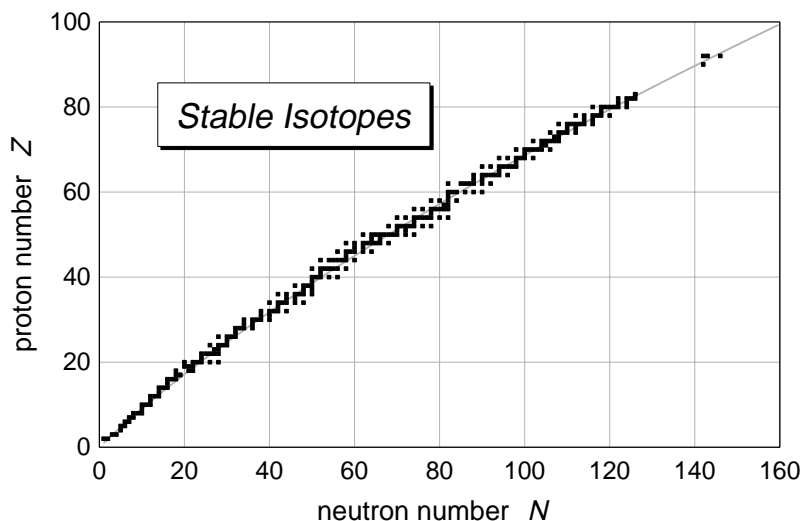


図 3.5: 安定な原子核．曲線は (3.24) 式．

図 3.6 に、安定な原子核の核子あたりの結合エネルギーを示す [ 2 ] . 質量数の小さい領域を除けば、実験値と質量公式による値とは良く一致している . ただし、質量数  $A \approx 90, 140, 210$  付近では実験値の方が大きくなっている . これは、下に示すように殻効果である .

図 3.7 には安定な原子核における結合エネルギーを成分ごとに示す . 主に、表面エネルギーと Coulomb エネルギーが体積エネルギーを部分的に相殺し、核子あたりの結合エネルギーを 8 MeV 程度に減少させていることがわかる . 対称エネルギーの効果が小さいように見えるが、対称エネルギー項によって安定な原子核が形成されているのであり、この項の役割は大きい .

### 3.3.2 自然界に存在する安定同位体

理科年表 [ 4 ] には 287 種の安定同位体があげられている . そのうち、207 は等しい質量数をもつ原子核のなかで、最も安定な核種である ( $A = 1$  から  $A = 209$  まで .  $A = 5$  と  $A = 8$  を除く) . 厳密には安定ではないが、トリウム  $^{232}\text{Th}$  及び 3 つのウランの同位体  $^{234,235,238}\text{U}$  が安定同位体に入れられている . 残りのほとんどは二重ベータ崩壊 ( 後述 ) する原子核である .

また、自然界には放射性同位体も存在し、次の 3 つのグループに分類される [ 4 ] .

- 1) ウラン ( $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$  ) , トリウムのような長寿命の放射性元素を親とする放射壊変系列に属する核種 .
- 2)  $^{40}\text{K}$  のように放射壊変系列に属さない長寿命の核種 .
- 3) 宇宙線により生成される核種 . 高層大気中では、宇宙線が窒素、酸素、アルゴンなどの原子核に衝突して核反応を起こしたり、その際放出された中性子が 2 次的な核反応を起こして放射性核種を生じる . このグループに属するのは  $^3\text{H}$ ,  $^7\text{Be}$ ,  $^{10}\text{Be}$ ,  $^{14}\text{C}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{32}\text{P}$ ,  $^{35}\text{S}$ ,  $^{36}\text{Cl}$  などである .

2 番目のグループに属する核種を下の表に示す . 壊変様式については次節に述べる .

表 3.2 放射壊変系列に属さない天然一次放射性核種

核種	半減期	壊変様式	核種	半減期	壊変様式
$^{40}\text{K}$	$1.28 \times 10^9 \text{ y}$	$\beta^-$ , EC	$^{148}\text{Sm}$	$7 \times 10^{15} \text{ y}$	$\alpha$
$^{87}\text{Rb}$	$4.8 \times 10^{10} \text{ y}$	$\beta^-$	$^{152}\text{Gd}$	$1.1 \times 10^{14} \text{ y}$	$\alpha$
$^{113}\text{Cd}$	$9 \times 10^{15} \text{ y}$	$\beta^-$	$^{176}\text{Lu}$	$3.6 \times 10^{10} \text{ y}$	$\beta^-$
$^{115}\text{In}$	$4.4 \times 10^{14} \text{ y}$	$\beta^-$	$^{174}\text{Hf}$	$2.0 \times 10^{15} \text{ y}$	$\alpha$
$^{123}\text{Te}$	$1.3 \times 10^{13} \text{ y}$	EC	$^{187}\text{Re}$	$5 \times 10^{10} \text{ y}$	$\beta^-$
$^{138}\text{La}$	$1.3 \times 10^{11} \text{ y}$	$\beta^-$ , EC	$^{186}\text{Os}$	$2 \times 10^{15} \text{ y}$	$\alpha$
$^{144}\text{Nd}$	$2.4 \times 10^{15} \text{ y}$	$\alpha$	$^{190}\text{Pt}$	$6.0 \times 10^{11} \text{ y}$	$\alpha$
$^{147}\text{Sm}$	$1.06 \times 10^{11} \text{ y}$	$\alpha$			

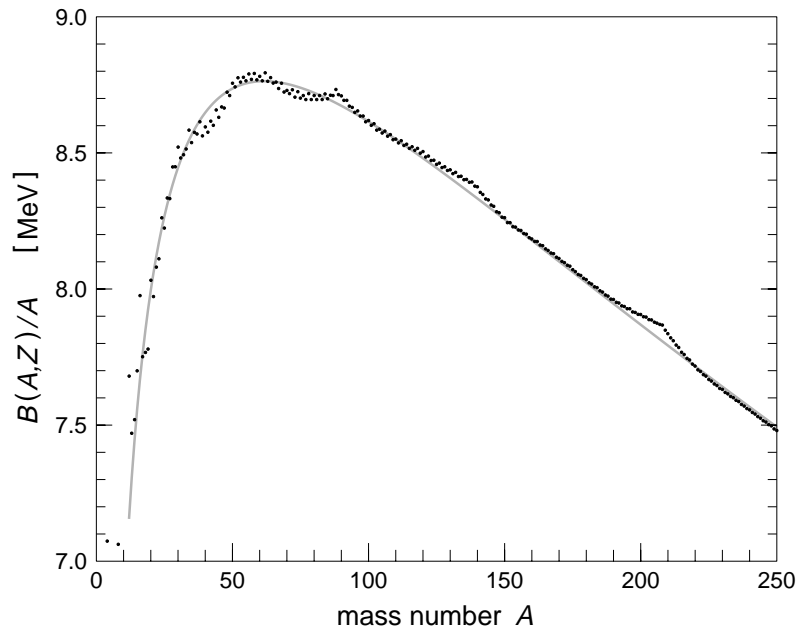


図 3.6: 安定な原子核の核子あたりの結合エネルギー

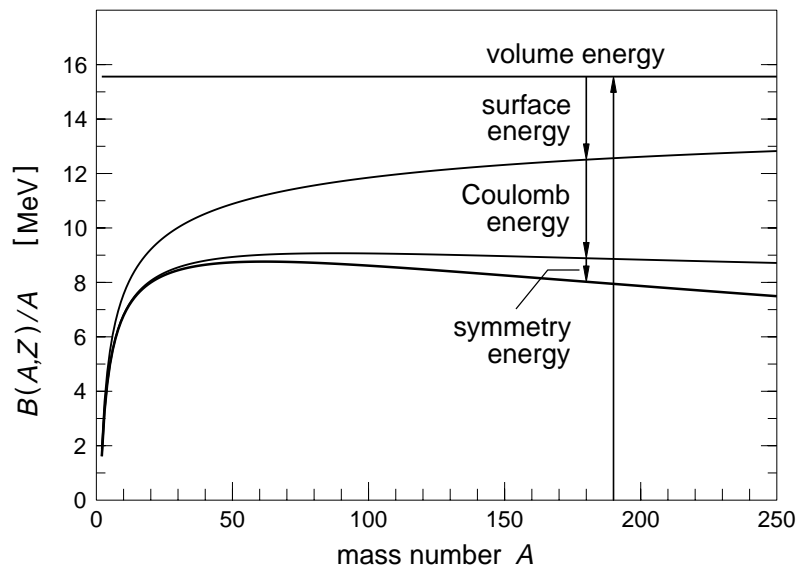


図 3.7: 安定な原子核において Weizsäcker の質量公式の各項が占める割合

この表に示した核種は安定ではなく、ベータ崩壊、あるいはアルファ崩壊によって別の核種に変わっていく。しかし、寿命が宇宙の年齢 ( $1.5 \times 10^8$  年程度) よりも長く、宇宙・星の進化の過程で生成された原子核が、未だに残留しているのである。

### 3.3.3 殻効果 (shell effect)

Weizsäcker の半経験的質量公式は、全体として実験データを良く再現するが、実験値と詳細に比較してみると、特徴的な違いが見られる。たとえば、図 3.6 に示した、安定な原子核の核子あたりの結合エネルギーにおいては、比較的質量数の小さい領域でずれがあり、また、質量数が  $A = 90, 140, 210$  あたりでは、測定値が系統的に質量公式の値より大きくなっている。そこで、両者の違い

$$\Delta E(A, Z) = B(A, Z)_{\text{測定値}} - B(A, Z)_{\text{質量公式}} \quad (3.25)$$

を計算してみると 図 3.8 のようになる。図の上のパネルは、中性子数が等しい原子核を線で結んで陽子数に対する  $\Delta E$  の変化を示してあり、下のパネルでは陽子数が等しい原子核を線で結んで中性子数に対する  $\Delta E$  の変化を示してある。どちらの場合も、 $Z, N = 28, 50, 82$  の近傍で  $\Delta E$  は正に大きくずれており、また、下のパネルでは  $N = 126$  近傍において同様な現象が見られる。これらの特徴的な陽子数・中性子数は、後の章で見るように 魔法数 と呼ばれ、原子核内の核子が殻構造を持つことを示唆している。

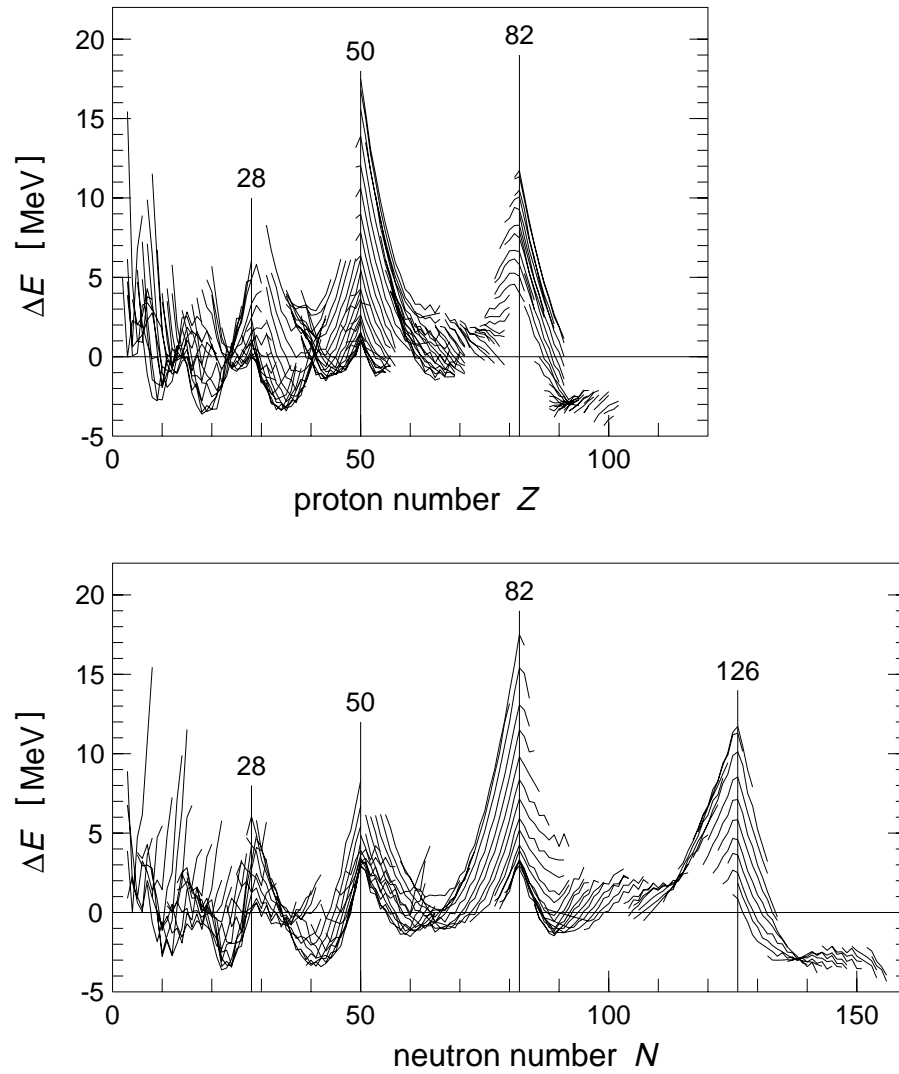


図 3.8: 質量の実験値と Weizsäcker の質量公式による値の差

### 3.4 第 3 章の参考文献

1. D.E. Groom *et al.*, European Physical Journal C15 (2000) 1,  
available on the Particle Data Group WWW page (URL <http://pdg.lbl.gov> )
2. The 1995 Update to the Atomic Mass Evaluation,  
available on <http://www.nndc.bnl.gov/nndcscr/masses/>
3. *Table of Isotopes*, Eighth Edition, R.B. Firestone, Ed. V.S. Shirley, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996)
4. 理科年表 ( 丸善 , 2001 )
5. C.F. von Weizsäcker, Z. Phys. 96 (1935) 431  
H.A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 8 (1936) 82
6. A.E.S. Green and D.F. Edwards, Phys. Rev. 91 (1953) 46;  
A.E.S. Green, Phys. Rev. 95 (1954) 1005