

第12章 剛体の運動（2）

12.1 剛体の平面運動

12.1.1 物理振り子

重力の作用によって、水平な固定軸のまわりに自由に回転（振動）できる剛体を 物理振り子 という。回転軸を z 軸，鉛直下向きに x 軸をとる（図 12.1）。

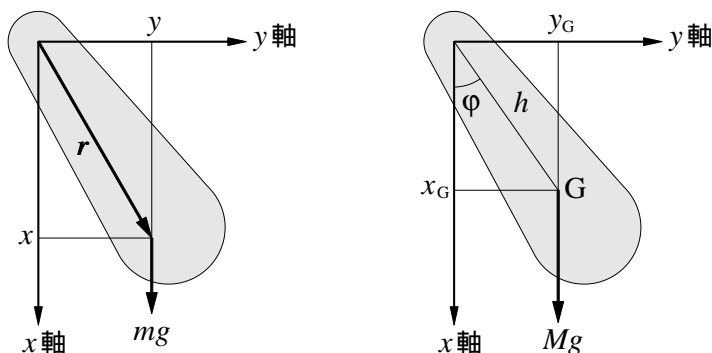


図 12.1: 物理振り子

運動方程式

位置 $r = (x, y)$ にある，剛体の微小部分を考える。この部分の質量を Δm とすると，これに作用する重力 $F = (\Delta mg, 0)$ の，固定軸のまわりのモーメントは z 軸方向であり，

$$\Delta N_z = x \cdot 0 - y \cdot \Delta mg = -\Delta mgy$$

となる。これを剛体全体にわたって加え合わせて，剛体に作用する重力のモーメントは

$$N_z = \sum_j -m_j g y_j = -g \sum_j m_j y_j$$

と書ける。ここで，右辺にある和 $\sum_j m_j y_j$ を物理振り子の重心の y 座標

$$y_G = \frac{\sum_j m_j y_j}{\sum_j m_j}$$

及び、物理振り子の質量

$$M = \sum_j m_j$$

を用いると、剛体に作用する重力のモーメントは

$$N_z = -g M y_G \quad (12.1)$$

となる。さらに、固定軸と重心の距離を h とし、固定軸から重心へ向かう直線が鉛直下向きと成す角を φ とすると、 $y_G = h \sin \varphi$ であるから、力のモーメントは

$$N_z = -Mgh \sin \varphi \quad (12.2)$$

と表せる。従って、これを (11.19) に代入して、固定軸のまわりの回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mgh \sin \varphi \quad (12.3)$$

となる。

相当単振り子

長さ ℓ のひもの先に質量 M のおもりを付けた単振り子の運動方程式

$$M\ell \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mg \sin \varphi \quad (12.4)$$

の両辺に h をかけると

$$M\ell h \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -Mg \sin \varphi$$

となる。これを、物理振り子の回転の運動方程式 (12.3) と比較すると、右辺は同じであるので、

$$I = M\ell h \quad (12.5)$$

が得られる。これより、物理振り子は、長さが

$$\ell = \frac{I}{Mh} \quad (12.6)$$

の単振り子と同じ運動をすることがわかる。(12.6) で表される ℓ を物理振り子の 相当単振り子の長さ という。

12.1.2 斜面をころがる円板

図 12.2 に示すように、水平面と角 θ をなす斜面を円板が滑らずに転がるときの運動を考える。円板は一樣で、質量が M で半径が a であるとする。斜面に沿って下向きに x 軸をとると、円板の重心の運動は x 方向だけの成分を考えればよい。また、円板の回転は、重心を通り、紙面に垂直な固定軸のまわりの回転だけを考えればよい。

運動方程式

剛体に作用する力は、重力 Mg と、斜面からの垂直抗力 N 及び摩擦力 F である。重心の運動方程式の x 成分は

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \theta - F \quad (12.7)$$

である。一方、回転の運動方程式は、円板の慣性モーメントを I 、回転角を φ として

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = aF \quad (12.8)$$

と書ける。右辺は摩擦力 F の回転軸のまわりのモーメントである。重力と垂直抗力の作用線は円板の重心を通るので、重心のまわりのモーメントは 0 である。

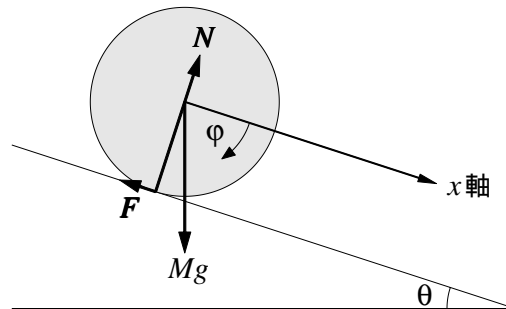


図 12.2: 斜面をころがる円板

一般に、重心の運動方程式と回転の運動方程式は独立であるが、斜面をころがる円板の場合は独立ではない。それは、円板が斜面をころがり重心が移動すると、それに応じた角度だけ円板が回転するからである。つまり、円板と斜面とのあいだに滑りがないため、

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{滑らない条件}) \quad (12.9)$$

の関係が常に成り立っている。これを時間で微分して

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (12.10)$$

が得られる。左辺は重心の運動方程式 (12.7) の左辺に比例し、右辺は回転の運動方程式 (12.8) の左辺に比例している。すなわち、重心の並進運動の加速度と回転の加速度は比例している。

2つの運動方程式 (12.7) と (12.8) から摩擦力 F を消去し、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \theta - \frac{I}{a} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

ここで、滑らない条件から導かれる関係式 (12.10) を用いると、

$$\left(M + \frac{I}{a^2} \right) \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \theta$$

となる。さらに、円板の慣性モーメント

$$I = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (12.11)$$

を代入すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3} g \sin \theta \quad (12.12)$$

が得られる。

円板が滑らない条件

2つの運動方程式から(12.10)を用いて微分の項を消去すると、摩擦力 F は

$$F = \frac{I}{I + Ma^2} Mg \sin \theta = \frac{1}{3} Mg \sin \theta \quad (12.13)$$

であることがわかる。円板が斜面に接する点で滑らない条件は、静止摩擦係数を μ として、 $F/N \leq \mu$ である。斜面に垂直な方向の力のつり合いから、垂直抗力は $N = Mg \cos \theta$ である。従って、滑らない条件は

$$\frac{IMg \sin \theta}{I + Ma^2} \frac{1}{Mg \cos \theta} = \frac{I}{I + Ma^2} \tan \theta = \frac{1}{3} \tan \theta \leq \mu \quad (12.14)$$

である。

運動方程式の解

運動方程式(12.12)は容易に積分できる。初期条件として、 $t = 0$ で

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad (12.15)$$

とすると

$$x = \frac{1}{3} g \sin \theta t^2 \quad (12.16)$$

が得られる。回転運動は重心の運動と独立ではないので、解(12.16)から回転角 φ の解も直ちに得られる。すなわち、 $t = 0$ で

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{より} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (12.17)$$

である。ただし、 φ の初期条件は与えなければならない。 $t = 0$ で $\varphi = 0$ とすると、滑らない条件から、

$$\varphi = \frac{x}{a} = \frac{1}{3a} g \sin \theta t^2 \quad (12.18)$$

が解である。

斜面を転がる円板に関する式は、斜面を転がる球の場合にも、慣性モーメントを $I = (2/5)Ma^2$ で置き換えればすべて当てはまる。

エネルギーの保存

2つの運動方程式(12.7)と(12.8)から摩擦力 F を消去した式

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{I}{a} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg \sin \theta \quad (12.19)$$

の両辺に dx/dt をかけ, (12.9) に注意して時間について積分すると

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = Mgx \sin \theta + C \quad (12.20)$$

となる。右辺の積分定数 C を初期条件 (12.15) によって決めると $C = 0$ となる。残る右辺の $x \sin \theta$ は円板がころがり降りる鉛直距離である。これを $h_0 - h$ とおけば

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + Mgh = Mgh_0 \quad (12.21)$$

となる。転がり始めるときのポテンシャル・エネルギー Mgh_0 は, 重心の並進の運動エネルギー (左辺の第 1 項), 回転の運動エネルギー (第 2 項), 及びポテンシャル・エネルギー (第 3 項) になっている。回転の運動エネルギーまで含めて, エネルギーの保存則が成り立つ。

12.1.3 玉突き

図 12.3 に示すように, 水平面上に置いた一様な球に撃力を加えたときの運動を調べる。球は滑らずに回転して移動する場合もあり, 滑りながら回転して移動する場合もある。球の質量を M , 半径を a , 慣性モーメントを I とする。水平面に平行に, 球が転がる向きに x 軸をとる。また, 球の回転角を φ で表す。

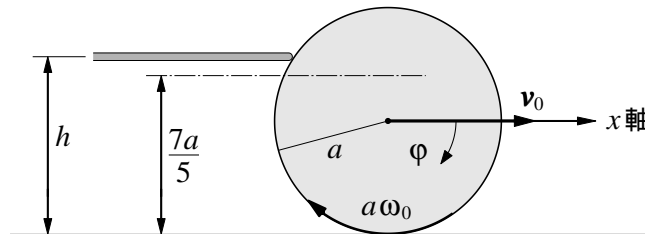


図 12.3: 玉突き

重心の運動

撃力は球の中心を含む鉛直面内で高さ h のところで水平方向に, 大きさ F で加えられるとする。ここでは $h \geq a$ と仮定する。また, 水平面から球に作用する摩擦力を F' で表す。球の重心の運動方程式 (x 成分) は

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F - F' \quad (12.22)$$

と書ける。ただし, 撃力は短い時間 Δt だけ作用し, F は一定ではない。そこで, 撃力が $t = 0$ から $t = \Delta t$ までの短い時間に作用するとして, 運動方程式を Δt の時間だけ積分して

$$M \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=\Delta t} - M \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = \int_0^{\Delta t} F dt = J \quad (12.23)$$

を得る。ここで定義した右辺の J は撃力の力積である。 Δt は極めて短い時間だけ作用するので、摩擦力の力積は無視できる。すなわち、撃力がはたらく前と後の球の運動量の変化は撃力の力積に等しい。時刻 $t = 0$ に球が止まっていた ($dx/dt = 0$) とすると、その直後 ($t = \Delta t$) に、

$$Mv_0 = J \quad (12.24)$$

で与えられる速度 v_0 で球は動き始める。

回転の運動方程式

撃力によって動き始めた球は、重心(球の中心)を通る軸のまわりに回転を始める。回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (h-a)F - aF' \quad (12.25)$$

と表される。右辺の第1項は撃力のモーメント、第2項は摩擦力のモーメントである。撃力が作用する短い時間にわたって積分して

$$I \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=\Delta t} - I \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0} = (h-a)F \quad (12.26)$$

となる。右辺の項を力積モーメント、あるいは角力積という。撃力が作用するは短い時間であるので、摩擦力の力積モーメントは無視できる。すなわち、角速度と慣性モーメントの積の、撃力が作用する前と後の変化量は撃力の力積モーメントに等しい。時刻 $t = 0$ で球が回転していなかった ($d\varphi/dt = 0$) とすると、撃力が作用した直後 ($t = \Delta t$) に

$$I\omega_0 = (h-a)F \quad (12.27)$$

で与えられる角速度 ω_0 で球は回転を始める。

撃力を受けたあとの球の運動

球が角速度 ω_0 で回転するとき、球の中心から見て、球と水平面の接点の速度の大きさは $a\omega_0$ である。(12.27) を用いると、速度の大きさは

$$a\omega_0 = \frac{a(h-a)}{I} J = \frac{5(h-a)}{2aM} J \quad (12.28)$$

と表せる。2番目の等号では、球の慣性モーメント $I = (2/5)Ma^2$ を代入した。一方、球の重心は速度 v_0 で x 軸の正の向きに移動する。従って、球が水平面に対して滑る速さは

$$v'_0 = v_0 - a\omega_0 = \frac{1}{M} J - \frac{5(h-a)}{2aM} J = \frac{7a-5h}{2aM} J \quad (12.29)$$

となる。この式から、球の運動は、球に撃力を加えた高さ h と $7a/5$ との大小関係によって次の3つの場合に分けられることがわかる。

- (1) $h = 7a/5$: $v'_0 = 0$ であり、球と水平面とのあいだに滑りはない。従って、滑り摩擦はなく(小さな転がり摩擦はある)、球はほとんど v_0 の速さで転がり続ける。

- (2) $h > 7a/5$: $v'_0 < 0$ であり, 回転の方が並進より速い。すなわち, 摩擦力は x 軸の正の向きであり, 回転を減速し重心の並進運動を加速する。これは滑りがあるあいだ続き, その後滑りがなくなるとほぼ一定の速さで進む。
- (3) $h < 7a/5$: $v'_0 > 0$ であり, 回転の方が並進より遅い。摩擦力は x 軸の負の向きであり, 回転を加速し並進を減速する。

$h \neq 7a/5$ の場合, すなわち, 上の (2) と (3) の場合, 滑り摩擦係数を μ とすると, 摩擦力の大きさは μMg であるから, 摩擦力がはたらく間の 2 つの運動方程式は

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \pm \mu Mg \quad (12.30)$$

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mp \mu Mga \quad (12.31)$$

と表せる。複合は, 上の符号が (2) の場合, 下の符号が (3) の場合に対応する。時間について積分して

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \pm \mu gt = \frac{J}{M} \pm \mu gt \quad (12.32)$$

$$a \frac{d\varphi}{dt} = a\omega_0 \mp \frac{5}{2} \mu gt = \frac{5(h-a)}{2a} \frac{J}{M} \mp \frac{5}{2} \mu gt \quad (12.33)$$

を得る。ただし, $t = \Delta t$ における初期条件を用いて積分定数を決定した。球が滑らなくなるのは, 上の 2 つの式の左辺が等しくなるとき, すなわち

$$t = \pm \frac{5h-7a}{7Mga\mu} J > 0 \quad (12.34)$$

である。従って, 球が滑らなくなった以降の速度は, (12.34) を (12.32) に代入して,

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt} = \frac{5h}{7a} \frac{J}{M} \quad (12.35)$$

で与えられる。

12.1.4 打撃の中心

図 12.4 に示すように, 剛体に撃力がはたらくときの剛体の運動を考える。剛体の重心を G , 重心から撃力の作用線におろした垂線の足を P で表す。剛体の質量を M , 撃力 F の作用線と剛体の重心の距離 (GP) を h とする。

撃力が作用しているあいだの, 重心の並進運動, 及び重心のまわりの回転運動の運動方程式は

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = hF \quad (12.36)$$

と表せる。撃力が作用するのは極めて短い時間であり、その時間にわたって運動方程式を積分すると、

$$M \frac{dx}{dt} = J, \quad I \frac{d\varphi}{dt} = hJ \quad (12.37)$$

が得られる。ここに、 J は撃力の力積であり、また、撃力を受ける前に剛体は静止していたとした。すなわち、撃力を受けた直後、剛体の重心は速度 $dx/dt = J/M$ で運動を始め、剛体は重心を通り紙面に垂直な軸のまわりに角速度 $d\varphi/dt = hJ/I$ を持つ。

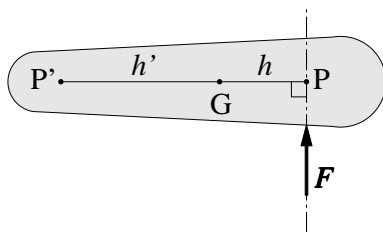


図 12.4: 打撃の中心

剛体が回転運動をするとき、その回転中心となる点（静止点）がある。回転中心は、重心 G と点 P を結ぶ直線上で、重心 G をはさんで点 P の反対側にあると考えられる。この点を P' で表し、重心からの距離を h' とする。重心の並進運動によって点 P' は図 12.4 で上向きに速度 dx/dt で動き、重心のまわりの回転運動によって点 P' は下向きに速度 $h' d\varphi/dt$ で運動する。静止点 P' は、両者の速度が相殺する点である。従って、点 P' が動かない条件は

$$\frac{dx}{dt} = h' \frac{d\varphi}{dt} \quad (12.38)$$

である。(12.37) を (12.38) に代入して

$$hh' = \frac{I}{M} \quad (12.39)$$

の関係が得られる。点 P' は剛体の回転の中心になっており、点 P' のことを点 P の打撃の中心と呼ぶ。なお、 h と h' は (12.39) に全く対称な形で現れているので、逆に、点 P は点 P' の打撃の中心である。

12.2 歳差運動

12.2.1 コマの歳差運動

コマを中心軸のまわりに高速で回転させて水平面上に少し傾けて置くと、中心軸は一定の角速度で、鉛直軸と一定の角度を保ちながら旋回する。この運動を 歳差運動 という。

コマの中心軸が水平面に接する点を座標原点とし、鉛直上向きに z 軸をとる。質量 M のコマが、その中心軸を z 軸と角 θ を保ちながら歳差運動しているとする。歳差運動の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (12.40)$$

である。左辺の L はコマの回転の角運動量で、コマの自転軸の方向を向き、その大きさは

$$L = I\omega \quad (12.41)$$

である。ここで、 I はコマの慣性モーメント、 ω はコマの自転の角速度である。(正確には、 L はコマの角運動量で、自転による角運動量と、歳差運動の角運動量のベクトル和である。しかし、自転速度が十分速い場合には歳差運動の角速度は自転の角速度に比べて無視できる。) 一方、(12.40) の右辺の N は原点のまわりの重力のモーメントであり、コマの質量が重心に集まったとして計算して良い。コマの重心と原点との距離を l とすると、重力のモーメントの大きさは

$$N = Mgl \sin \theta \quad (12.42)$$

である。モーメント N は、鉛直軸(重力の向き)とコマの自転軸(重心の位置ベクトルの向き)を含む平面に垂直であり、水平面内にある。

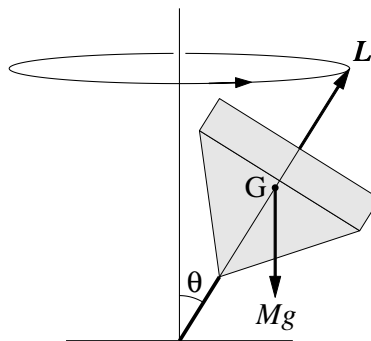


図 12.5: コマの歳差運動

重力のモーメントによってコマの角運動量の向きは時間とともに変化する。コマの角運動量ベクトル L は、 z 軸のまわりを、半径 $L \sin \theta$ で円運動する。その角速度(歳差運動の角速度)を Ω とすると、微小時間 dt のあいだの、角運動量の変化(大きさは一定であるが、向きが変化する)は

$$dL = L \sin \theta \Omega dt \quad (12.43)$$

である。(12.43) と (12.42) から

$$L \sin \theta \Omega = Mgl \sin \theta \quad (12.44)$$

従って、歳差運動の角速度は、

$$\Omega = \frac{Mgl}{L} = \frac{Mgl}{I\omega} \quad (12.45)$$

と表される。コマの自転が速ければ、角運動量 L は大きく、ゆっくり歳差運動する。

コマのように高速で回転する物体に力が作用すると、力に垂直な向きに回転軸が移動する。この現象をジャイロ現象という。ジャイロスコープは重心を支持点にした一種のコマである。力のモーメントが 0 であるのでコマの自転軸（自転の角運動量）は一定の大きさで一定の向きを保つ。この性質を利用してジャイロコンパスと呼ばれる装置が作られている。

12.2.2 地球の歳差運動

地球は地軸（北極と南極を結ぶ軸）を対称軸とした、少し扁平な回転楕円体である。また、地軸は地球の公転面の法線に対して 23 度 27 分傾いている。そのため、太陽（月）が地球に及ぼす万有引力は、太陽から遠い部分より太陽に近い部分では強く、その結果、地球の中心（重心）に対して力のモーメントを持つ。このモーメントによって、地球の地軸は歳差運動する。歳差運動の向きは自転の向きと逆であり、歳差運動の周期は約 26000 年である。