

第 2 章 Rutherford 散乱

2.1 原子模型

物質は原子から構成されている。原子の構造は 19 世紀後半から数十年のあいだに多くの研究者の努力によって解明されてきた。その歴史を簡単に下にまとめた。中でも、Rutherford の果たした役割は大きく、原子の中心に小さな原子核が存在し、そのまわりを電子がまわっているという模型を確立した。

原子模型の解明は量子論の発展と切り離し考えることはできない。原子核のまわりを電子がまわっているとすると、古典電磁気学によれば、加速度運動（たとえば円運動）する電荷をもった粒子は電磁波を放射してエネルギーを失っていく。その結果、電子は正電荷をもった原子核にくっついてしまい、原子の大きさを維持できない。しかし、現実には、電子は電磁波を放射することなく原子核のまわりをまわり続け、原子の大きさを保っている。この古典電磁気学に矛盾する事実を、N. Bohr が量子論の考え方を適用することによって説明した。原子核のまわりをまわる電子の軌道は古典的には無数に可能であるが、原子のようなミクロの世界では、粒子である電子は波動としての側面ももち、角運動量が量子化され、エネルギーも量子化される。その結果、量子論的に許される軌道にある電子は、エネルギーを失わない。このような状態を電子の定常状態という。定常状態は、固有の量子化された角運動量とエネルギーをもつ。許される幾つかの定常状態の 1 つから別の定常状態へ電子が遷移するときには、始状態と終状態のエネルギーの差に等しいエネルギーをもつ光を放出、あるいは吸収する。従って、原子が放射する光は、その原子に固有のエネルギーをもつ。

以下の節では、Rutherford 散乱を中心に、その古典論と量子論をともに示す。さらに、原子核の大きさと密度分布などについて述べ、原子核のミクロの世界で量子力学がどのような役割を果たしているかを示していく。

1859 Kirchhoff と Bunsen：分光学の基礎。水素をはじめとして多くの元素から放出される光の波長を測定。光の波長はそれぞれの元素に特有であることを発見。

1861 Maxwell：電磁場の方程式（Maxwell 方程式）、光の電磁波説。

1885 Balmer：水素のスペクトル系列の公式。水素から放出される光の波長 λ が次の簡単な式で表されることを発見（Balmer 系列）。

$$\lambda = 364.56 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ nm}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Lyman, Paschen による、水素の別の系列。

1890 Rydberg : スペクトル公式 .

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = n' + 1, n' + 2, \dots$$

水素の場合, $n' = 1$ は Lyman 系列, $n' = 2$ は Balmer 系列, $n' = 3$ は Paschen 系列に対応する. R は Rydberg 定数で, 水素の場合 $R = 109677.58 \text{ cm}^{-1}$.

1896 Zeeman : 正常 Zeeman 効果 . 光源に非常に強い磁場をかけると, 元素に固有のスペクトル線が分かれる .

Zeeman と Lorentz : Zeeman 効果は原子内にある負の電荷をもつ粒子が光を出すと結論 . 粒子の比電荷を測定 : $|e|/m = 1.6 \times 10^{11} \text{ C/kg}$.

1897 Thomson : 陰極線が負の電荷をもつ粒子からできていることを示す . この粒子を電子 (electron) と名づける . 電子の比電荷は $|e|/m = 1.7 \times 10^{11} \text{ C/kg}$.

1904 Thomson : 原子模型 . 正の電荷が原子全体に均一に分布し, その正電荷の海に電子が浮かんでいる .

1904 長岡半太郎 : 原子模型 . 原子の中で正の電荷は小さな粒となって固まっていて, 電子はそのまわりを土星の環のようにまわっている .

1908 Rutherford : アルファ粒子がヘリウムの原子核であることを実証 .

1909 Geiger と Marsden : アルファ粒子の金の薄膜による散乱 [1] . ほとんどのアルファ粒子は小さい角度にしか散乱されないが, 少数ではあるが, 90 度以上散乱されることがある .

1911 Rutherford : Rutherford の散乱公式を導出 . 原子核の存在を指摘 [2] .

1913 Geiger と Marsden : アルファ粒子の散乱で Rutherford の散乱公式が成り立つことを検証 [3] .

Chadwick : 異なる元素を標的として微分断面積を詳しく測定 . Rutherford 散乱の式と比較して Z の値を求めた . その結果, Z の値は原子番号にほぼ等しいことを示す .

1913 N. Bohr : 原子構造の量子仮説 . Planck の量子論を原子に適用して, 電子は特定の軌道だけをとって運動する .

1932 Chadwick : 中性子の発見 [4] .

2.2 Rutherford 散乱 (古典論)

金の薄膜によるアルファ粒子の散乱は、電荷をもったアルファ粒子が、金の原子核による Coulomb ポテンシャルで散乱されたのである。ここでは、この散乱を古典力学でどのように表されるかを見ていく。また、実際に用いられた、 ^{214}Po の崩壊から得られるアルファ粒子と金の原子核の散乱の場合を想定して、数値も示していく。

2.2.1 衝突径数

運動方程式

標的の原子は全体として電氣的に中性であるから、電荷をもったアルファ粒子が遠くから標的原子に近づいていくときには電氣的な力を受けない。しかし、アルファ粒子が原子を構成する電子群をつき抜けていくに従い、原子核からの Coulomb 斥力

$$f(r) = \frac{a}{r^2}, \quad a = 2Ze^2 \quad (2.1)$$

を感じるようになる。ここで、 $a = 2Ze^2$ は標的核とアルファ粒子の電荷の積である。標的核に座標原点をとり極座標を用いると、アルファ粒子の運動方程式は動径方向と角度方向に分けて次のように書ける：

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = f(r) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 m はアルファ粒子の質量である。Coulomb 力は中心力であるので (2.2) の第 2 式から角運動量は保存する：

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{一定} \quad (2.3)$$

これを、動径方向の運動方程式である (2.2) の第 1 式に代入して次の方程式を得る：

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{mr^3} = f(r) = \frac{a}{r^2} \quad (2.4)$$

これは r だけ関する微分方程式で、 φ を含まない。

衝突径数 (impact parameter)

r が十分大きい遠方では、Coulomb 力 $f(r)$ は無視できて、アルファ粒子は力を受けずに等速直線運動している。このときの速度を v とすると、アルファ粒子のエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.5)$$

である。Coulomb 力は中心力であり、従って保存力であるのでエネルギー E は保存する。

アルファ粒子の運動量を $p = mv$ とすると、角運動量の大きさは

$$L = pb = mvb \quad (2.6)$$

と表せる．ここで， b は Coulomb 力がないときに，等速直線運動するアルファ粒子が標的核に最も近づく距離であり，衝突径数と呼ばれる（図 2.1 参照）．エネルギーの式 (2.5) と角運動量の式 (2.6) から v を消去して

$$b = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \quad (2.7)$$

が得られる．衝突径数 b はエネルギー E と角運動量 L により定まる．エネルギーが一定であるとき，衝突径数と角運動量の大きさは比例する．

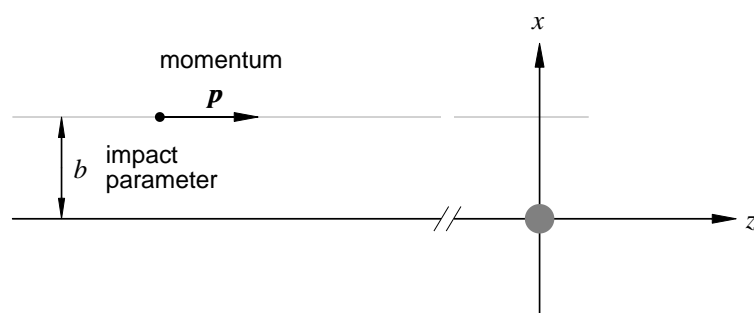


図 2.1: 衝突径数

^{214}Po の崩壊で放出されるアルファ粒子の運動エネルギーとアルファ粒子の質量を比較すると

$$E = 5.4 \text{ MeV} \ll mc^2 = 3727 \text{ MeV} \quad (2.8)$$

であるから，アルファ粒子の運動は非相対論的であり，速度の大きさは

$$\frac{v}{c} = 0.054 \quad \text{より} \quad v = 1.6 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (2.9)$$

である．

2.2.2 エネルギー保存と運動が許される範囲

エネルギーの保存

動径方向の運動方程式 (2.4) に dr/dt をかけて時間 t について積分（エネルギー積分）すると，力学的エネルギー E の保存を表す式

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + W(r) = E \quad (2.10)$$

が得られる．ここで， $W(r)$ を有効ポテンシャルといい，

$$W(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad V(r) = \frac{a}{r^2} \quad (2.11)$$

$V(r)$ は真の力のポテンシャル (Coulomb ポテンシャル) で, 第 2 項は遠心力ポテンシャルである. (2.10) の第 1 項は非負であり, 有効ポテンシャル $W(r)$ は正であるので, エネルギーも正である: $E > 0$.

最接近距離

運動が許される範囲は, $(dr/dt)^2 \geq 0$ より,

$$E - W(r) \geq 0 \quad (2.12)$$

で決まる. r には最小値 r_{\min} があるが, 上限はない. r_{\min} は座標原点 (原子核) への最接近距離であり, 次の式で決定される (図 2.2 参照):

$$W(r_{\min}) = E \quad (2.13)$$

Coulomb ポテンシャルの具体的な形を代入すると, r_{\min} は

$$r^2 - \frac{a}{E} r - \frac{L^2}{2mE} r^2 - 2b_0 r - b^2 = 0 \quad (2.14)$$

の解である. b は衝突径数であり, また, 次の式で定義した b_0 も長さの次元をもつ量である:

$$b_0 = \frac{a}{2E} \quad (2.15)$$

$r_{\min} > 0$ より,

$$r_{\min} = \frac{a}{2E} + \sqrt{\left(\frac{a}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}} = b_0 + \sqrt{b_0^2 + b^2} \quad (2.16)$$

を得る.

^{214}Po からのアルファ粒子と金の原子核の場合,

$$b_0 = \frac{2Ze^2}{2E} = Z\alpha \frac{\hbar c}{E} = 79 \cdot \frac{1}{137.036} \cdot \frac{197.32 \text{ MeVfm}}{5.4 \text{ MeV}} = 21 \text{ fm} \quad (2.17)$$

となる. ここで, $\alpha = e^2/(\hbar c)$ は微細構造定数 (fine structure constant) である. また, 長さの単位として $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ を用いた. なお, 金の原子核の半径は約 7 fm である. 図 2.2 は衝突径数が $b = 20 \text{ fm}$ のときを示す.

2.2.3 アルファ粒子の軌道

アルファ粒子の運動方程式 (2.4) の解 $r(t)$ を求めるのは簡単ではないが, 軌道 $r(\varphi)$ は比較的容易に求められる. 以下に, その導出を示すが, ゴールは (2.23) である.

まず, 変数変換

$$r = \frac{1}{u} \quad (2.18)$$

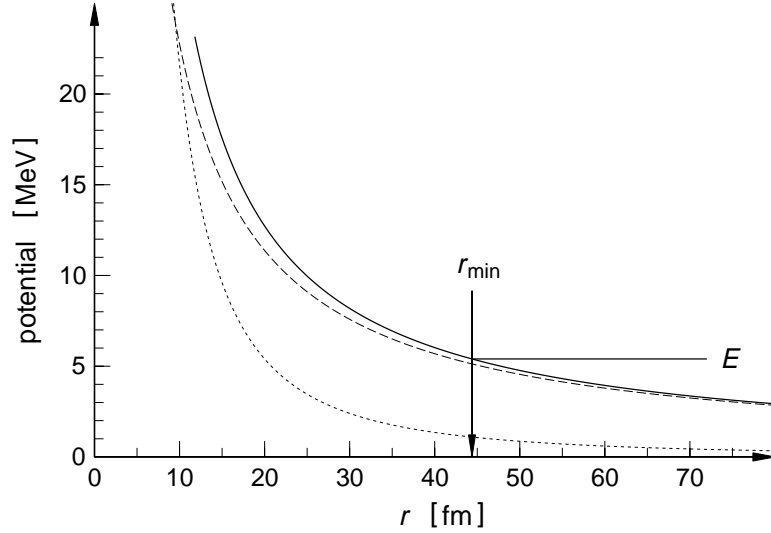


図 2.2: 有効ポテンシャルと運動が許される範囲 $r \geq r_{\min}$. 破線は Coulomb ポテンシャル , 点線は遠心力ポテンシャルを表す .

をして , (2.4) の第 1 項の微分を計算する :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} \quad (2.19)$$

時間についてもう一度微分して ,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} \right) = -\frac{L}{m} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \right] \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2} u^2 \quad (2.20)$$

この式を , 変数変換した運動方程式に代入して

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{am}{L^2} \quad (2.21)$$

を得る .

上の非斉次の微分方程式の一般解は , 右辺を 0 とした斉次方程式の一般解と , もとの方程式の特解の和である . 前者は単振動解であり , 後者の 1 つは $u = -am/L^2$ である . 従って (2.21) の解は , A と φ_0 は積分定数として

$$u = A \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{am}{L^2} \quad (2.22)$$

である . 偏角 $\varphi \rightarrow +0$ で $r \rightarrow \infty$, $\varphi = \varphi_0$ で r が最小値をとるとすると , 求める解 , すなわち , アルファ粒子の軌道は

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{am} \frac{1}{\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) - 1} \quad \varepsilon = \frac{1}{\cos \varphi_0} > 1 \quad (2.23)$$

で与えられる。この軌道は偏角 $\varphi = \varphi_0$ の半直線に対して対称である。なお、ここでは図 2.3 に示すように、入射方向を偏角 $\varphi = 0$ とし、 φ は紙面上で時計回りに増加するとした。

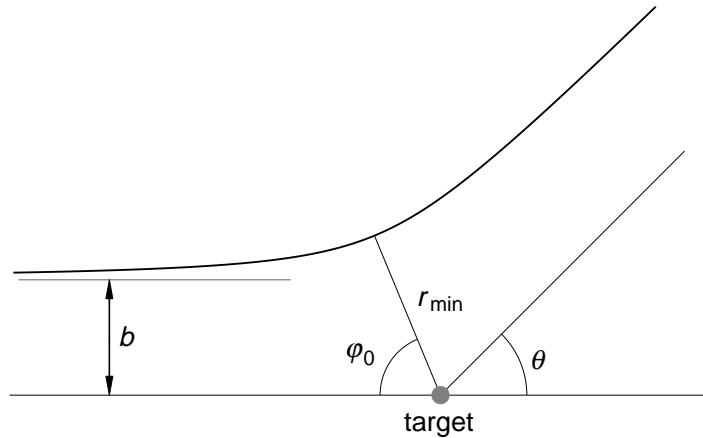


図 2.3: Rutherford 散乱。 θ は散乱角。

座標原点 (標的核) に最接近するのは $\varphi = \varphi_0$ のときであり、このときの距離は

$$r_{\min} = \frac{L^2}{am(\varepsilon - 1)} \quad (2.24)$$

である。また、衝突径数 b は定義から

$$b = \lim_{\varphi \rightarrow 0} r(\varphi) \sin \varphi = \frac{L^2}{am} \frac{1}{\varepsilon \sin \varphi_0} = \frac{L^2}{am \tan \varphi_0} \quad (2.25)$$

と表される。 $L^2 = 2mEb^2$ であることを考慮すると、これは、散乱角の項で示す衝突径数 b の表式 (2.35) と一致する。

2.2.4 散乱角

アルファ粒子のエネルギーと衝突径数が与えられると、散乱角は一意的に決まる。求める式は (2.34) である。以下に導出を示す。

偏角 φ と動径 r の関係

エネルギーと衝突径数から散乱角を決める関係式を求めるには、

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} \quad (2.26)$$

を r について積分すればよい。右辺の第 1 因子は (2.3) を用いて、第 2 因子はエネルギー保

存の式 (2.10) を用いて書き直す。その結果、

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))}} = \pm \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \quad (2.27)$$

が得られる。ここで、 \pm の符号は dr/dt の符号に由来し、 $-$ 符号はアルファ粒子が標的核に近づいてくるとき、 $+$ の符号は遠ざかるときに対応する。

偏角の積分

入射してくるアルファ粒子が十分遠方にあるときの偏角は $\varphi = 0$ であり、Coulomb ポテンシャルに散乱された後、十分遠方に遠ざかったときの偏角は $\varphi = 2\varphi_0$ であるから、 $2\varphi_0$ は上の式を r について $+\infty \rightarrow r_{\min} \rightarrow +\infty$ と、 dr/dt の符号に注意して積分すればよい(図 2.3 参照):

$$\begin{aligned} 2\varphi_0 &= \int_{\infty}^{r_{\min}} -\frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} + \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \\ &= \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - W(r)}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで、衝突径数 b を用いて変数変換

$$r = \frac{b}{u} \quad \longrightarrow \quad dr = -\frac{b}{u^2} du \quad (2.29)$$

する。このとき、上の積分の被積分関数の中で

$$E - W(b/u) = E - \frac{L^2 u^2}{2mb^2} - \frac{au}{b} = E \left(1 - u^2 - \frac{a}{bE} u \right) = E \left(1 - u^2 - \frac{2b_0}{b} u \right) \quad (2.30)$$

となる。従って積分は

$$\begin{aligned} 2\varphi_0 &= \frac{2L}{\sqrt{2mE}} \left(-\frac{1}{b} \right) \int_{b/r_{\min}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{1 - (2b_0/b)u - u^2}} \\ &= 2 \int_0^{b/r_{\min}} \frac{du}{\sqrt{1 - (2b_0/b)u - u^2}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

と書き直せる。この積分は実行できて

$$2\varphi_0 = 2 \left[\tan^{-1} \frac{u + b_0/b}{\sqrt{1 - (2b_0/b)u - u^2}} \right]_0^{b/r_{\min}} = \pi - 2 \tan^{-1} \frac{b_0}{b} \quad (2.32)$$

を得る。ここで、 r_{\min} の式 (2.16) を用いた。

散乱角

図 2.3 に示すように、偏角 $\varphi = 0$ から標的核に近づいてくるアルファ粒子の(十分遠方で

の)速度の向きは $\varphi = \pi$ である。このアルファ粒子が偏角 $\varphi = 2\varphi_0$ の向きに散乱されたとき、散乱角 θ は

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 \quad (2.33)$$

である。従って、散乱角は

$$\theta = 2 \tan^{-1} \frac{a}{2Eb} \quad (2.34)$$

で与えられる。このように、散乱角 θ はエネルギー E と衝突径数 b によって決定される。衝突径数の違いによって散乱角がどのように変化するかを図 2.4 に示す。

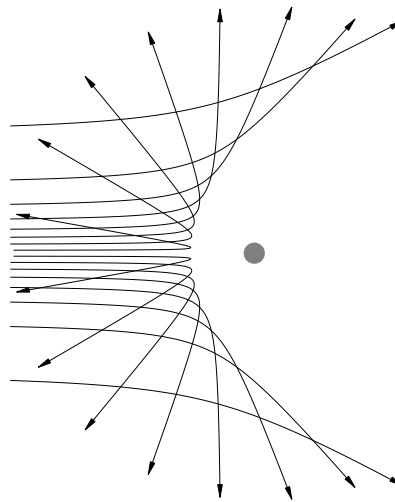


図 2.4: 異なる衝突径数による Rutherford 散乱

散乱角の式 (2.34) は

$$b = \frac{a}{2E} \frac{1}{\tan(\theta/2)} \quad (2.35)$$

と書き直せる。エネルギー E が既知のアルファ粒子の散乱角 θ を測定すると、衝突径数 b が得られる。また、最接近距離 r_{\min} も散乱角 θ の関数として表すことができ、

$$r_{\min}(\theta) = \frac{a}{2E} \left(1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right) \quad (2.36)$$

の関係式が成り立つことが容易に示せる。

2.2.5 散乱断面積

ここまでは、1つのアルファ粒子の散乱を考え、衝突径数と散乱角の関係を求めてきた。しかし、現実には、衝突径数を定めてアルファ粒子を入射することはできない。原子の大きさでも 10^{-10} m 程度しかなく、原子核はそれよりも小さいと考えられるからである。そこ

で、一様な数密度の多数のアルファ粒子を一定の速度で入射させ、ある散乱角の向きにどのくらいの割合でアルファ粒子が散乱されるかを測定する。

座標原点に標的核があり、多数のアルファ粒子が z 軸と平行に一定の速度で z 軸の正の向きに入射してくる場合を考える。入射方向に垂直な単位面積を単位時間あたりに通過するアルファ粒子の数を N とする。このとき、衝突径数が b と $b + db$ のあいだの円環を単位時間あたりに通るアルファ粒子の数は

$$dN = 2\pi b db N \quad (2.37)$$

である。

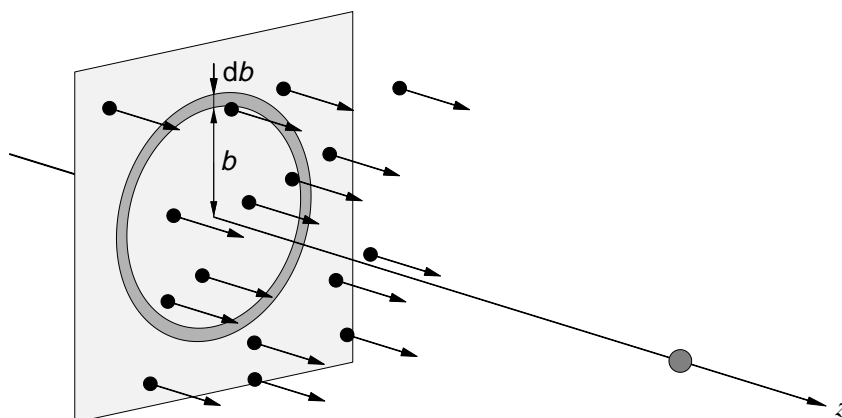


図 2.5: 一様な密度で同じ速度をもつ入射粒子

アルファ粒子のエネルギーは一定であるとしているので、衝突径数が b と $b + db$ のあいだにある粒子の散乱角は、(2.34) によって定められる θ と $\theta + d\theta$ のあいだにある。すなわち、単位時間あたりに散乱角 θ と $\theta + d\theta$ のあいだに散乱されるアルファ粒子の数は、

$$dN = 2\pi b \frac{db}{d\theta} d\theta N \quad (2.38)$$

である。 N の次元は [面積・時間] $^{-1}$ であるので、 dN の次元は [時間] $^{-1}$ である。

ここで、立体角を導入する。まず、原点を中心とする半径が R の球面を考える。この球面を、散乱角 θ の曲面（円錐状）と $\theta + d\theta$ の曲面が切り取る部分は、半径が $2\pi \sin \theta R$ で幅が $R d\theta$ の帯状部分である。この帯状部分の面積を R^2 で割ったものが立体角である。すなわち、散乱角が θ と $\theta + d\theta$ のあいだの立体角は

$$d\Omega = \frac{2\pi \sin \theta R \cdot R d\theta}{R^2} = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (2.39)$$

である。なお、 θ について 0 から π まで積分すると球面全体に対する立体角が得られ、その値は 4π になる。

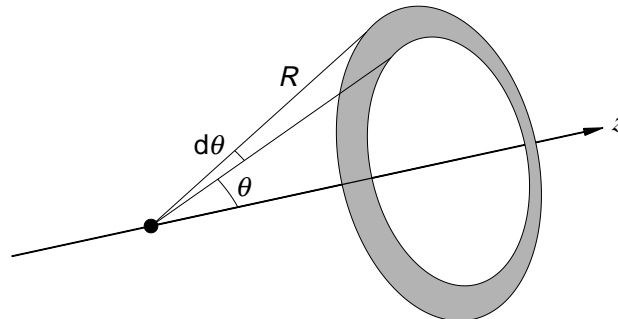


図 2.6: 散乱の立体角

散乱角が θ と $\theta + d\theta$ のあいだに散乱されるアルファ粒子の数を表す式 (2.38) は立体角 $d\Omega$ を用いて次のように書きなおせる:

$$dN = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} d\Omega N \quad (2.40)$$

ここで, N に対する dN の比を $d\sigma$ と書く:

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} d\Omega \quad (2.41)$$

dN と N の次元から, σ が面積の次元をもつことがわかる. σ を 断面積 (cross section) という. また,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \quad (2.42)$$

を 微分断面積 (differential cross section) という.

Rutherford の散乱公式

上に示した微分断面積の式 (2.42) は, アルファ粒子が Coulomb 力によって散乱されるということを陽には含んでいない. すなわち, 一般的に成り立つ式であると言える. 力の性質は, 散乱角と衝突径数の関係を表す $db/d\theta$ に含まれている. 式 (2.35) から導関数 $db/d\theta$ を求めると, Coulomb 力によるアルファ粒子の微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{a}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.43)$$

が得られる. これを Rutherford の散乱公式 という. 金 ($Z = 79$) の原子核による, エネルギー $E = 5.4$ MeV のアルファ粒子の Rutherford 散乱の微分断面積を 図 2.7 に示す. 縦軸の単位は barn/sr で, barn = 10^{-28} m² は面積の単位, sr は立体角の単位である.

Rutherford の散乱公式は, 散乱角が小さい前方散乱で微分断面積が大きな値をとり, $\theta = 0$ で無限大になる. 従って, 微分断面積の全立体角にわたる積分は発散する. これは, Coulomb ポテンシャルが $1/r$ 依存性を持つため, アルファ粒子が標的核からどんなに離れていても

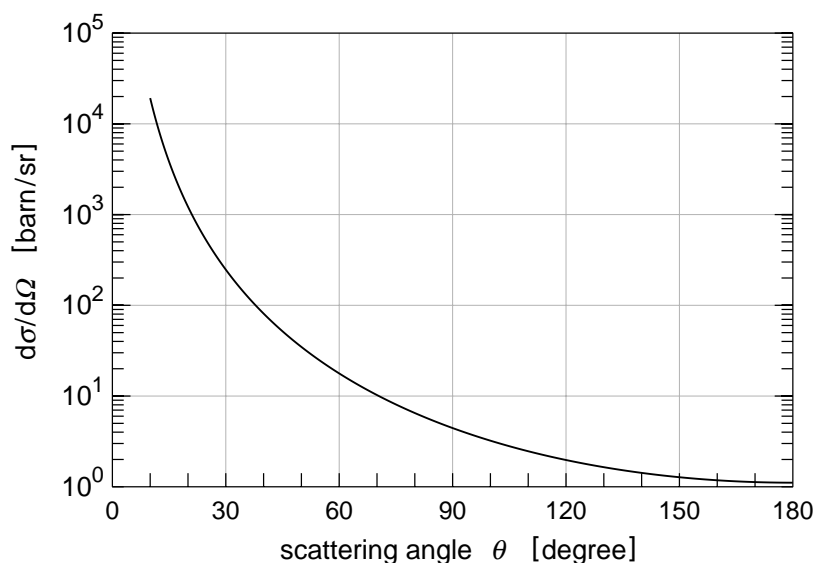


図 2.7: 金の原子核によるアルファ粒子の Rutherford 散乱の微分断面積 .

力の作用を受けるためである．現実には，正電荷をもつ原子核のまわりには負電荷をもつ電子が存在し，遠くから原子を見れば電气的に中性である．すなわち，電子の負電荷によって原子核の正電荷が遮蔽され，アルファ粒子が標的核からある程度離れると，Coulomb 力の作用を受けなくなる．この遮蔽効果を考慮に入れれば，散乱角が小さい前方への微分断面積は有限に留まり，全立体角にわたる積分も発散しない．

2.2.6 Rutherford 散乱の実験

Rutherford の散乱公式は，点状の正電荷がつくる Coulomb ポテンシャルによる散乱という仮定に基づいている．しかし，原子核は有限の大きさをもっている．従って，もし，現実の散乱実験における微分断面積が散乱公式と一致しないならば，それは，点状であるという仮定が正しくないことになる．すなわち，アルファ粒子の最接近距離よりも正電荷の広がりが大きいことを示唆する．一方，測定した微分断面積が散乱公式と一致するならば，原子核の大きさがアルファ粒子の最接近距離よりも小さいことを意味する．

1909 年に，Geiger と Marsden は Rutherford の指導のもとに， ^{214}Po の崩壊によって生じるアルファ粒子を金の薄膜に衝突させ，散乱断面積を測定する実験を行った．1911 年に，Rutherford は散乱公式を導き，測定結果と散乱公式が一致することを示した．また，金の原子核の電荷を Ze としたとき， Z が金の原子番号である 79 に誤差の範囲で一致することが得られた．

アルファ粒子が原子核に最接近する距離は，(2.36) より， $\theta = 180$ 度のとき最小になる．

その値は, $Z = 79$, $E = 5.4 \text{ MeV}$ として,

$$r_{\min}(\theta = \pi) = \frac{a}{2E} = 42 \text{ fm} \quad (2.44)$$

となる. これは, 金の原子核の半径が 42 fm よりも小さいことを意味する. 原子の大きさが 10^5 fm であることを考えると, 原子核が極めて小さいことがわかる.

アルファ粒子のエネルギー E が増加すると, 最接近距離 r_{\min} は E に反比例して小さくなる. 散乱角 θ が大きいほど最接近する距離は小さいので, エネルギー E の増加に伴い, 後方散乱から微分断面積が Rutherford の散乱公式と一致しなくなる. この一致しなくなる時の最接近距離は, 金の原子核の半径とアルファ粒子の半径の和にほぼ等しいと考えられる. 両者が接するくらいに近づくと, Coulomb 力だけでなく, 近距離だけで作用する強い相互作用によって散乱されるようになる. その結果, 微分断面積は散乱公式の値より小さくなる.

古典論の最後に, アルファ粒子が Coulomb ポテンシャルによって大きな角度で散乱される時の, アルファ粒子の角運動量を概算してみる. 角運動量と衝突径数の関係式 $L = \sqrt{2mE} b$ に, アルファ粒子のエネルギー $E = 5.4 \text{ MeV}$, 質量 $m = 3727 \text{ MeV}/c^2$ を代入すると

$$L [\text{MeV} \cdot \text{s}] = 6.7 \times 10^{-22} [\text{MeV} \cdot \text{s}/\text{fm}] b \text{ fm} \quad (2.45)$$

たとえば, $\theta = 90^\circ$ のとき, 衝突径数は b と, それに対応する角運動量は

$$b = b_0 = 21 \text{ fm} \quad L = 1.4 \times 10^{-20} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (2.46)$$

となる. 量子力学においては, 角運動量は量子化され, 軌道角運動量 L は Planck 定数 \hbar の整数倍の値しかとることが許されない. 上に示した角運動量 L の値はおよそ $20\hbar$ である. 角運動量がこのくらい大きければ, 古典論でもよいであろう. しかし, エネルギーがもっと小さい場合, あるいは, アルファ粒子の代わりに質量の小さい粒子 (たとえば電子) を用いる場合には, 量子効果が顕著になり, 古典論による取り扱いでは不十分になる.

2.3 Rutherford 散乱 (量子論)

2.3.1 Schrödinger 方程式と散乱の境界条件

量子力学において、ポテンシャル $V(r)$ による質量 m の粒子の散乱は次の Schrödinger 方程式によって記述される：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2.47)$$

$\psi(\mathbf{r})$ は粒子の状態を表す波動関数である。ここで、ポテンシャル $V(r)$ は遠方で十分速く 0 になると仮定する：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r V(r) = 0 \quad (2.48)$$

Coulomb ポテンシャルは特殊な場合で、この条件を満たさない。この特殊な場合には Schrödinger 方程式を厳密に解くことができるが、一方、その解法は他の場合には適用できない。従って、ここでは一般的な手法を用いていくことにする。現実の散乱においては、原子核の正電荷は電子の負電荷によって遮蔽されており、上の条件を満たしていると考えられる。

エネルギー E は散乱実験において指定されるものであり、正でなければならない。そこで、波数 k を導入して：

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \quad (2.49)$$

Schrödinger 方程式を書きかえる：

$$(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = U(r)\psi(\mathbf{r}) \quad (2.50)$$

この微分方程式を解く際には、散乱現象に応じた境界条件を与えなければならない。ここでは、十分遠方で、 z 軸の正の向きに進行する入射平面波と、原点を中心として広がる外向きの球面波からなるとする (図 2.8 参照)：

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(ikz) + \frac{f(\theta)}{r} \exp(ikr) \right] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.51)$$

$f(\theta)$ は散乱波の振幅で、散乱振幅 (scattering amplitude) と呼ばれ、散乱角 θ の関数である。また、平面波に関する積分：

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{r} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.52)$$

から、

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} dy \int_0^{2\pi} dz |\exp(ikz)|^2 = 1 \quad (2.53)$$

が得られる。すなわち、入射平面波は 1 辺が 2π の立方体の中に 1 個の粒子が存在するように規格化してある。

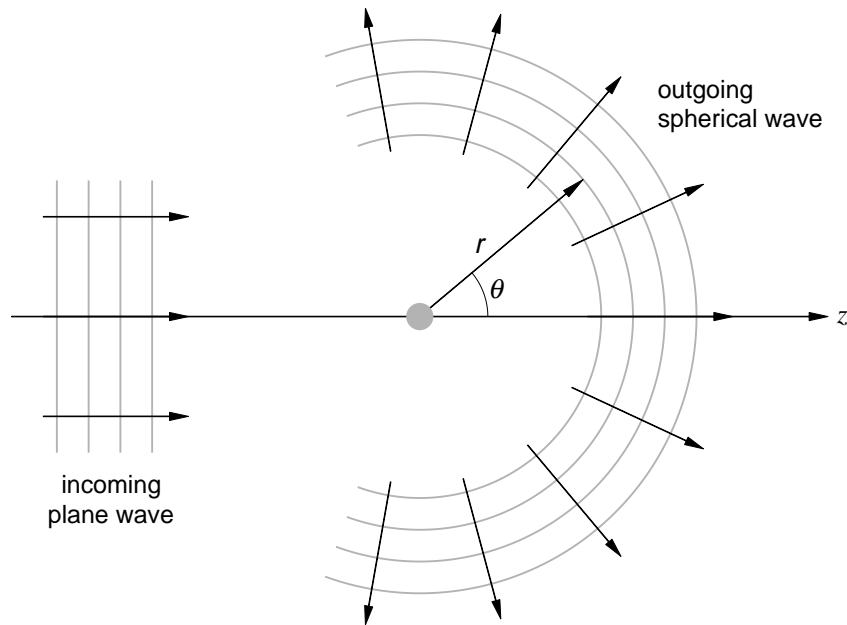


図 2.8: 散乱の十分遠方における境界条件

2.3.2 Green 関数を用いた解法

Schrödinger 方程式 (2.50) の右辺を非斉次項とみなすと, この方程式の一般解は, 非斉次項を 0 とした Helmholtz の方程式の一般解と,

$$(\Delta + k^2) \chi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (2.54)$$

の特解の和で与えられる. 特解を求めるために次の微分方程式を考える:

$$(\Delta + k^2) G_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (2.55)$$

ここで導入した $G_0(\mathbf{r})$ を微分方程式 (2.54) の Green 関数 という. $G_0(\mathbf{r})$ を用いると, (2.54) の特解は

$$\chi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \quad (2.56)$$

で与えられる. 実際,

$$(\Delta + k^2) \chi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') U(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (2.57)$$

より, $\chi(\mathbf{r})$ が特解になっていることがわかる.

Green 関数 $G_0(\mathbf{r})$ を求めるには, それを運動量についての積分に書き直す. そのために, $G_0(\mathbf{r})$ 及び $\delta(\mathbf{r})$ の Fourier 変換:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}) &= \int d\mathbf{k}' G_0(\mathbf{k}') \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \\ \delta(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

を (2.54) に代入し両辺を比較すると

$$(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2) G_0(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \quad (2.59)$$

を得る．これを $G_0(\mathbf{r})$ の Fourier 変換の式の右辺に代入し，その結果， $G_0(\mathbf{r})$ は運動量空間の積分で書ける：

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}' \frac{\exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}{k^2 - k'^2} \quad (2.60)$$

上の運動量 k' についての積分は，極座標をとると，その角度部分の積分が実行できる．ここでは，極座標を 図 2.9 に示すように， \mathbf{r} の方向に z 軸をとる．積分は

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \frac{\exp(ik'r' \cos \theta')}{k^2 - k'^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \quad (2.61)$$

と書け， φ' についての積分は単に 2π を与え， θ' についての積分も容易にできる．その結果，

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{k' \sin k'r'}{k^2 - k'^2} dk' \quad (2.62)$$

となる．

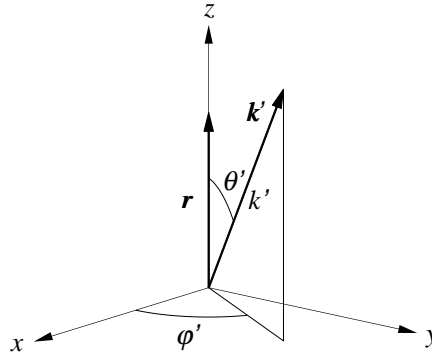


図 2.9: 運動量 k' の極座標

残った，運動量の動径 k' についての積分は，運動量を複素数に拡張して留数定理を用いて計算する．被積分関数が偶関数であることを利用して，0 から ∞ までの積分範囲を $-\infty$ から ∞ までにして，さらに， $\sin k'r$ を $\exp(\pm ik'r)$ で書き直す：

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{k' \sin k'r}{k^2 - k'^2} dk' = -\frac{1}{16\pi^2 i r^2} [I_+ - I_-] \quad (2.63)$$

$$I_\pm = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{k' + k} + \frac{1}{k' - k} \right) \exp(\pm ik'r) dk' \quad (2.64)$$

2つの実軸に沿った積分は， $k' = k$ と $k' = -k$ にそれぞれ1位の極をもつ．そこで， k' の複素平面を考え， k' についての積分を，図 2.10 に示すように，極を避けて閉じた曲線にす

る． I_+ には積分路 C_+ を， I_- には積分路 C_- をとる．この積分路のとりかたは，散乱波の外向きの境界条件に対応している．実際，この積分路をとると，留数定理により，積分の値は

$$I_{\pm} = 2\pi i \exp(ikr) \quad (2.65)$$

となり，これを (2.63) に代入して，Green 関数

$$G_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(ikr) \quad (2.66)$$

を得る．

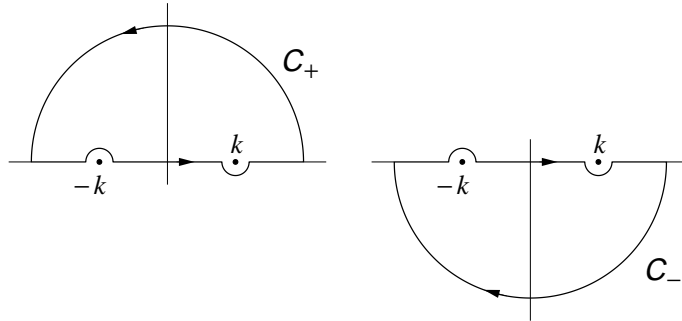


図 2.10: k' 複素平面上の積分路：左は積分 I_+ ，右は積分 I_- の積分路

上で求めたのは非斉次方程式の特解である．斉次方程式の解を z 軸方向の平面波とすると，Schrödinger 方程式 (2.50) の境界条件を満たす解は

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(ikz) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} U(r') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.67)$$

と表される．これが Schrödinger 方程式の解であるが，右辺に求めたい $\psi(\mathbf{r})$ を含んでいるので，本当の意味で解を求めたことになっていない．これは微分方程式 (Schrödinger 方程式) に境界条件を反映させた積分方程式になっている．

散乱振幅 $f(\theta)$ は波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ の漸近形 (2.51) で定義されている．そこで，解 (2.67) の $r \rightarrow \infty$ における漸近形を求める．この解は \mathbf{r}' についての積分を含むが，ポテンシャル V は原点近くの球の内部でだけ 0 でないとする．すなわち，積分変数 \mathbf{r}' が動く範囲はこの球の内部に限られる．ここで， \mathbf{r} 方向の単位ベクトルを \mathbf{n}' とすると， $r \rightarrow \infty$ のとき，被積分関数の分子にある $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}')r} \approx r - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}') \quad (2.68)$$

分母の $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} [1 + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}')] \approx \frac{1}{r} \quad (2.69)$$

と近似できる．これを解 (2.67) に代入して

$$\psi(\mathbf{r}) \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(ikz) + \frac{\exp(ikr)}{r} \left\{ -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') U(r') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right\} \right] \quad (2.70)$$

を得る．ここで， \mathbf{k}' は $\mathbf{k}' = k \mathbf{n}'$ で定義される散乱方向 (\mathbf{r} 方向) の波数ベクトルである．この結果と漸近形 (2.51) を比較して，散乱振幅 $f(\theta)$ が

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') U(r') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.71)$$

と表されることがわかる．

2.3.3 微分断面積

単位面積を単位時間あたりに通過する粒子の数 N を表すとき，量子論では粒子の流れの密度を用いる．入射平面波

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(ikz) \quad (2.72)$$

に対しては， z 軸の正の向きに入射してくる粒子の流れの密度は次の式で与えられる：

$$N = j_z = \frac{1}{2m} \left[\phi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \phi \right] \quad (2.73)$$

入射平面波の式 (2.72) を代入すると

$$j_z = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{m} = \frac{v}{(2\pi)^3} \quad (2.74)$$

が得られる． $v = (\hbar k)/m$ は入射してくる粒子の速度である．

散乱された粒子を表す外向き球面波

$$\chi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\exp(ikr)}{r} f(\theta) \quad (2.75)$$

に対しては，半径 r の球面の単位面積を単位時間あたりに通過する粒子数，すなわち，粒子の流れの密度は

$$j_r = \frac{1}{2m} \left[\chi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi^*}{\partial r} \chi \right] \quad (2.76)$$

である．外向き球面波の式を代入し，遠方で r^{-2} よりも速く減衰する項を省略すると，

$$j_r = \frac{v}{(2\pi)^3} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \quad (2.77)$$

が得られる．従って，単位時間に，十分遠方の面要素 dS を通過する粒子数 dN は

$$dN = j_r dS = \frac{v}{(2\pi)^3} |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (2.78)$$

である．ここで， $d\Omega$ は面要素 dS を見る立体角である．古典論の場合と同様に，粒子数の比は

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (2.79)$$

であり，従って，微分断面積は散乱振幅で表される：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (2.80)$$

2.3.4 Born 近似

微分断面積を与える散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') U(r') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.81)$$

で与えられる．右辺の被積分関数には未知の波動関数 $\psi(\mathbf{r}')$ があるので，このままでは散乱振幅は計算できない．ところで，波動関数 $\psi(\mathbf{r}')$ は入射平面波と外向き球面波からなる．散乱振幅を計算する上で，最も簡単な近似は，正確な波動関数 $\psi(\mathbf{r}')$ を入射平面波

$$\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(ikz) \quad (2.82)$$

で代用することである．この近似を 第 1 Born 近似 といい，散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}') U(r') \exp(ikz') d\mathbf{r}' \quad (2.83)$$

で与えられる．

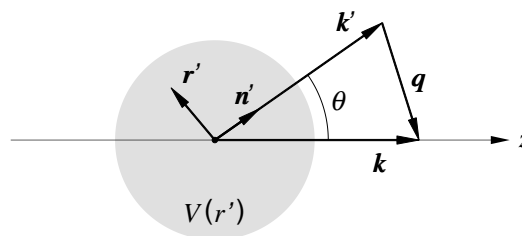


図 2.11: 散乱における運動量の関係

散乱角 θ , 及び運動量の関係を図 2.11 に示す . k は入射平面波の波数 , k' は散乱波の波数である . 散乱前と散乱後の運動量の変化は

$$\hbar q = \hbar k - \hbar k' \quad (2.84)$$

であり , また , ポテンシャルによる散乱であるから運動量の大きさは変化しない : $|k| = |k'|$. 従って , 運動量の変化の大きさは

$$\hbar q = \hbar |q| = 2\hbar k \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.85)$$

と書ける . 散乱振幅は , 運動量の変化 q で書くことができ

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp(-iq \cdot r') U(r') dr' \quad (2.86)$$

となる . ここで , q の方向を z 軸とした極座標をとると , r' の角度部分の積分は直ちに積分できる :

$$f(\theta) = \frac{1}{q} \int_0^\infty r' \sin qr' U(r') dr' = \int_0^\infty j_0(qr') U(r') r'^2 dr' \quad (2.87)$$

ここで , $j_0(qr')$ は 0 次の球 Bessel 関数である . 本来のポテンシャル $V(r')$ に戻して表すと

$$f(\theta) = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty j_0(qr') V(r') r'^2 dr' \quad (2.88)$$

微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty j_0(qr') V(r') r'^2 dr' \right]^2 \quad (2.89)$$

となる .

2.3.5 原子による Coulomb 散乱

入射する粒子に作用するポテンシャルを次のように仮定する :

$$V(r) = \frac{a}{r} - \int \frac{a\rho(r'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} dr'' \quad (2.90)$$

ここで , 右辺の第 1 項は原子核と入射粒子のあいだに作用するポテンシャル , 第 2 項は原子核のまわりに広がる電子と入射粒子のあいだに作用するポテンシャルを表す . 原子は電氣的に中性であるとする . すなわち , 原子核のまわりには原子番号と同数の電子があり , 電子の電荷密度を表す ρ は

$$\int \rho(r) dr = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (2.91)$$

によって規格化されている . ポテンシャル (2.90) の第 1 項も第 2 項も Coulomb 力によるものであるので , 個々には $1/r$ の依存性によって遠方まで作用を及ぼす . しかし , 両者の和は r の増加とともに十分速く 0 になる .

ポテンシャル (2.90) を Born 近似による散乱振幅の式 (2.87) に代入して,

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{2ma}{\hbar^2} [I_1 + I_2] \quad (2.92)$$

$$I_1 = - \int \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')}{r'} d\mathbf{r}' \quad I_2 = \iint \frac{\rho(r'') \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \quad (2.93)$$

を得る. ここで

$$g(r) = \int \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (2.94)$$

を考えると,

$$I_1 = -g(0) \quad I_2 = \int \rho(r'') g(r'') d\mathbf{r}'' \quad (2.95)$$

である. ところで, (2.94) で定義される $g(r)$ は, その形から, 密度分布 $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ の電荷がつくるポテンシャルとみなすことができる. 従って, $g(r)$ は微分方程式

$$\Delta g(r) = -4\pi \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.96)$$

の特解で与えられる:

$$g(r) = 4\pi \frac{\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} \quad (2.97)$$

この結果を代入して, 2つの積分は

$$I_1 = -\frac{4\pi}{q^2} \quad I_2 = \frac{(4\pi)^2}{q^2} \int_0^\infty j_0(qr) \rho(r) r^2 dr \quad (2.98)$$

となる. I_2 において, 角度部分の積分を実行した. さらに, これらを散乱振幅の式に代入して

$$f(\theta) = \frac{2ma}{\hbar^2} \frac{-1 + F(q)}{q^2} \quad (2.99)$$

を得る. ここで $F(q)$ は電子電荷密度の Fourier 変換である:

$$F(q) = 4\pi \int_0^\infty j_0(qr) \rho(r) r^2 dr \quad (2.100)$$

また,

$$q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4m^2 v^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.101)$$

より, 散乱振幅は

$$f(\theta) = \frac{a}{4E} [-1 + F(q)] \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad (2.102)$$

従って, 微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{a}{4E} \right)^2 [-1 + F(q)]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.103)$$

で与えられる．なお， $E = \frac{1}{2}mv^2$ は粒子のエネルギーである．

微分断面積の式において，仮に $F(q) = 0$ とおくと

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{a}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.104)$$

が得られる．これは古典論で導いた Rutherford の散乱公式に一致する．しかし， $F(q) = 0$ は上の導出の仮定に反するので許されない．すなわち，原子核のまわりの電子の負電荷が原子核の正電荷を遮蔽するので $rV(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) が成り立ち，その仮定に基づいて散乱理論が構築されているのである．従って， $F(q) = 0$ の場合には，この散乱理論が適用できない．上では第1 Born 近似を用いたが，次の次数の第2 Born 近似の項は， $F(q) = 0$ の場合に散乱振幅が発散して無限大になってしまう． $F(q) = 0$ として第1 Born 近似で得られた結果が，古典論で導かれた Rutherford の散乱公式と一致するのは偶然である．なお， $V(r) = a/r$ の場合には，上に述べたのとは異なる方法で，Schrödinger 方程式の厳密解が得られるが，微分断面積に関しては古典論の結果と一致する．

2.4 原子核の密度分布

2.4.1 電子散乱

アルファ粒子の散乱によって原子核が原子の 10^{-4} 程度以下の大きさしかないことが解明された。それでは、原子核の大きさや、その内部の電荷分布を調べるにはどうしたらよいのだろうか。アルファ粒子のエネルギーを大きくすると、古典論で言えば、最接近距離が原子核の半径より小さくなる。しかし、アルファ粒子は原子核と強い相互作用を及ぼし合うようになり、測定された微分断面積から原子核内部の情報を得るのは難しい。それは、アルファ粒子との強い相互作用により、原子核の波動関数が乱されるからである。

電子は強い相互作用をしないので、原子核の内部に入っても波動関数を大きく乱すことがなく、原子核の構造を調べるには適している。電子は原子核と電磁相互作用を及ぼし合うが、中でも Coulomb 相互作用によって原子核の電荷分布について詳細な情報を得ることができる。

原子核の電荷分布が球対称であると仮定し、Coulomb ポテンシャルとして

$$V(r) = - \int \frac{Ze^2 \rho(r'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} d\mathbf{r}'' \quad (2.105)$$

を考える。ここで、 $\rho(r)$ は原子核の電荷密度で、1に規格化されている：

$$\int \rho(r) d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr = 1 \quad (2.106)$$

このポテンシャルも遠くから見れば座標原点に点電荷 Ze がある場合と同じになり、散乱角 θ が 0 に近い前方散乱では正しい微分断面積を与えない。前節の量子論による記述と同様に、原子核のまわりに広がる電子による散乱を考慮すればよいが、ここでは、後で見るように、有限な散乱角における微分断面積が重要であるので、電子による散乱は省略する。

電子の質量は小さいので、原子核に入射する電子は Dirac 粒子として相対論的に扱う必要がある。ここでは、その詳細には触れない。微分断面積は $\alpha Z = (Ze^2)/(\hbar c)$ の最低次の項で留めて、次のように表せる：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Mott}} |F(q)|^2 \quad (2.107)$$

ここで、右辺の 1 番目の因子は Mott 散乱の微分断面積 [5] と呼ばれ、座標原点にある点電荷 Ze による散乱を表す：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{Mott}} = \left(\frac{Ze^2}{2E} \right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.108)$$

$F(q)$ は形状因子と呼ばれ、電荷密度 $\rho(r)$ の Fourier 変換である：

$$F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) j_0(qr) r^2 dr \quad (2.109)$$

ここで, $j_0(qr)$ は 0 次の球 Bessel 関数である. また, q は散乱における移行運動量 q の大きさである:

$$q = \frac{2E}{\hbar c} \sin(\theta/2) \quad (2.110)$$

もし, 原子核が点電荷であれば, $F(q) = 1$ であり, $F(q) = 1$ からのずれは原子核における電荷密度分布を反映している. 量子論における $F(q)$ の導出から明らかなように, 電荷分布 $\rho(r)$ は形状因子の Fourier 変換になっている:

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty F(q) j_0(qr) q^2 dq \quad (2.111)$$

これは, (2.109) の逆変換である.

電荷密度分布 $\rho(r)$ は原子核の範囲に限られるので, 移行運動量があまり大きくないときには $qr \ll 1$ が成り立つ. このとき, 球 Bessel 関数は次のように展開できる:

$$j_0(qr) = \frac{\sin qr}{qr} \approx 1 - \frac{1}{6}(qr)^2 + \frac{1}{120}(qr)^4 - \dots \quad (2.112)$$

これを形状因子の式 (2.109) に代入すると, 形状因子の展開が得られる:

$$\begin{aligned} F(q) &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr - \frac{q^2}{6} 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr + \frac{q^4}{120} 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^6 dr - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \frac{1}{120} q^4 \langle r^4 \rangle - \dots \end{aligned} \quad (2.113)$$

第1項は電荷を与えるに過ぎない. 第2項の

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) r^2 dr \quad (2.114)$$

は電荷分布の平均2乗半径と呼ばれる. 電子散乱によって原子核の $\langle r^2 \rangle$ を求めるには, 電子の波長が少なくとも原子核の大きさ程度, 実際には, それより短くなければならない. 従って, 原子核の電荷分布についてより詳細な情報を得るには, 波長が短い, 高いエネルギーの電子を用いなければならない.

エネルギー E の電子の reduced de Broglie 波長は次の式で与えられる:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar c}{E} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{E} \quad (2.115)$$

たとえば, 左辺が 1 fm になる電子のエネルギーは $E \approx 200 \text{ MeV}$ である. 電子の質量が $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ であるから, 電子は相対論的である. また, 電子の運動量の大きさは

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (m_e c^2)^2} \approx \frac{E}{c} \quad (2.116)$$

である. これより, $E = 200 \text{ MeV}$ の電子が散乱角 $\theta = 60^\circ$ に散乱されたとき, 運動量移行は $q = 1 \text{ fm}^{-1}$ になる.

エネルギー $E = 200 \text{ MeV}$ をもつ電子に対して，古典論での衝突径数を $b = 1 \text{ fm}$ とすると，軌道角運動量は

$$L = \sqrt{2m_e E} b = 4.8 \times 10^{-23} \text{ MeV} \cdot \text{s} = 0.07 \hbar \quad (2.117)$$

となる．すなわち，原子核の電荷密度分布を調べるために必要な高いエネルギーの電子の散乱は量子論で取り扱わなければならない．

Coulomb ポテンシャルによる荷電粒子の散乱の微分断面積は，古典論では Rutherford の散乱公式で与えられることを示した．また，量子論においても，非相対論に扱える場合は，古典論の結果と偶然一致した．質量の小さい電子の散乱は，上に示したように，相対論的量子論で扱わなければならない．そのようにして導いた微分断面積が (2.107) である．標的が点電荷の場合は Mott の断面積 (2.108) になる．これを Rutherford の散乱公式と比較すると，角度に依存する因子 $\cos^2(\theta/2)$ だけ異なる．これは，電子がスピン $1/2$ をもつ Dirac 粒子であることに起因する．相対論的極限（電子の質量が無視できる場合）では，電子のスピン運動量方向成分 $\sigma \cdot p/|p|$ （これをヘリシティと呼ぶ）が保存する．このヘリシティの保存則から，散乱角が大きい散乱が抑制されるのである．

2.4.2 密度の飽和性

原子核の密度分布を電子散乱の実験から求めるには (2.111) を用いることができる．ただし，広い範囲の q に渡って十分に正確な形状因子 $F(q)$ を測定する必要がある．特に， r の小さい原子核の中心部分の密度分布については，大きな q における正確な測定が必要である．

例として，図 2.12 に形状因子の 2 乗 $|F(q)|^2$ を示す．実線は，電荷密度分布として，下に示す典型的な Fermi 分布関数を仮定した場合である．それに対して，原子核の内部で密度が減少する場合と，逆に増加する場合について，それぞれ，破線と点線で示してある．このように，原子核内部の電荷密度分布が明らかに異なる場合でも，形状因子への影響はそれほど顕著ではない．

q の増加に伴い， $|F(q)|^2$ は振動しながら減少する．さらに，散乱実験で実際に測定するのは形状因子ではなく断面積である．Mott 散乱の断面積も q の増加に伴い減少することを考え合わせると，大きな q に及ぶ電子散乱断面積を，電荷密度分布の差異を見分けるほど十分な精度で測定することの難しさがわかる．それに代わる方法としては，様々な形の電荷密度分布 $\rho(r)$ を仮定して，Fourier 変換 (2.109) によって形状因子 $F(q)$ を計算し，実験データと比較することである．

電子散乱実験から得られた重要な成果は，特に質量数の小さい原子核を除いて，原子核の内部において，電荷密度がほぼ一定であり，また，表面付近における密度の減少はあまり急激ではないことである．この特徴を再現する密度分布として，次の分布関数が代表的に用

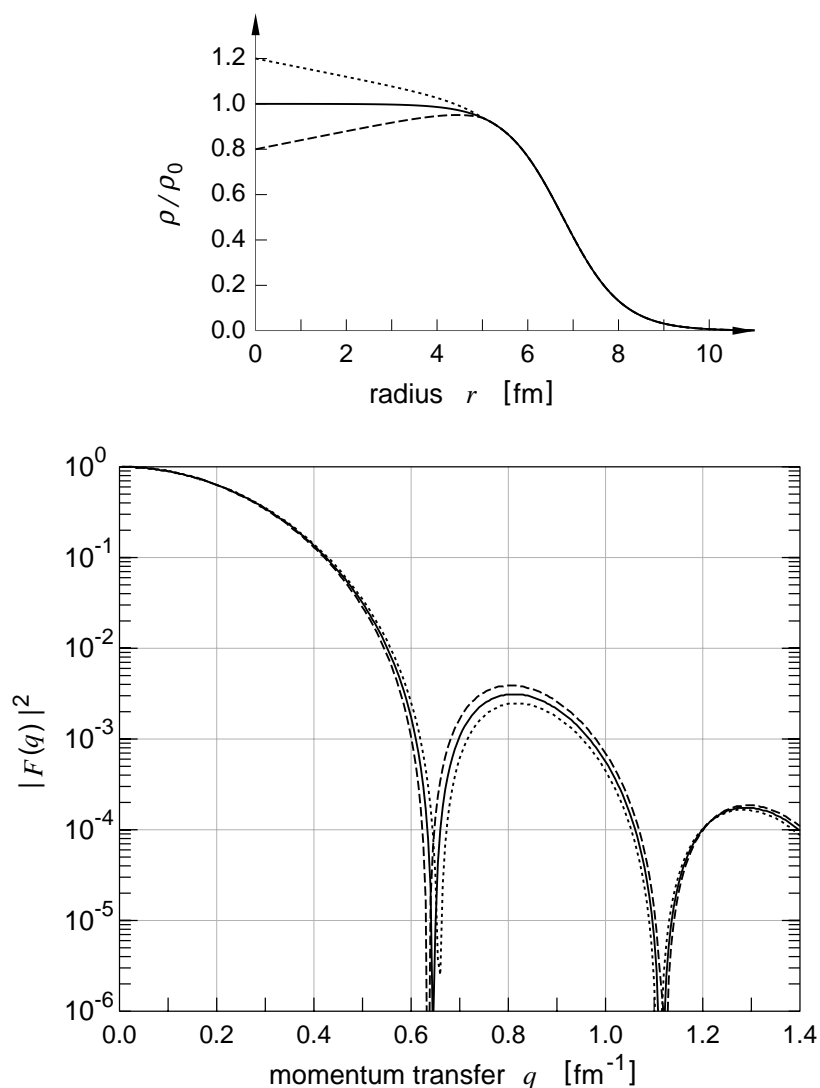


図 2.12: 原子核の電子散乱における形状因子の 2 乗．原子核内部の電荷密度を変えたときの違いを，破線及び点線で示す．実線は Fermi 密度関数の場合．

いられる：

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R}{a}\right)} \quad (2.118)$$

この分布は Fermi 密度関数 と呼ばれる．実験が示す事実は，2つのパラメータ ρ_0 と a が，原子核に依らずにほぼ一定であることである．Fermi 密度関数の例を 図 2.13 に示す． $r = R$ は原子核の半径に対応して，そこでの密度は $\rho(R) = \rho_0/2$ である． $a \approx 0.6$ fm であるので，密度は $r = R$ を中心にして前後約 1.5 fm の範囲で変化する．図中には，密度が中

心での密度の 90% , 及び 10% になる半径が示してある . 簡単な計算から , それらの差を示す t の大きさは $t = a \log_e 9 = 2.20a$ であることがわかる .

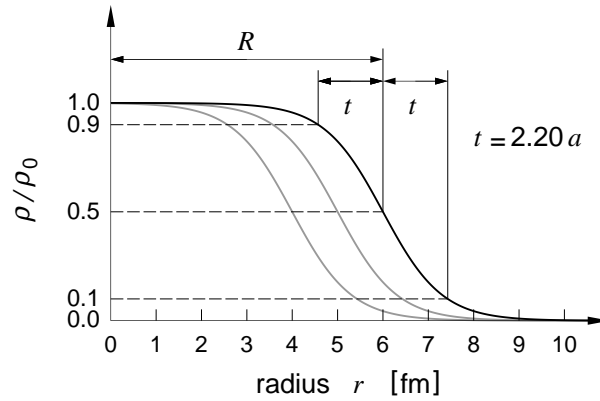


図 2.13: 原子核の密度を表す Fermi 密度関数 . $R = 6 \text{ fm}$, 5 fm , 4 fm の場合を示す .

電子散乱実験から得られるのは電荷の分布である . 原子核の中で電荷をもつのは陽子であるので , 測定されるのは陽子の分布と言ってもよい . 一方 , 電荷をもたない中性子の分布は , 陽子ほど正確ではないが , 別の方法で実験的に求めることができる . その結果は , 中性子の分布もまた Fermi 密度関数でよく表現でき , その半径 R と表面の密度が変化する領域を表す a は陽子の場合とほぼ同じである . 従って , 両者を合わせた核子の密度分布も 1 つの Fermi 密度関数で表すことができる . このとき , 原子核内部の密度は原子核に依らずにほぼ一定で

$$\rho_0 \approx 0.17 \text{ fm}^{-3} \quad (2.119)$$

である (約 6 fm^3 に 1 個の核子がある) . これを 密度の飽和性 という . 密度の飽和性は , 原子核の体積が核子数にほぼ比例することを示唆している .

原子核内部の密度 ρ_0 は核子の数密度である . これに核子の質量 m をかけて単位体積あたりの質量に換算すると ,

$$m \rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (2.120)$$

となる .

2.5 第 2 章の参考文献

1. H. Geiger and E. Marsden, Proc. Roy. Soc. (London), A82 (1909) 495
2. E. Rutherford, Phil. Mag. 21 (1911) 669
3. H. Geiger and E. Marsden, Phil. Mag. 25 (1913) 604
4. J. Chadwick, Nature, 129 (1932) 312, Proc. Roy. Soc. (London), A136 (1932) 692
5. N.F. Mott, Proc. Roy. Soc. (London) A135 (1932) 429, A124 (1929) 426
6. 「散乱の量子論」, 砂川重信, 岩波全書 (岩波書店, 1977)