

第11章 剛体の運動 (1)

11.1 剛体の運動方程式

11.1.1 剛体の自由度

物体は相互に力を及ぼし合う無数の質点からなると考えられる。物体が運動するとき、一般には変形を伴う。しかし、変形を問題にしなくても良い場合がある。各質点の相互の位置が不変であるとみなして良い場合には、これを剛体と呼ぶ。この性質が剛体のもつ著しい特徴である。剛体は質点系の特別な場合として扱うことができる。

空間に固定した座標系から見たとき、質点系の「位置」を一意的に表すのに必要な変数の個数を自由度という。1つの質点からなる系の場合、質点の3個の座標 x, y, z で質点の位置を表せる。すなわち、自由度は3である。 N 個の質点からなる系は、それぞれの質点の位置は3個の変数で表されるので、質点の相対的位置についての制約がなければ、質点系の自由度は $3N$ である。しかし、剛体の場合、各質点の間の相対位置が不変であるから、自由度はずっと少ない。剛体内の1点（たとえば質量中心）は、3個の座標 x, y, z で決まる。この点を通り、剛体に固定した1つの直線を考えると、この直線の方法は2つの変数（たとえば極座標の2つの角度）によって決まる。剛体は、この直線のまわりに回転できるので、それを1つの変数（角度）で表すことができる。従って、6個の変数によって剛体内の各質点の位置は一意的に決まる。すなわち、

剛体の自由度は 6 である	$\left\{ \begin{array}{l} 3 : \text{剛体の質量中心の位置を表す 3 つの座標} \\ 2 : \text{剛体の向きを表す 2 つの角度} \\ 1 : \text{剛体の回転角} \end{array} \right.$
---------------	---

11.1.2 剛体の運動方程式

6個の自由度をもつ剛体の運動は6個の運動方程式によって決められる。それは、質量中心に対する運動方程式の3個の成分

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_j \mathbf{F}_j \quad (11.1)$$

角運動量に対する運動方程式の 3 個の成分

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_j (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j) = \mathbf{N} \quad (11.2)$$

である。

11.1.3 剛体の質量中心

剛体の運動は 2 組 (合計 6 個) の運動方程式 (11.1) と (11.2) によって決定される。質量中心の運動は質点の運動と全く同様に扱うことができる。剛体の質量中心は、質点系の質量中心と同様に、剛体が N 個の質点からなると考えれば

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j \quad (11.3)$$

で与えられる。 M は剛体の質量である。質量が連続的に分布しているときには、和の代わりに積分で表される。密度を $\rho(\mathbf{r})$ とし、質量は

$$M = \int \rho(\mathbf{r}) dV = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (11.4)$$

質量中心の位置は

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad (11.5)$$

である。 x, y, z の 3 成分では、 $\mathbf{r}_G = (x_G, y_G, z_G)$ 、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iiint \rho(x, y, z) x dx dy dz \\ y_G &= \frac{1}{M} \iiint \rho(x, y, z) y dx dy dz \\ z_G &= \frac{1}{M} \iiint \rho(x, y, z) z dx dy dz \end{aligned} \quad (11.6)$$

と書ける。

例：直円錐の質量中心 底面の半径が a 、高さが h 、一様な密度 ρ の直円錐を考える。質量は

$$M = \rho \frac{1}{3} \pi a^2 h = \frac{1}{3} \pi \rho h a^2 \quad (11.7)$$

である。質量中心は、直円錐の対称性から中心軸上にあることがわかる。そこで、円錐の頂点を原点とし、中心軸を x 軸とする (図 11.1 上図)。このとき、 x と $x + dx$ の間にあるのは、半径が ax/h で厚さが dx の薄い円盤であり、その体積は次のように表せる：

$$dV = \pi \left(\frac{ax}{h} \right)^2 dx. \quad (11.8)$$

従って、質量中心の x 座標は

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_0^h \rho x \pi \left(\frac{ax}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{M} \frac{\rho \pi a^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{3}{4} h, \end{aligned} \quad (11.9)$$

すなわち、直円錐の質量中心は、中心軸上で、底面からの高さが、円錐の高さの $1/4$ の点であることがわかる。

例：半球の質量中心 半径が a で一様な密度 ρ の半球を考える。質量は

$$M = \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \rho \pi a^3. \quad (11.10)$$

半球の対称性から、質量中心は中心軸上にある。そこで図 11.1 下図のように座標軸をとる。 x と $x + dx$ の間にあるのは、半径が $\sqrt{a^2 - x^2}$ で厚さが dx の薄い円盤であるので、その体積は

$$dV = \pi(a^2 - x^2) dx \quad (11.11)$$

である。従って、質量中心の x 座標は

$$x_G = \frac{1}{M} \int_0^a \rho x \pi (a^2 - x^2) dx = \frac{3}{8} a \quad (11.12)$$

であり、すなわち、半球の質量中心は中心軸上で、球の中心から半径の $3/8$ の距離の点である。

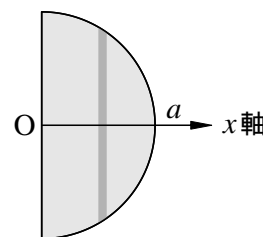
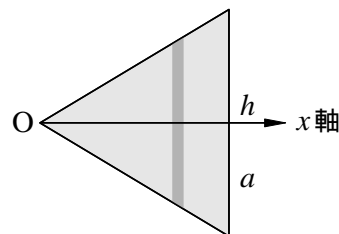


図 11.1: 剛体の質量中心．上：直円錐，下：半球

11.2 固定軸のまわりの回転

11.2.1 固定軸のまわりの回転と慣性モーメント

角運動量に対する運動方程式 (11.2) の意味を調べるために、ここでは、簡単な例として、固定軸のまわりの剛体の回転を考える。

剛体がある直線のまわりに自由に回転でき、しかもその回転以外の運動ができないとき、この直線を **固定軸** という。固定軸のまわりの回転運動は、この軸のまわりの回転角だけで剛体の位置と傾きが決まってしまう（剛体を構成する無限個の質点の位置が決まってしまう）。すなわち、運動の自由度は 1 である。従って、運動は 1 つの運動方程式（固定軸のまわりの角運動量に対する運動方程式）によって決まる。

固定軸を z 軸にとると、 z 軸のまわりの角運動量（回転）の運動方程式は

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \quad (11.13)$$

で表される。点 (x, y, z) にある質量 m の質点を考えると、その角運動量の z 成分は、角運動量の定義から

$$L_z = x \left(m \frac{dy}{dt} \right) - y \left(m \frac{dx}{dt} \right) \quad (11.14)$$

である。ここで、図 11.2 に示すように、質点の速度は、回転の速さを表す角速度 $\omega = d\varphi/dt$ に比例し、 z 軸（回転軸）からの距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ に比例する

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega \sqrt{x^2 + y^2} \sin \varphi = -\frac{d\varphi}{dt} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{d\varphi}{dt} y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega \sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi = \frac{d\varphi}{dt} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d\varphi}{dt} x. \end{aligned} \quad (11.15)$$

これを (11.14) に代入して

$$L_z = m(x^2 + y^2) \frac{d\varphi}{dt} \quad (11.16)$$

を得る。

剛体が、 N 個の質点からなると考えれば、剛体の角運動量の z 成分は、個々の質点の角運動量の z 成分の和である。回転の角速度が全ての質点に共通であることに注意して

$$L_z = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) \frac{d\varphi}{dt} = I_z \frac{d\varphi}{dt} \quad (11.17)$$

と書ける。右辺で導入した

$$I_z = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) \quad (11.18)$$

を z 軸のまわりの剛体の 慣性モーメント という。 図 11.2: 固定軸のまわりの回転

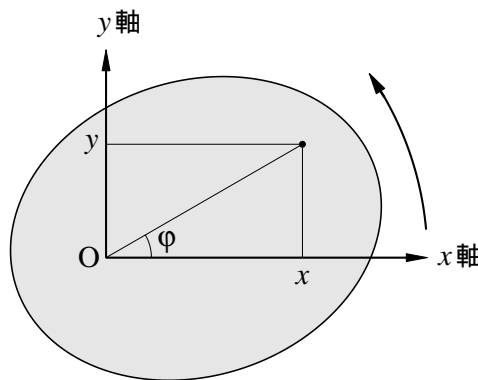
(11.18) で、 $x_j^2 + y_j^2$ は質点 j の回転軸からの距離の 2 乗であり、時間と共に変化しない量である。 z 軸のまわりの角運動量 (11.17), (11.18) を代入して、

固定軸 (z 軸) のまわりの回転の運動方程式は

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z \quad (11.19)$$

と表される。

運動方程式 (11.19) は質点の運動方程式と同じ形をしている。力には力のモーメントが対応し、位置の 2 階時間微分には角度の 2 階時間微分、質量には慣性モーメントが対応している。一定の力が作用するとき質点の加速度が質量に反比例するように、一定の力のモーメントが作用するとき剛体の角加速度は慣性モーメントに反比例する。言い換えると、質量が



質点の運動状態の変えにくさを表す量であるように、慣性モーメントは剛体の回転状態の変えにくさを表す量である。また、(11.18) が示すように、慣性モーメントは、質量に比例し、質量が回転軸から遠くに分布するほど大きくなる。

11.2.2 剛体の運動エネルギー

剛体の運動は並進運動と、回転中心のまわりの回転運動からなる。静止系に対して回転中心が速度 \mathbf{v}_0 で運動し、剛体は回転中心のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとする。回転中心に対する質点 j の位置ベクトルを \mathbf{r}_j とすると、静止系からみた質点 j の速度 \mathbf{v}_j は

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j \quad (11.20)$$

と表せる。従って、剛体の運動エネルギー K は

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_0^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j)^2 + \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (11.21)$$

と書ける。右辺の第1項の和は質点の質量に関する和であり、剛体の質量 $M = \sum_{j=1}^N m_j$ になる。右辺の第2項は、ベクトル積とスカラー積の性質

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (11.22)$$

を用いると、

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j [r_j^2 - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}_j)^2] \omega^2 \quad (11.23)$$

と表せる。ここで、 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ は回転軸方向の単位ベクトルであり、

$$I = \sum_{j=1}^N m_j [r_j^2 - (\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{r}_j)^2] \quad (11.24)$$

の括弧 [] の中が、質点 j の、回転軸からの距離の2乗に等しいことから、 I は回転軸のまわりの慣性モーメントになることがわかる。また、(11.21) の右辺の第3項は、3つのベクトルのスカラー三重積の性質

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (11.25)$$

を用いて

$$\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j) = \left[\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j \right] \cdot (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \quad (11.26)$$

と書ける。右辺の和は質点の質量と位置ベクトルの積の和であり、回転中心の速度と角速度のベクトル積はすべての質点に対して共通である。以上をまとめて、剛体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \left[\sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j \right] \cdot (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \quad (11.27)$$

となる。

質量中心が回転中心であるとき、右辺の第 3 項は質量中心の性質 ($\sum m_j \mathbf{r}_j = 0$) から 0 になり、従って運動エネルギーは (11.27) より

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad (11.28)$$

となる。第 1 項は、剛体の並進運動のエネルギーであり、第 2 項は質量中心のまわりの回転運動のエネルギーである。 I_G は質量中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントである。

並進運動を考えず、回転中心のまわりの回転運動だけを問題にするときには、 $v_0 = 0$ である。従って、(11.27) の第 1 項と第 3 項は 0 になり、回転運動のエネルギーは

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (11.29)$$

となる。

11.3 慣性モーメント

11.3.1 慣性モーメントの性質

回転半径 剛体に固定した 1 つの軸を考え、そのまわりの慣性モーメントを調べる。固定軸を z 軸とすると、慣性モーメントは

$$I = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) \quad (11.30)$$

で与えられる。ここで、 κ ($\kappa > 0$) を

$$\kappa^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2) \quad (11.31)$$

で定義すると、慣性モーメントは

$$I = M \kappa^2 \quad (11.32)$$

と表せる。 κ を 回転半径 という。回転半径は長さの次元をもつ。各質点の質量を λ 倍すると、剛体の質量と慣性モーメントは λ 倍されるが、回転半径 κ は変わらない：

$$m_j \rightarrow \lambda m_j \quad \Longrightarrow \quad M \rightarrow \lambda M, \quad I \rightarrow \lambda I. \quad (11.33)$$

質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメント 慣性モーメントには次の重要な性質がある。

質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメント I_G を知っていれば，質量中心から距離 h 離れた平行な軸のまわりの慣性モーメント I は次の式で与えられる：

$$I = I_G + Mh^2. \quad (11.34)$$

剛体に固定した1つの軸のまわりの慣性モーメント I と，これに平行で質量中心を通る軸のまわりの慣性モーメント I_G との関係を調べる（図 11.3）。

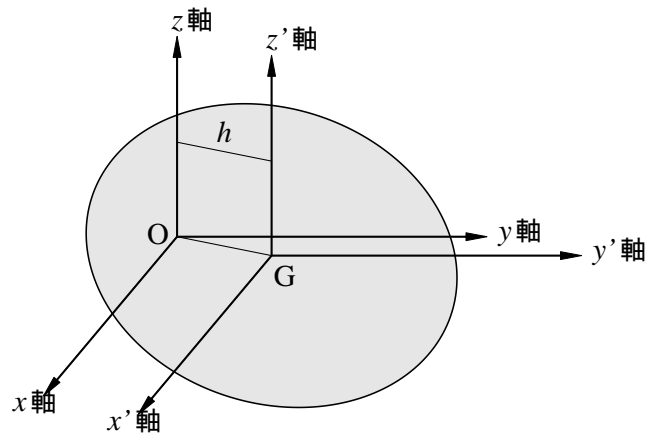


図 11.3: 平行な2つの軸のまわりの慣性モーメント

それぞれの軸を z 軸， z' 軸とすると，

$$I = \sum_{j=1}^N m_j (x_j^2 + y_j^2), \quad I_G = \sum_{j=1}^N m_j (x_j'^2 + y_j'^2) \quad (11.35)$$

と表される。ここで， $r_j = r_G + r_j'$ すなわち

$$x_j = x_G + x_j', \quad y_j = y_G + y_j', \quad z_j = z_G + z_j' \quad (11.36)$$

である。質量中心の定義から，

$$Mx_G = \sum_{j=1}^N m_j x_j = \sum_{j=1}^N m_j x_G + \sum_{j=1}^N m_j x_j' = Mx_G + \sum_{j=1}^N m_j x_j' \quad (11.37)$$

となる。 y 座標と z 座標についても同様の関係が成り立つので，質量中心を原点とする質点 j の位置 (x_j', y_j', z_j') に対して

$$\sum_{j=1}^N m_j x_j' = 0, \quad \sum_{j=1}^N m_j y_j' = 0, \quad \sum_{j=1}^N m_j z_j' = 0 \quad (11.38)$$

が成り立つ。この関係式を用いて、慣性モーメント I を書き直すと

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^N m_j [(x_G + x'_j)^2 + (y_G + y'_j)^2] \\ &= \sum_{j=1}^N m_j (x_G^2 + 2x_G x'_j + x'^2_j + y_G^2 + 2y_G y'_j + y'^2_j) \\ &= M(x_G^2 + y_G^2) + I_G \end{aligned} \quad (11.39)$$

となる。ここで、

$$h^2 = x_G^2 + y_G^2 \quad (11.40)$$

とおくと、 h は z 軸と z' 軸との距離、すなわち、固定軸 (z 軸) と質量中心との距離である。

11.3.2 慣性モーメントの例

細い棒 図 11.4 の上図に示すように、一様な細い棒の、中心を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求める。棒の質量を M 、長さを L とする。このとき、棒の単位長さ当たりの質量 (線密度) は $\lambda = M/L$ である。回転軸からの距離が x と $x + dx$ の部分を考えて、この部分の質量は λdx であり、この部分の慣性モーメント $dI = x^2 \lambda dx$ である。従って、棒全体の慣性モーメントは、 dI を x について $-L/2$ から $+L/2$ まで積分して、

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2 \quad (11.41)$$

となる。回転半径は $\kappa = L/\sqrt{12}$ である。

同じ棒でも、図 11.4 の下図に示すように、棒の端を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは異なる。慣性モーメントは、上の計算で、積分範囲を代えるだけで求まる：

$$I = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2. \quad (11.42)$$

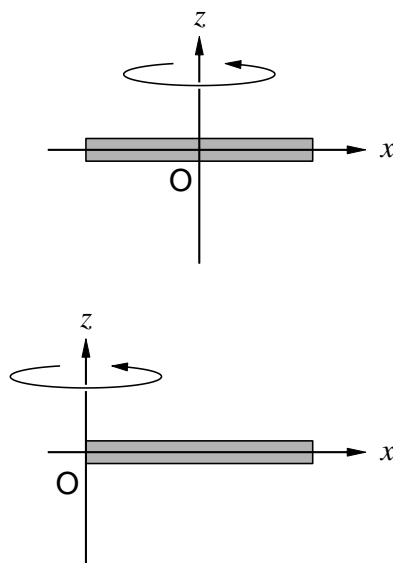


図 11.4: 細い棒の慣性モーメント

円板 密度が一様な円板の、1つの直径のまわりの慣性モーメントは次のように求められる。回転軸を z 軸とする (図 11.5 左図)。円板を回転軸に垂直な細い棒の集まりと考えると、図 11.4 の上図に示した細い棒の慣性モーメントの和として円板の慣性モーメントが得られることを利用する。

円板の質量を M , 半径を a とする。このとき, 円板の面密度 (単位面積あたりの質量) は $\sigma = M/(\pi a^2)$ である。 z 座標が z から $z + dz$ までの部分をとると (図 11.5 の右図に示す濃い灰色の部分) , これは長さが $L = 2\sqrt{a^2 - z^2}$ で質量が $\sigma L dz$ の細い棒と考えられる。すなわち, この棒状部分の慣性モーメントは (11.41) から

$$\frac{\sigma L dz}{12} L^2 = \frac{2\sigma}{3} (a^2 - z^2)^{3/2} dz \quad (11.43)$$

となる。これを z について $-a$ から a まで積分して, 慣性モーメントは

$$I = \frac{2\sigma}{3} \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^{3/2} dz \quad (11.44)$$

と書ける。ここで変数変換 $z = a \sin \theta$ をすると

$$(a^2 - z^2)^{3/2} = [a^2 (1 - \sin^2 \theta)]^{3/2} = a^3 \cos^3 \theta, \\ \frac{dz}{d\theta} = a \cos \theta$$

より, 積分を実行して

$$I = \frac{2\sigma}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3 \cos^3 \theta a \cos \theta d\theta \\ = \frac{2\sigma a^4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} + \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta = \frac{\pi \sigma a^4}{4} = \frac{1}{4} M a^2 \quad (11.45)$$

が得られる。

次に, 図 11.6 左図のように, 同じ円板の別の軸のまわりの慣性モーメントを求める。回転軸は, 円板の中心を通り, 円板に垂直な軸である。

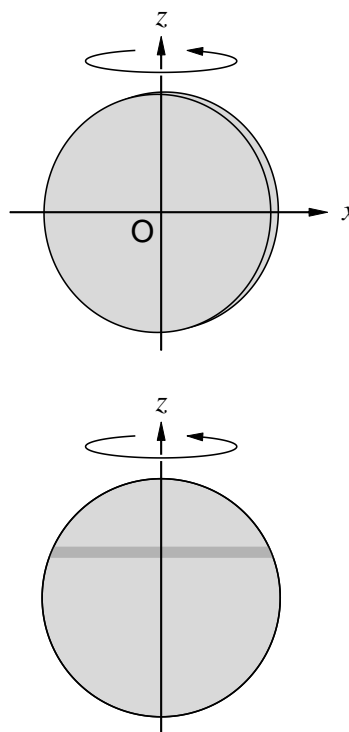


図 11.5: 円板の慣性モーメント (1)

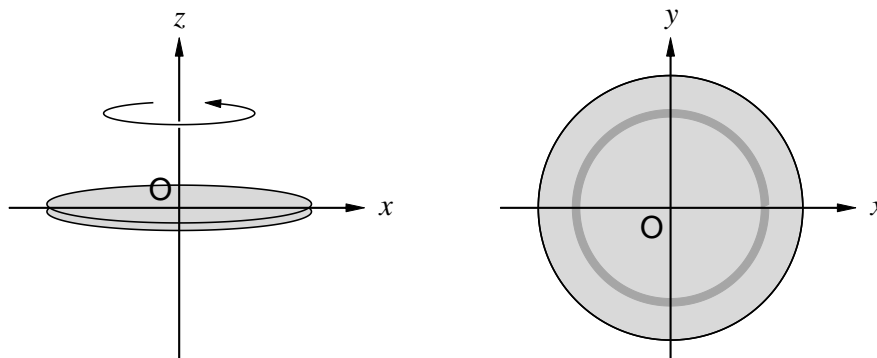


図 11.6: 円板の慣性モーメント (2)

図 11.6 の右図は、左図の円板を z 軸の正から負の向きに見た図である。軸からの距離が r と $r + dr$ の円環 (右図の濃い灰色の部分) を考えると、この部分の質量は $\sigma 2\pi r dr$ である。従って、慣性モーメントは、 r について 0 から a まで積分して、

$$I = \int_0^a \sigma 2\pi r r^2 dr = \frac{\sigma \pi a^4}{2} = \frac{1}{2} Ma^2 \quad (11.46)$$

となる。

球 密度が一様な球の、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求める。球の質量を M 、半径を a とする。密度は $\rho = M/(4\pi a^3/3)$ である。 z 座標が z から $z + dz$ までの部分をとると (図中の濃い灰色の部分)、半径が $\sqrt{a^2 - z^2}$ で質量が $\rho\pi(a^2 - z^2) dz$ の薄い円板と考えられる。すなわち、この円板部分の慣性モーメントは (11.46) を用いて

$$dI = \frac{1}{2} \rho\pi(a^2 - z^2)(a^2 - z^2) dz = \frac{1}{2} \rho\pi(a^2 - z^2)^2 dz \quad (11.47)$$

である。これを z について $-a$ から a まで積分して、慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{2} \rho\pi \int_{-a}^a (a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \rho\pi a^5 = \frac{2}{5} Ma^2 \quad (11.48)$$

となる。

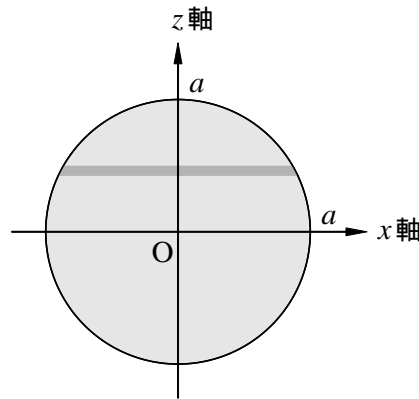


図 11.7: 球の慣性モーメント

単純な形をした剛体の慣性モーメントを表 11.1 に示す。

表 11.1 単純な形の剛体の慣性モーメント (一様な密度)

剛体の形	大きさ	軸の位置	慣性モーメント
細い棒	長さ l	中点を通り棒に垂直	$\frac{1}{12} Ml^2$
矩形板	辺の長さ a, b	質量中心を通り辺 b に平行	$\frac{1}{12} Ma^2$
		質量中心を通り面に垂直	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
直方体	辺の長さ a, b, c	軸を通り辺 c に平行	$\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
円輪	半径 a	直径	$\frac{1}{2} Ma^2$
		中心を通り面に垂直	Ma^2
円板	半径 a	直径	$\frac{1}{4} Ma^2$
		中心を通り面に垂直	$\frac{1}{2} Ma^2$
楕円板	長径 a , 短径 b	短径	$\frac{1}{4} Ma^2$
		中心を通り面に垂直	$\frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$
球殻	半径 a	直径	$\frac{2}{3} Ma^2$
球	半径 a	直径	$\frac{2}{5} Ma^2$
円筒	半径 a , 長さ l	中心軸	Ma^2
		中心を通り中心軸に垂直	$M \left(\frac{a^2}{2} + \frac{l^2}{12} \right)$
円柱	半径 a , 長さ l	中心軸	$\frac{1}{2} Ma^2$
		中心を通り中心軸に垂直	$M \left(\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$