

## 第13章 非慣性系

### 13.1 加速度運動する座標系

#### 13.1.1 等加速度運動する座標系

ニュートンの運動の第1法則が成り立つ座標系を慣性系という。また、ひとつの慣性系に対して等速度運動する座標系は慣性系である。慣性系に対して加速度運動（加速度  $\neq 0$ ）する座標系は慣性系ではない。そのような座標系を非慣性系という。

ひとつの例として、慣性系に対して一定の加速度で動く電車があり、その中につるされたおもりの運動を調べてみる。

地上（慣性系）にいる人から見ると、質量  $m$  のおもりには鉛直下向きの重力  $mg$  と、おもりをつるすひもの張力  $S$  がはたらいている（図 13.1 上）。その合力  $F$ （ベクトル的な和、図 13.1 上の白抜きの矢印）は電車が進む方向を向いており、この力がおもりに一定の加速度  $F/m$  を生じさせる。この加速度は電車の加速度に等しい。慣性系では運動の第2法則が成り立っている。

一方、一定の加速度で運動する電車（非慣性系）の中にいる人から見ても、おもりにはたらく力は重力とひもの張力である。その合力は  $F$  であり、この力はおもりに加速度を生じさせる。しかし、おもりは静止して見える。おもりに力がはたらいているにも関わらず、おもりは静止しているのである。つまり、慣性系に対して一定の加速度で運動する非慣性系では、運動の第2法則は成り立たない。そこで、このような非慣性系でも運動の法則が成り立つように、見かけの力を導入することにする。運動方程式が成り立つためには、見かけの力（図 13.1 下の灰色の矢印） $F'$  を導入し、

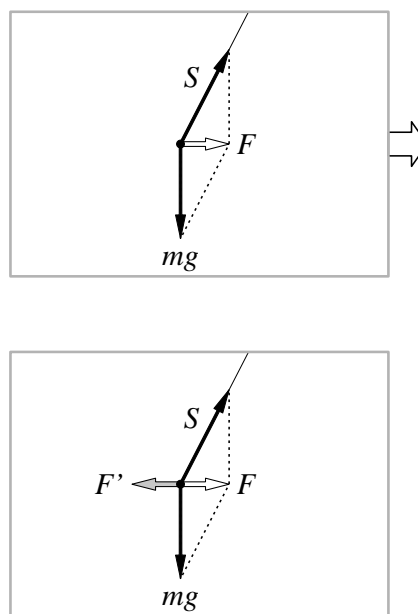


図 13.1: 等加速度運動する座標系

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0 \quad (13.1)$$

であればよい。すなわち，

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} \quad (13.2)$$

である見かけの力を考えれば運動方程式が成り立つようになる。

もっと一般的には，次のように示すことができる。慣性系  $S$  系に対して運動している座標系を  $S'$  系とする。ただし， $S'$  系の座標軸は  $S$  系の座標軸とそれぞれ平行であり，回転はないとする。慣性系  $S$  系において，空間内のある点  $P$  を表す位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と，非慣性系  $S'$  系において同じ点  $P$  を表す位置ベクトル  $\mathbf{r}'$  のあいだには

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (13.3)$$

の関係が成り立つ。 $\mathbf{r}_0$  は慣性系  $S$  系からみた非慣性系  $S'$  系の原点の位置ベクトルである。慣性系では運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (13.4)$$

が成り立つ。ここで (13.3) を時間で 2 回微分すると

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \quad (13.5)$$

となる。これを慣性系における運動方程式 (13.4) に代入すると

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{F}', \quad \mathbf{F}' = -m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} \quad (13.6)$$

が得られる。非慣性系  $S'$  系での運動方程式 (13.6) は，この座標系が加速度運動しているために，本当の力  $\mathbf{F}$  のほかに力  $\mathbf{F}'$  が作用しているように見える。力  $\mathbf{F}'$  は見かけの力であり慣性力とも呼ばれる。

慣性系に対して加速度運動している座標系では，慣性力（見かけの力）を考慮するとニュートンの運動方程式が成り立つ。

$S'$  系が慣性系に対して加速度を持たない（加速度が 0）場合には，見かけの力は現れない。 $S'$  系が慣性系  $S$  系に対して等速度運動している場合，

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0 = \text{一定}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = 0, \quad \mathbf{F}' = -m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = 0 \quad (13.7)$$

である。従って， $S'$  系においても運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (13.8)$$

が成り立つ。これは，冒頭でのべた「ひとつの慣性系に対して等速度で動く座標系は慣性系である」ことを表している（ガリレイの相対性原理）。

## 13.1.2 一定の角速度で回転する座標系

慣性系に対して回転する座標系も非慣性系である。簡単のために、質点の2次元運動を、慣性系と、それに対して一定の角速度で回転する非慣性系から見てみる。

例：その1

慣性系において、一定の角速度  $\omega$  で半径  $a$  の円周上を回転する質量  $m$  の質点の運動を考えてみる（図 13.2 左）。運動面を  $xy$  平面とし、円の中心を原点とすると、質点の位置は

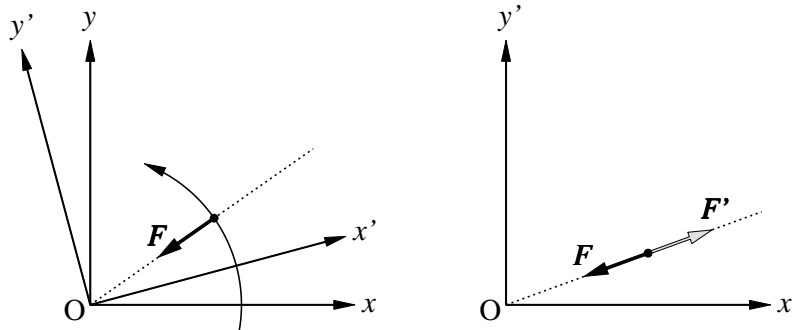


図 13.2: 一定の角速度で回転する座標系 (1)

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t \quad (13.9)$$

で表される。この質点にはたらいている力は、運動方程式から

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \omega^2 x, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \omega^2 y \quad (13.10)$$

すなわち、

$$\mathbf{F} = -m \omega^2 \mathbf{r} \quad (13.11)$$

であることがわかる。これは、円の中心を向いた向心力である。

同じ運動を、原点を共有し、質点と共に同じ角速度  $\omega$  で回転する非慣性系  $S'$  系から見る（図 13.2 右）。質点には向心力だけがはたらいているが、質点は静止している。つまり、ニュートンの運動方程式は成り立たない。運動方程式が成り立つようにするには、向心力  $\mathbf{F}$  とつり合う見かけの力

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = m \omega^2 \mathbf{r} \quad (13.12)$$

を導入すれば良い。これは遠心力である。向心力と遠心力が相殺し、質点には力がはたらかないので、止まっている質点は止まったままである。

例：その2

慣性系において一定の速度  $v$  で  $x$  軸上を正の向きに運動する質点の運動を考えてみる（図 13.3）。等速度運動する質点には、力のはたらいていない。同じ運動を、慣性系に対して一定の角速度  $\omega$  で回転する非慣性系からみると、回転による見かけの偏向を受けている

ことがわかる。慣性系において，短い時間  $\Delta t$  に質点は  $\Delta x = v \Delta t$  だけ進む。一定の角速度  $\omega$  で回転する座標系では，角  $\Delta\theta = \omega \Delta t$  だけそれて， $\Delta y = -\Delta x \Delta\theta = -v\omega (\Delta t)^2$  だけ変位する。これは，座標系の回転により，速度に垂直に  $2v\omega$  の加速度を生じさせる見かけの力  $-2m\omega v$  がはたらいているからと考えられる。この見かけの力は コリオリ力 と呼ばれる。

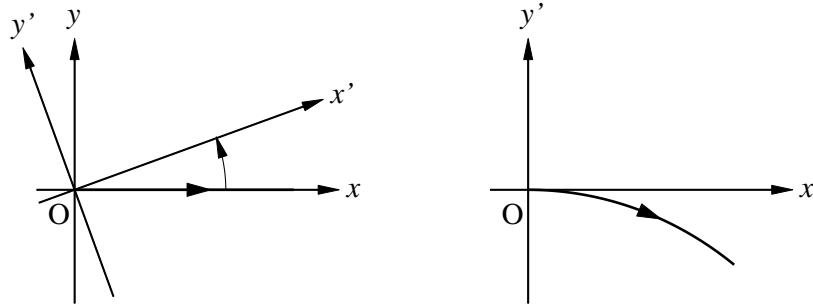


図 13.3: 一定の角速度で回転する座標系 ( 2 )

一般的な場合

上に例示した場合も含めて，一定の角速度で回転する非慣性座標系における運動の記述を，より一般的に考えてみる。慣性系  $S$  系と原点と  $z$  軸を共有し， $S$  系に対して  $z$  軸のまわりに一定の角速度  $\omega$  で回転する座標系  $S'$  系を考える。慣性系  $S$  系では運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad (13.13)$$

が成り立つ。この運動方程式が，非慣性系  $S'$  系でどのように表されるかを調べることにする。 $S$  系における質点の座標  $(x, y)$  と， $S'$  系における座標  $(x', y')$  のあいだには，

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad (13.14)$$

の関係が成り立つ ( 図 13.4 左 )。ただし，両座標系の座標軸が一致する時刻を  $t = 0$  とした。座標の関係式 (13.14) を時間について 2 回微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \left( \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - \omega^2 x' \right) \cos \omega t - \left( \frac{d^2y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} - \omega^2 y' \right) \sin \omega t \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \left( \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\omega \frac{dy'}{dt} - \omega^2 x' \right) \sin \omega t + \left( \frac{d^2y'}{dt^2} + 2\omega \frac{dx'}{dt} - \omega^2 y' \right) \cos \omega t \end{aligned} \quad (13.15)$$

が得られる。一方，力  $F$  の慣性系  $S$  系における成分  $(F_x, F_y)$  と非慣性系  $S'$  系における成分  $(F_{x'}, F_{y'})$  とのあいだには，位置ベクトルの成分の変換と同様な関係

$$F_x = F_{x'} \cos \omega t - F_{y'} \sin \omega t, \quad F_y = F_{x'} \sin \omega t + F_{y'} \cos \omega t \quad (13.16)$$

が成り立つ ( 図 13.4 右 )。加速度の関係式 (13.15) と力の関係式 (13.16) を慣性系  $S$  系の

運動方程式 (13.13) に代入すると,

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= F_{x'} + 2m\omega \frac{dy'}{dt} + m\omega^2 x' \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= F_{y'} - 2m\omega \frac{dx'}{dt} + m\omega^2 y' \end{aligned} \quad (13.17)$$

が得られる。これが、非慣性系  $S'$  系における運動方程式である。右辺の第1項は真の力である。 $S'$  系が慣性系でないために、回転による慣性力（見かけの力）が2種類生じている。右辺の第2項と第3項であり、それぞれ コリオリ力、遠心力 と呼ばれている。コリオリ力

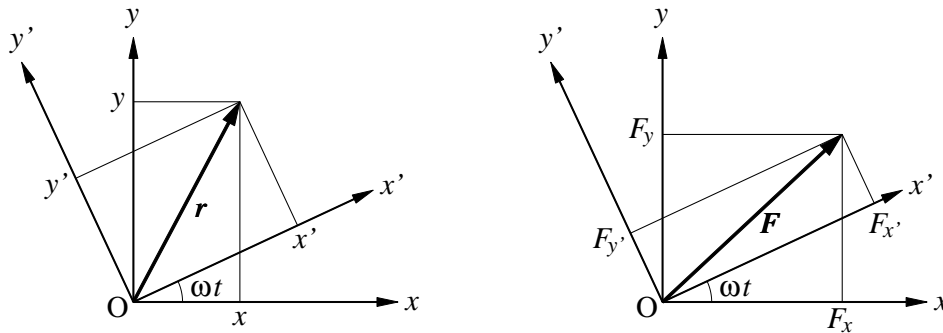


図 13.4: 一定の角速度で回転する座標系 (2)

を  $F^{(C)}$  と書けば、その成分は

$$F_{x'}^{(C)} = 2m\omega v_{y'}, \quad F_{y'}^{(C)} = -2m\omega v_{x'} \quad (13.18)$$

と書ける。ここで、 $v_{x'}$  と  $v_{y'}$  は非慣性系  $S'$  系における質点の速度  $v'$  の成分である。従って、コリオリ力と速度の内積（スカラー積）をとると、

$$F^{(C)} \cdot v' = F_{x'}^{(C)} v_{x'} + F_{y'}^{(C)} v_{y'} = 0 \quad (13.19)$$

すなわち、コリオリ力は  $S'$  系で見た速度  $v'$  に垂直にはたらく。一方、遠心力は  $m\omega^2 r$  と表され、その大きさは角速度の2乗と回転軸からの距離に比例し、その向きは回転軸から遠ざかる向きである。

## 13.2 運動座標系における運動方程式

### 13.2.1 角速度ベクトル

前節では、 $z$  軸のまわりに一定の角速度で回転する非慣性座標系を考えた。ここでは、任意の軸のまわりに回転する（回転軸も角速度も時間と共に変化する）非慣性座標系に一般化する。そのためには、回転の向きと角速度の大きさを表す 角速度ベクトル を導入し、座標の取り方に依存しないベクトルの形で記述するのが良い。

慣性系  $S$  系と原点を共有し、 $S$  系に対して回転している非慣性座標系  $S'$  系を考える。 $S$  系に対する  $S'$  系の回転をベクトルの形でどのように表したら良いかを調べるために、 $S'$  系で静止している（言い換えると  $S'$  系に固定された）点  $P$  の運動を慣性系  $S$  系で見ることにする。点  $P$  の位置ベクトルを  $r$ （原点を共有する 2 つの座標系  $S$  系と  $S'$  系では、点  $P$  の位置を表すベクトルは同じである。ただし、成分の値は一般的に異なる。）とし、 $S'$  系の回転に伴う点  $P$  の変位を慣性系  $S$  系で見る。その様子を図 13.5 に示す。

時刻  $t$  に、慣性系  $S$  系に対して、 $S'$  系は原点  $O$  を通る直線  $l$  を回転軸として、角速度  $\omega$  で回転しているとす。このとき、回転軸の方向を向き、角速度に等しい大きさをもつ角速度ベクトル  $\omega$  を導入する：

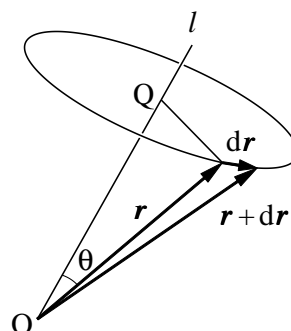


図 13.5: 運動座標系

$$\text{角速度ベクトル } \omega \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{向き} & \text{回転軸の方向} \\ \text{大きさ} & \text{角速度の大きさ} \end{array} \right. \quad (13.20)$$

(角速度ベクトルの向きは点  $P$  が回転する向きに右ねじを回したとき、ねじが進む向きにとる。) このとき、 $S'$  系に固定された点  $P$  の、慣性系  $S$  系からみた速度は

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r \quad (13.21)$$

と表せる。これを以下に示す。

点  $P$  を含み回転軸に垂直な平面を考え、その面と回転軸との交点を  $Q$  とする。時刻  $t$  から時刻  $t + dt$  までの微小時間  $dt$  のあいだに、点  $P$  は  $r$  から  $r + dr$  へと変位する。その変位  $dr$  は角度  $\omega dt$  の回転によって起こり、点  $Q$  を中心とした半径  $r \sin \theta$  の円周に沿って行われる。ここに、 $\theta$  は点  $P$  の位置ベクトル  $r$  と回転軸との成す角である。変位  $dr$  の大きさは  $|dr| = \omega dt r \sin \theta$  であり、従って、点  $P$  が移動する速度の大きさは次のように表せる：

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \omega r \sin \theta. \quad (13.22)$$

すなわち、回転の角速度と回転半径の積である。また、このとき、速度の向きは位置ベクトル  $r$  と回転軸  $l$  の両方に垂直である。点  $P$  の速度の向きは、位置ベクトル  $r$  と角速度ベクトル  $\omega$  に垂直であり、速度の大きさは  $|\omega| |r| \sin \theta$  である。従って、速度は角速度ベクトル  $\omega$  と位置ベクトル  $r$  のベクトル積 (13.21) で表せることがわかる。

(13.21) の別の導出

上に示した幾何学的な考察から得られた関係 (13.21) を、座標軸の向きを表す 3 つの単位ベクトルの時間変化率の視点から導くこともできる。点  $P$  の位置ベクトル  $r$  は  $S'$  系における座標と単位ベクトルを用いて

$$r = x' e_{x'} + y' e_{y'} + z' e_{z'} \quad (13.23)$$

と書ける。点 P は  $S'$  系で静止しているのに、座標  $x', y', z'$  は一定であるが、単位ベクトル  $e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}$  は時間の経過と共にその向きが変化する。従って、点 P の位置ベクトル  $r$  の時間微分は

$$\frac{dr}{dt} = x' \frac{de_{x'}}{dt} + y' \frac{de_{y'}}{dt} + z' \frac{de_{z'}}{dt} \quad (13.24)$$

となる。 $S'$  系の単位ベクトルの時間微分は、係数  $\omega_{ij}$  (一般に時間に依存する) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{de_{x'}}{dt} &= \omega_{11}e_{x'} + \omega_{12}e_{y'} + \omega_{13}e_{z'} \\ \frac{de_{y'}}{dt} &= \omega_{21}e_{x'} + \omega_{22}e_{y'} + \omega_{23}e_{z'} \\ \frac{de_{z'}}{dt} &= \omega_{31}e_{x'} + \omega_{32}e_{y'} + \omega_{33}e_{z'} \end{aligned} \quad (13.25)$$

と書くことができる。しかし、9個の係数すべてが独立ではない。ここで単位ベクトルのスカラー積の関係  $e_{x'} \cdot e_{x'} = 1, e_{x'} \cdot e_{y'} = 0$  を時間で微分して得られる関係式

$$e_{x'} \cdot \frac{de_{x'}}{dt} = 0, \quad e_{x'} \cdot \frac{de_{y'}}{dt} + \frac{de_{x'}}{dt} \cdot e_{y'} = 0 \quad (13.26)$$

などを考慮すると、係数  $\omega_{ij}$  には次の制限があることがわかる

$$\begin{aligned} \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} &= 0 \\ \omega_{12} + \omega_{21} = 0, \quad \omega_{23} + \omega_{32} = 0, \quad \omega_{31} + \omega_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (13.27)$$

すなわち、独立な係数は3つである。それらを

$$\omega_1 = \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{31} = -\omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21} \quad (13.28)$$

と書けば、 $S'$  系の単位ベクトルの時間微分 (13.25) は

$$\begin{aligned} \frac{de_{x'}}{dt} &= \omega_3 e_{y'} - \omega_2 e_{z'} \\ \frac{de_{y'}}{dt} &= -\omega_3 e_{x'} + \omega_1 e_{z'} \\ \frac{de_{z'}}{dt} &= \omega_2 e_{x'} - \omega_1 e_{y'} \end{aligned} \quad (13.29)$$

となる。これらの関係式を点 P の位置ベクトルの時間微分の式 (13.24) に代入すると

$$\frac{dr}{dt} = (\omega_2 z' - \omega_3 y') e_{x'} + (\omega_3 x' - \omega_1 z') e_{y'} + (\omega_1 y' - \omega_2 x') e_{z'} \quad (13.30)$$

と書き直せる。ここで、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  を3成分とするベクトルを定義する：

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 e_{x'} + \omega_2 e_{y'} + \omega_3 e_{z'}. \quad (13.31)$$

位置ベクトル  $r$  の時間微分 (13.30) の  $x$  成分は

$$\omega_2 z' - \omega_3 y' = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_{x'}$$

であることがわかる。 $y$  成分,  $z$  成分についても同様である。よって, 位置ベクトル  $r$  の時間微分 (13.30) はベクトル  $\omega$  と  $r$  のベクトル積の形 (13.21) で表される。式 (13.31) で定義したベクトル  $\omega$  は幾何学的考察の際に導入したベクトルと同じものであり, その向きは回転軸の向きに一致し, 大きさは回転の角速度に等しい。

非慣性座標系  $S'$  系は, ベクトル  $\omega$  を回転軸として, 角速度  $|\omega|$  で, 原点を共有する慣性系  $S$  系に対して回転している。このような座標系を回転座標系と呼ぶ。

### 13.2.2 回転座標系

ここまでは, 回転座標系  $S'$  に固定された点の, 慣性系  $S$  における位置の時間的変化を見てきた。これを一般化して, 回転座標系に対して速度を持つ質点の運動を考える。 $S'$  系から見た質点の位置は

$$\mathbf{r} = x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'} \quad (13.32)$$

と表せる。これを時間について微分すれば回転座標系  $S'$  から見た質点の速度が得られる:

$$\frac{d^* \mathbf{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt} \mathbf{e}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{e}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{e}_{z'}. \quad (13.33)$$

ここで,  $*$  を付けた微分記号は, (13.32) を時間で微分する際に, 単位ベクトル  $\mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_{y'}$ ,  $\mathbf{e}_{z'}$  は微分しないで, 成分  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  を微分することを意味する。回転座標系  $S'$  から見れば, その単位ベクトルは時間が経過しても変化せず, 質点の運動に伴いその座標 ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ) の値が変化する。

同じ質点の運動を慣性座標系  $S$  から見ると, それは  $S'$  系の回転と,  $S'$  系から見た運動の合成である。従って, 慣性座標系  $S$  に対する質点の速度は,  $S'$  系の回転による時間変化 (13.21) と,  $S'$  系における速度 (13.33) の和

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^* \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (13.34)$$

で与えられる。

関係式 (13.34) は, 位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に限らず, 任意のベクトルに対して成り立つ。ベクトル  $\mathbf{A}$  を,  $S$  系と  $S'$  系の成分と単位ベクトルを用いて表すと, それぞれ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = A_{x'} \mathbf{e}_{x'} + A_{y'} \mathbf{e}_{y'} + A_{z'} \mathbf{e}_{z'} \quad (13.35)$$

であるので, 時間微分

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (13.36)$$

$$\frac{d^* \mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_{x'}}{dt} \mathbf{e}_{x'} + \frac{dA_{y'}}{dt} \mathbf{e}_{y'} + \frac{dA_{z'}}{dt} \mathbf{e}_{z'} \quad (13.37)$$

を用いると, 慣性系  $S$  系に対するベクトル  $\mathbf{A}$  の時間微分は次の式で表せることがわかる:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d^* \mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \quad (13.38)$$



左辺の  $dA/dt$  をベクトル関数  $A(t)$  の絶対導関数といい、右辺の第1項  $d^*A/dt$  を回転座標系  $S'$  系に対する相対導関数という。なお、右辺の第2項の  $\omega \times A$  は座標系の取り方に無関係であるので、慣性座標系  $S$  の成分で書いても、回転座標系  $S'$  の成分で書いても良い。

### 13.2.3 運動座標系

運動座標系  $S'$  は、一般に、慣性座標系  $S$  に対して、 $S'$  系の原点の移動とともに回転している(図 13.6)。運動座標系  $S'$  系における運動方程式は、上に示した関係式 (13.21) または (13.38) を用いて、導くことができる。

慣性系  $S$  に対する運動座標系  $S'$  の原点の位置ベクトルを  $r_0$  とし、 $S'$  系における質点の座標を  $r'$  とする。このとき、慣性系  $S$  における質点の位置ベクトル  $r$  は

$$r = r_0 + r' \quad (13.39)$$

と表される。これを時間で微分して、慣性系  $S$  における速度  $v$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt} + \frac{dr'}{dt} \quad (13.40)$$

が得られる。ここに、右辺の第2項は、 $S'$  系が回転しているので (13.38) を用いて次のようにと書ける：

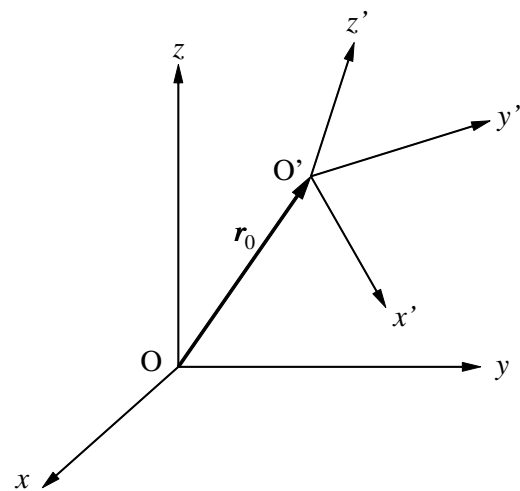


図 13.6: 運動座標系

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r'. \quad (13.41)$$

すなわち、

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt} + \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r' \quad (13.42)$$

が得られる。

加速度は速度を時間で微分して

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d^2r_0}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r' \right) \\ &= \frac{d^2r_0}{dt^2} + \frac{d^*}{dt} \left( \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r' \right) + \omega \times \left( \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times r' \right) \\ &= \frac{d^2r_0}{dt^2} + \frac{d^{*2}r'}{dt^2} + \omega \times \frac{d^*r'}{dt} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d^*\omega}{dt} \times r' \end{aligned} \quad (13.43)$$

と書ける。ここに、最後の項に現れる時間微分は角速度ベクトルの相対導関数であるが、

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (13.44)$$

( $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$  に注意) であり、座標系の取り方に依存しない。

慣性系  $S$  における運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (13.45)$$

に (13.43) を代入して、運動座標系  $S'$  における運動方程式が得られる：

$m \frac{d^{*2}\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F}$	(本当の力：外力)	(13.46)
$- m \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2}$	(原点の加速度運動による力)	
$- 2m \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}'}{dt} \right)$	(コリオリ力)	
$- m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$	(遠心力)	
$- m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$	(回転の加速度による力)	

右辺は質点に作用する力であるが、第1項だけが本当の力で、その他は座標系  $S'$  の慣性座標系  $S$  に対する運動による見かけの力である。

コリオリ力

右辺の第3項はコリオリ力で、その大きさは運動座標系  $S'$  系における速度に比例し、速度に垂直な向きにはたらく特徴を持つ。

遠心力

右辺の第4項は遠心力で、ベクトル積の性質を用いると

$$- m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = - m (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega} + m \omega^2 \mathbf{r}' \quad (13.47)$$

と書き直せる。左辺の表現  $\boldsymbol{\omega} \times (\ )$  から、遠心力が回転軸 ( $\boldsymbol{\omega}$  の方向) に垂直な向きにはたらくことがわかる。また、ベクトル積の性質、あるいは右辺のベクトルで書いた式から、遠心力の大きさは角速度の大きさの2乗  $\omega^2$  と、点  $\mathbf{r}'$  と回転軸の距離に比例する。

原点の加速度運動に起因するみかけの力

運動方程式 (13.46) の右辺の第2項は、慣性系  $S$  系に対する運動座標系  $S'$  系の原点の加速度に起因する見かけの力である。原点の運動 (図 13.6) は一般に並進運動と回転運動に分けられるので、並進運動の加速度に対応した見かけの力と、回転運動に対応した遠心力の両方を含んでいる。

### 13.3 地球表面近くでの運動

#### 13.3.1 地表の座標系

地球は地軸のまわりに自転しているので、地球の表面に固定した座標系は運動座標系である。ここでは、前節で得た一般的な運動座標系に対する運動方程式 (13.46) を地表付近の運動に適用して、(13.46) の右辺に現れる見かけの力を具体的に見ていくことにする。

地球表面近くでの物体の運動を記述するには、基準となる慣性系が必要である。地球に固定した座標系は、たとえ地球の中心に原点を取っても、地球の自転のため慣性系とは言えない。そこで、地球の中心を原点とし、遠方の星に対して回転していない座標系を慣性系  $S$  とする。厳密に言えば、地球は太陽のまわりを公転運動し、太陽系は銀河の中で運動している。しかし、地表付近の運動を記述する上では、このような座標系は極めて良い慣性系とみなして良い (図 13.7)。

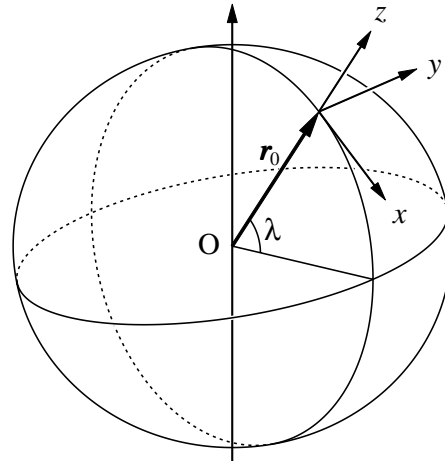


図 13.7: 地球表面に固定した運動座標系

この慣性系を基準にして、緯度が  $\lambda$  の地点の地表に固定した運動座標系  $S'$  を考える。

鉛直上向きに  $z$  軸、これに垂直な平面内で南方に  $x$  軸、東方に  $y$  軸をとる。(今までは運動座標系を「'」を付けて表してきたが、ここからは省いて表すことにする。)  $S'$  系の原点  $O'$  は地球の自転に伴って移動し、座標軸の向きも変化する。

地球表面付近にある質点には (13.46) の右辺に現れる力が作用する。(13.46) の右辺の第 2 項は、運動座標系の原点の加速度運動に起因するみかけの力であるが、地球表面に固定した運動座標系の場合は遠心力になる。第 4 項も遠心力であるが無視できるほど小さい。第 3 項がコリオリ力である。第 5 項は運動座標系の回転の加速度に起因するみかけの力であるが、地球の自転の角速度は一定であるので、この項は 0 になる。運動座標系  $S'$  の原点近くの質点の運動を記述する際には、見かけの力の中ではコリオリ力の影響が最も大きいことがわかる。以下に、見かけの力のそれぞれについて議論する。

(13.46) に現れる  $r_0$  は慣性座標系の原点  $O$  (地球の中心) から地表にある運動座標系の原点  $O'$  に引いた位置ベクトルである。従って、その大きさは地球の半径である：

$$r_0 = 6.4 \times 10^6 \text{ m.} \quad (13.48)$$

また、 $\omega$  は地球の自転の角速度ベクトルである。地球は西から東へ自転しているので、角速度ベクトルは南極から北極への向きである。その大きさは、地球が 1 日に 1 回自転していることから、

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 9.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (13.49)$$

である。

## 遠心力

運動座標系の原点の加速度運動に起因する項，すなわち，(13.46) の右辺の第2項から遠心力が現れる。 $S$ 系に対する $S'$ 系の原点 $O'$ の速度は，地球の自転のため(13.38)を用いて

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0$$

と表せる。この式を時間で微分すると(もう一度(13.38)を用いて)加速度は

$$\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \right) = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0)$$

となる。従って， $S'$ 系に対する運動方程式(13.46)の右辺の第2項は

$$-m \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = -m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) \quad (13.50)$$

と書ける。右辺は(13.46)の第4項と同じ形をしており，地表にとった運動座標系の原点 $O'$ における，地球の自転による遠心力である。緯度 $\lambda$ の地表に固定した座標系(図13.7)では，遠心力は次のように表せる。

$$-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0) = m \omega^2 r_0 \cos \lambda (\sin \lambda \mathbf{e}_x + \cos \lambda \mathbf{e}_z) \quad (13.51)$$

右辺の( )内は地球の自転軸(回転軸)に垂直な単位ベクトルであり， $r_0 \cos \lambda$ は自転軸から原点 $O'$ までの距離である。

式(13.46)の第4項 $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ は質点が運動座標系の原点 $O'$ から $\mathbf{r}'$ だけ離れているためによけいに受ける遠心力である。地表近くの運動を考えると，原点からの距離 $|\mathbf{r}'|$ は地球の半径 $|r_0|$ に比べると極めて小さく，この項は一般に無視することができる。すなわち，遠心力としては，原点 $O'$ における遠心力(13.51)だけを考慮すれば十分である。

遠心力(13.51)は赤道上( $\lambda = 0$ )で最大になり，その大きさは $m \omega^2 r_0$ である。ここで，地球の自転の角速度と地球の半径の値を代入して，赤道上的遠心力の加速度は

$$\omega^2 r_0 = 3.4 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$$

となる。これは重力(万有引力)の加速度 $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ の約1/300である。緯度が増加するに伴い，遠心力は小さくなる。遠心力による加速度は質点の質量にも速度にも依らない。これは重力と同じ特徴であるので重力と区別することは難しく，従って，地球の自転による遠心力は重力の小さな補正項と考えることができる。多くの場合，重力と遠心力の和を重力と見なして扱って良い。

## コリオリ力

運動方程式(13.46)の右辺の第3項は地球の自転によるコリオリ力である

$$\mathbf{F}^{(C)} = -2m \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}'}{dt} \right). \quad (13.52)$$

緯度  $\lambda$  の地表に固定した運動座標系 (図 13.7) では, 地球の自転の角速度の成分は

$$\omega_x = -\omega \cos \lambda, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \lambda \quad (13.53)$$

である (図 13.8)。これを (13.52) に代入してコリオリ力  $F^{(C)}$  の 3 成分は

$$\begin{aligned} F_x^{(C)} &= 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ F_y^{(C)} &= -2m\omega \left( \sin \lambda \frac{dx}{dt} + \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right) \\ F_z^{(C)} &= 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (13.54)$$

と表せる。ここに, 回転座標系における質点の速度ベクトルを

$$\frac{d^* \mathbf{r}'}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

と表した。コリオリ力の  $x$  成分と  $z$  成分は質点の速度の  $y$  成分に比例し, コリオリ力の  $y$  成分は速度の  $x$  成分と  $z$  成分に依存する。

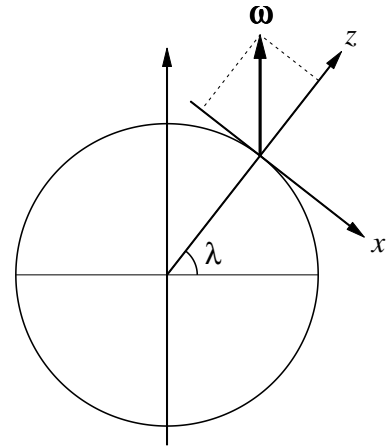


図 13.8: 運動座標系

### 地表付近の運動の方程式

上に示したように, 地球の回転による見かけの力は, 主にコリオリ力である。従って, 地表付近の運動を記述する運動方程式は, 図 13.7 の座標系の成分で

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y - 2m\omega \left( \sin \lambda \frac{dx}{dt} + \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z - mg + 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (13.55)$$

と書ける。ここに,  $-mg$  は (遠心力を含めた) 重力を,  $F$  は重力以外の外力を表す。

コリオリ力は一般に小さな力である。質量  $m$ , 速度  $v$  の質点に作用するコリオリ力の大きさは  $m\omega v$  程度であるので, 加速度の大きさは  $\omega v$  程度である。すなわち, 地球の自転の角速度の値を代入して

$$v = 1 \text{ ms}^{-1} \quad \text{のとき} \quad \omega v \approx 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$$

である。これは重力加速度の約 10 万分の 1 の大きさである。従って, コリオリ力の効果は, 主として, 長時間かけて観測することによって見出すことができる。コリオリ力の効果を, 下に具体的な例をあげて説明する。

## 13.3.2 フーコーの振り子

質量の大きなおもりを長いひもでつるした振り子は、長時間にわたってほとんど減衰せず振動を続ける。振り子は同じ面内で振動を続けるが、地表に固定した座標系で見ると、地球の自転のために振り子の振動面は次第に回転していく。これをフーコーの振り子と呼ぶ。

おもりのつりあいの位置を原点とする回転座標系をとり(図 13.7), おもりの質量を  $m$ , おもりをつるすひもの長さを  $L$ , ひもの張力を  $S$  とする。おもりの振幅がひもの長さに比べて十分小さい場合には、振り子の運動は  $xy$  平面内の運動としてよいので、おもりの運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -S \frac{x}{L} + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -S \frac{y}{L} - 2m\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} \end{aligned} \quad (13.56)$$

と書ける。鉛直方向 ( $z$  軸方向) の成分は省略した。右辺の第 1 項はひもの張力で真の力であり、第 2 項がコリオリ力である。 $L$  が変位  $x, y$  に比べて十分大きい場合には、ひもの張力は一定である。また、コリオリ力は小さい。従って、短時間(数分程度)でみれば、上の方程式は単振動の運動方程式として近似できる。すなわち、振動面が変化しない単振動である。しかし、長い時間かけると、コリオリ力の効果が振動面の回転として見えてくる。図 13.9 はフーコーの振り子の振動する様子を、コリオリ力を誇張して描いたものである。振れ始めは軌道が交差する中央であり、初速は水平に右向きである。軌道上の矢印は、等しい時間間隔における振り子の位置と運動の向きを表している。コリオリ力は速度ベクトルに垂直に、常に右向きに作用する。

フーコーの振り子の振動面の回転は、運動方程式を解かないでも、次のようにして求めることができる。運動方程式 (13.56) の第 2 式に  $x$  を掛け、第 1 式に  $y$  を掛けて差をとると

$$\frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = -\omega \sin \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2)$$

が得られる。これは直ちに積分でき

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = -\omega \sin \lambda (x^2 + y^2) \quad (13.57)$$

となる。ただし、 $x = y = 0$  を通る条件を用いて積分定数 (= 0) を決定した。ここで、 $xy$  平面上に極座標をとり

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (13.58)$$

として (13.57) に代入すると、直ちに

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega \sin \lambda \quad (13.59)$$

が得られる。

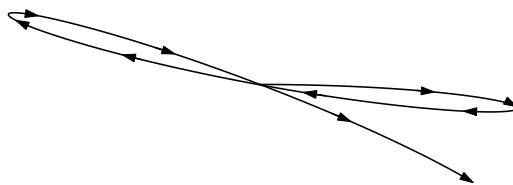


図 13.9: フーコーの振り子

平面極座標の  $\varphi$  はフーコーの振り子の振動面を表すので、この式は、振動面が角速度  $\omega \sin \lambda$  で少しずつ向きを変えることを示している。振り子を鉛直上方から見たとき、振動面は図 13.9 に示すように、北半球 ( $\lambda > 0$ ) では時計回り回転する。南半球 ( $\lambda < 0$ ) では反時計回りである。また、振動面の回転の角速度  $\omega \sin \lambda$  は一定である。これより、振動面の回転の周期は、緯度  $\lambda$  の地点で、

$$\text{振動面の回転の周期} = \left| \frac{1}{\sin \lambda} \right| \text{ 日}$$

である。北極と南極では 1 日に 1 回転し、赤道では振動面の回転は起こらない。なお、フーコーの振り子の振動の周期は一定であり、周期的につりあいの位置  $x = y = 0$  を通る。

### 13.3.3 低気圧に吹き込む風

低気圧に吹き込む風は、北半球では常に左回り（反時計回り）である。これはコリオリ力の効果である。

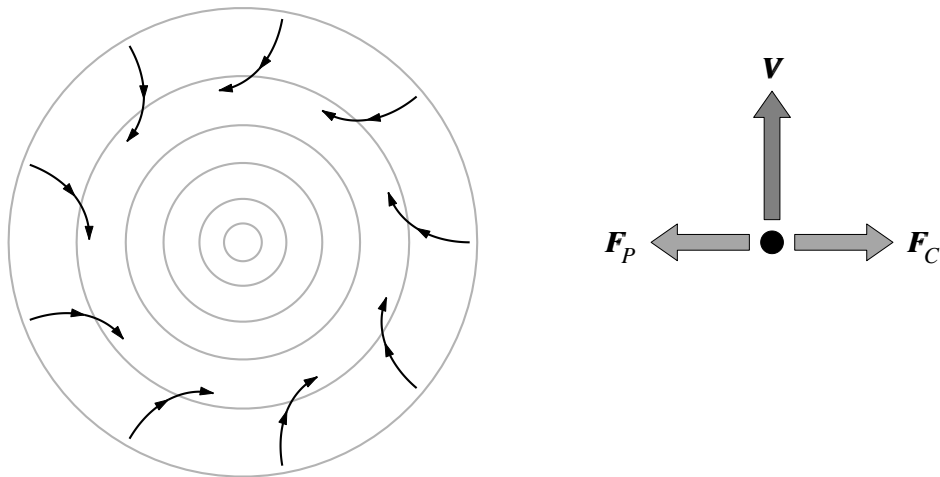


図 13.10: 低気圧に吹き込む風

低気圧は周囲より気圧が低い。図 13.10 の左図の灰色の円は気圧が等しい線（等圧線）を表している。低気圧の中心部へ向かうほど気圧が低く、気圧に傾きがある。空気の塊に注目すると、等圧線に垂直に内向きの気圧傾度力がはたらく。空気の塊は低気圧の中心に向かって動くが、この風にコリオリ力が速度に右向きにはたらく。その結果、速度は低気圧の中心に向かう向きから右へそれていく。ついに、図 13.10 の右図に示すように、気圧傾度力  $F_P$  とコリオリ力  $F_C$  がつりあい、風は等圧線に沿って吹くようになる。このような状況で吹く風を地衡風と呼ぶ。上空ではこのような状況で風が吹いている。

低気圧の中心に近づくと等圧線の曲率が大きくなり、風は加速度運動（等圧線にそった円周上を運動する）する。空気の塊とともに運動する座標系から見ると、低気圧の外向きにはコリオリ力と遠心力がはたらき、その和が内向きの気圧傾度力とつりあう。

地上では、風は等圧線と角度をなして吹く。これは地表との摩擦力の影響である(図13.11)。摩擦力  $F_f$  は空気の塊が運動する速度に逆向きであり、コリオリ力は垂直で右向きである。両者の和は低気圧の内から外の向きである。摩擦力が大きくなるほど、風は等圧線と大きな角度をなして吹く。地上では  $30^\circ$ - $40^\circ$ 、摩擦が小さい海上では  $15^\circ$ - $25^\circ$  である。

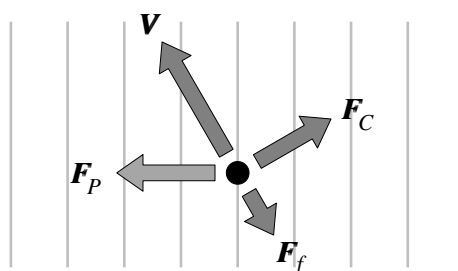


図13.11: 地表付近の風。縦線は等圧線を表す

### 13.3.4 自由落下に対する影響

高い塔の上から自由落下する質点にも地球の自転の影響が現れる。地球は西から東に自転しているが、上空より遅く移動する地表を基準にするため、質点は落下し始めた点の真下よりも東にずれた地点に落下する。この様子を見かけの力を考慮した運動方程式で確かめることができる。

重力以外の外力がない場合の運動方程式は、(13.55)において  $F_x = F_y = F_z = 0$  とすれば良い。図13.7に示すように、 $x$  軸の正の向きが南、 $y$  軸の正の向きが東、 $z$  軸の正の向きが鉛直上方である。質点はほとんど  $z$  軸に沿って落下するので、速度の  $z$  軸方向成分に比べて  $x$  軸方向成分、 $y$  軸方向成分は無視しても良い。このとき、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -2m\omega \cos \lambda \frac{dz}{dt}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad (13.60)$$

となる。自由落下に対応する初期条件は  $t = 0$  で

$$x = y = 0, \quad z = h, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 \quad (13.61)$$

である ( $h$  は落下を始める点の高さ)。運動方程式の  $x$  成分と  $z$  成分は直ちに積分でき

$$x = 0, \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (13.62)$$

となる。これを  $y$  成分の式に代入すると

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega g \cos \lambda t \quad (13.63)$$

であるから、これを積分して初期条件を用いて積分定数を決定すると

$$y = \frac{1}{3}\omega g \cos \lambda t^3 = \frac{1}{3}\omega g \cos \lambda \left[ \frac{2(h-z)}{g} \right]^{3/2} \quad (13.64)$$

が得られる。右辺の  $t$  を消去した落下曲線を ナイルの放物線 という。  $y > 0$  は東へずれることを表している。ずれの向きは北半球でも南半球でも同じであり、赤道から極へ向かうほどずれは小さくなる。