第7章　万有引力の法則

7.1　ケプラーの法則

ケプラーは，太陽のまわりを回る惑星の運動を３つの法則にまとめた。

第１法則　惑星は，太陽を焦点の１つとする楕円軌道を描く。

第２法則　太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積（面積速度）は一定である。

第３法則　惑星が太陽のまわりを回る周期の２乗は，楕円軌道の長軸半径の３乗に比例する。

楕円　２つの定点からの距離の和が一定の曲線が楕円である。２つの定点を **焦点** という。すなわち，２つの焦点間の距離を $2c$，２つの焦点から点 P までの距離をそれぞれ r, r' としたとき，正定数 a $(a > c > 0)$ に対して，

$$r + r' = 2a \tag{7.1}$$

を満たす点は楕円になる（図 7.1）。

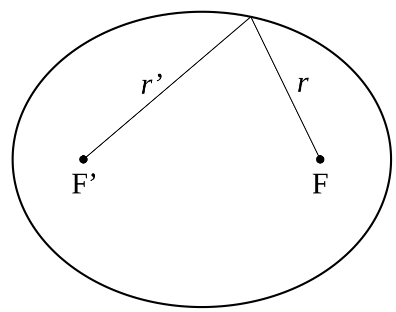

図 7.1: 楕円

楕円の直角座標表示（図 7.2 左）　２つの焦点 F, F' を結ぶ直線を x 軸とし，F と F' の中央に原点をとる。焦点の座標を $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c > 0)$ とすると，２つの焦点から点 $\mathrm{P}(x, y)$ までの距離はそれぞれ

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{7.2}$$

で与えられる。これを (7.1) に代入すると，

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \tag{7.3}$$

として

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.4}$$

が得られる。これは直角座標系における楕円の方程式である。a を **長軸半径**, b を **短軸半径**, また，焦点が原点から離れている度合いを示す

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{7.5}$$

を **離心率** という。

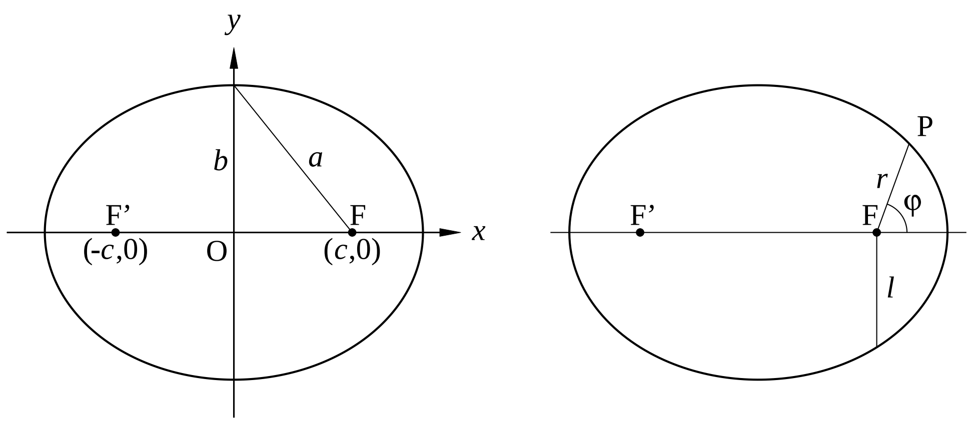

図 7.2: 楕円．左：xy 座標，右：極座標

楕円の極座標表示（図 7.2 右）　焦点 F を原点とした平面極座標をとり，F からの距離 r と，F と F' を結ぶ直線からの角 φ を用いて点 P の位置を表す。焦点 F' と点 P の距離 r' は（余弦定理を用いて）

$$r'^2 = r^2 + (2c)^2 + 2(2c)r\cos\varphi \tag{7.6}$$

である。左辺の r' に，楕円を与える式 (7.1) より $r' = 2a - r$ を代入すると，

$$r\,(\,a + c\cos\varphi\,) \,=\, a^2 - c^2$$

となる。ところで，(7.5) 及び (7.3) から

$$c \,=\, a\varepsilon, \qquad a^2 - c^2 \,=\, b^2$$

であるので，これを代入して

$$ra\,(\,1 + \varepsilon\cos\varphi\,) \,=\, b^2$$

と書き直せる。ここで，**半直弦**（$\varphi = \pi/2$ における r の大きさ）と呼ばれる長さ

$$l = \frac{b^2}{a} \tag{7.7}$$

を定義して，楕円の極座標表示

$$\boxed{\,r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \qquad (\,0 \le \varepsilon < 1\,)\,} \tag{7.8}$$

が得られる。長軸半径 a と短軸半径 b は，半直弦と離心率によって

$$a = \frac{l}{1-\varepsilon^2}, \qquad b = \frac{l}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{7.9}$$

と表される。なお，$\varepsilon = 0$ のとき円（$a = b$, $c = 0$）になる。

太陽系の８つの惑星に対して，長軸半径 a と公転周期 T の関係を図 7.3 に示す。長軸半径は天文単位（天文単位 $= 1.496\times 10^8$ km）を単位として，周期は年を単位として表してある。ケプラーの第３法則によれば

$$\frac{T^2}{a^3} = c\text{（一定）} \tag{7.10}$$

であるから，両辺の対数をとって

$$\log T = \frac{1}{2}\log c + \frac{3}{2}\log a \tag{7.11}$$

となる。すなわち，横軸に $\log a$，縦軸に $\log T$ をとると，惑星を表す点は直線にのる（最も右上の点は冥王星）。

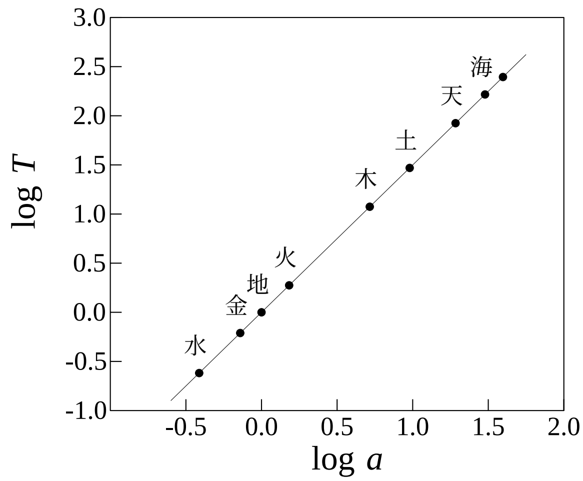

図 7.3: 惑星の公転周期と長半径の相関

7.2 万有引力の法則

ここでは，運動方程式を用いて，ケプラーの第２法則から始め，第１法則を加え，さらに第３法則を加えていくことによって，惑星が太陽から受ける力がどのように規定されていくかを見ていく。まず，太陽を含む平面上を惑星が運動することを出発点とする。このとき，太陽を原点とする平面極座標において，一般に，質量 m の物体の運動方程式は，r 方向成分と φ 方向成分に分けて次のように表せる。

$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = F_r \tag{7.12}$$

$$m\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) = F_\varphi \tag{7.13}$$

7.2.1 距離の２乗に反比例する中心力

ケプラーの第２法則

極座標で面積速度は

$$2\times\text{（面積速度）} = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{7.14}$$

と表せる。この式は (7.13) の ( ) の中に現れる式である。従って，ケプラーの第 2 法則（面積速度一定）から，

$$F_\varphi = 0 \tag{7.15}$$

であることがわかる。すなわち，ケプラーの第 2 法則から，惑星が太陽から受ける力は r 方向成分 F_r だけを持つことが導かれる。

ここで，面積速度一定から，保存する量を

$$h \,=\, r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{7.16}$$

と置く。この量を用いて，運動方程式の r 方向成分 (7.12) は

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{h^2}{r^3}\right) = F_r \tag{7.17}$$

と書き直せる。ただし，力は r 方向成分 F_r は，一般に，r と φ の関数 $F_r(r,\varphi)$ である。

＋ ケプラーの第 1 法則

さらに，ケプラーの第 1 法則を考慮すると，F_r が r の関数であることが，また，その具体的な依存性までが導かれる。

惑星の軌道は太陽を焦点の 1 つとする楕円であるが，楕円の極座標表示 (7.8) を

$$\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \tag{7.18}$$

と書き直して，これを時間で微分すると

$$-\frac{l}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \tag{7.19}$$

となる。この式は，面積速度一定の式 (7.16) を用いて

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{l}\,\varepsilon\sin\varphi \tag{7.20}$$

と書き直せる。この式をもう一度時間について微分し，(7.16) の関係を用い，さらに (7.18) を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{h}{l}\,\varepsilon\cos\varphi\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{h}{l}\,\varepsilon\cos\varphi\,\frac{h}{r^2} = \frac{h^2}{lr^2}\,\varepsilon\cos\varphi \\
&= \frac{h^2}{lr^2}\left(\frac{l}{r} - 1\right) \,=\, \frac{h^2}{r^3} - \frac{h^2}{lr^2}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

となる。この結果を (7.17) と比較して，力の r 方向成分は

$$-\,m\,\frac{h^2}{lr^2} = F_r \tag{7.22}$$

であることがわかる。F_r は r だけの関数である。

以上から，惑星が太陽から受ける力は，その φ 方向成分が 0 であり，r 方向成分は r だけの関数（r^2 に反比例）である。従って，この力が中心力であることを示している。また (7.22) の負号は引力であることを意味している。すなわち，

> ケプラーの第１法則と第２法則から，惑星が太陽から受ける力は，太陽を力の中心とする中心力であり，太陽からの距離 r の２乗に反比例する引力
>
> $$f(r) = -\frac{mh^2}{l}\frac{1}{r^2} \tag{7.23}$$
>
> であることが導かれる。

7.2.2 普遍的な力

惑星が受ける力 (7.23) の比例定数は mh^2/l であるが，ここで惑星の質量 m，面積速度（の２倍）h，及び楕円軌道の半直弦 l は惑星ごとに異なる。すなわち，太陽が惑星に及ぼす引力は惑星ごとに異なるように見える。そこで，ケプラーの第３法則の役割を考えてみる。

＋ ケプラーの第３法則

惑星は，一定の面積速度で楕円軌道を公転している。従って，公転周期は楕円の面積を面積速度で割って得られる。楕円の面積 S は，楕円の長軸半径 a と短軸半径 b によって $S = \pi ab$ と表されるから，公転周期 T は

$$T = \frac{S}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{7.24}$$

である。ケプラーの第３法則によれば，周期 T の２乗は長軸半径 a の３乗に比例する。これは，

$$\frac{T^2}{a^3} = c \text{（定数）} \tag{7.25}$$

であり，右辺の定数がすべての惑星に対して共通な定数であることを意味している。(7.24) を (7.25) に代入し，さらに (7.9) によって a と b を半直弦 l と離心率 ε で表すと，定数 c は

$$c = \frac{4\pi^2 l}{h^2} \tag{7.26}$$

となる。これから，惑星が受ける力 (7.23) の比例定数は

$$\frac{mh^2}{l} = \frac{4\pi^2 m}{c} \tag{7.27}$$

と表される。すなわち，

ケプラーの第 3 法則を加えることによって，惑星が太陽から受ける力は

$$f(r) = -\frac{4\pi^2}{c}\frac{m}{r^2} \tag{7.28}$$

と表され，惑星の質量 m を除いた比例定数は，個々の惑星の面積速度や半直弦によらない共通な定数であることが導かれる。

このように，ケプラーの 3 つの法則から，惑星が太陽から受ける力は，普遍的な力であり，惑星の質量 m に比例し，太陽からの距離 r の 2 乗に反比例する引力であることが導かれる。

万有引力の法則へ

この力が惑星の質量に比例することは，これが質量に起因する力であることを示唆しており，従って，太陽の質量にも比例すると考えるのが合理的である。太陽の質量を M，比例定数を G として，

$$f(r) = -G\frac{mM}{r^2} \tag{7.29}$$

と表される。

ニュートンは，すべての物体のあいだに，質量に起因する力がはたらいていると考えた。これを **万有引力** という。また，上の式で表される法則を **万有引力の法則** という。比例定数 G は

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}} \tag{7.30}$$

であり **万有引力定数** と呼ばれる。

7.3　万有引力のポテンシャル

7.3.1　球状物体によるポテンシャル

万有引力の法則は，2 つの質点のあいだに作用する力について述べているので，拡がりを持つ物体の場合には，物体を質点とみなせるような小さな部分に分けて考えなければならない。ところで，万有引力は中心力であり，中心力は保存力であるので，万有引力にはポテンシャルが存在する。ここでは球状物体によるポテンシャルを求め，物体の外では，全質量が球の中心に集まったと考えて良いことを示す。

半径 a の球があり，密度が球の中心からの距離の関数 $\rho(r)$（$0 \le r \le a$）で与えられているとする。このとき，球の中心から距離 R の点 P における，この球状物体によるポテンシャルを求めることにする。球の中心を座標原点とする極座標をとる。z 軸（$\theta = 0$ の直線）上に点 P をとり，そこに質量 m の質点を置く（図 7.4）。

いま，球の内部に微小体積 $\mathrm{d}V$ を考える。極座標では，

$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}r)\,(r\,\mathrm{d}\theta)\,(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi) = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{7.31}$$

と表される。ここでの密度は $\rho(r)$ であるから，微小体積には $\rho(r)\,\mathrm{d}V$ の（微小な）質量がある。また，この微小体積の部分から点 P までの距離は $\ell = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$ と表せる（余弦定理）。従って，微小体積にある質量が点 P につくる万有引力のポテンシャルは

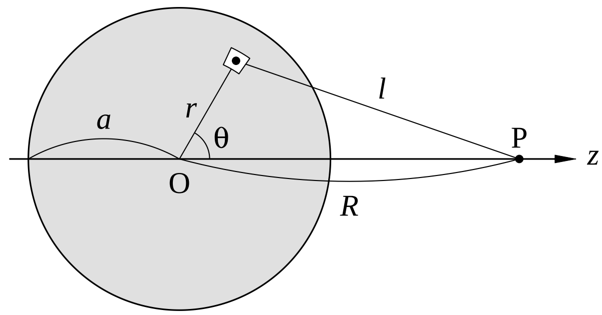

図 7.4: 球対称に分布する質量による力のポテンシャルの計算

$$\mathrm{d}U \;=\; -\,G\,\frac{m\,\rho(r)\,\mathrm{d}V}{\ell} \;=\; -\,G\,\frac{m\,\rho(r)\,\mathrm{d}V}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} \tag{7.32}$$

であり，これを球の内部全体にわたって積分すれば，球状物体による点 P におけるポテンシャル $U(R)$ が求められる

$$U(R) = -\,Gm\int_0^a \mathrm{d}r\,\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\,\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\frac{\rho(r)\,r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}}. \tag{7.33}$$

被積分関数は変数 φ によらないので，φ についての積分は直ちに実行でき 2π を与える：

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi. \tag{7.34}$$

変数 θ については，$s = \cos\theta$ と，$\mathrm{d}s = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり，θ が 0 から π まで変化するとき，s は $+1$ から -1 まで変化する。従って θ についての積分は

$$\begin{aligned} I_\theta \;&=\; \int_0^\pi \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}} \;=\; \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRs}} \\ &=\; -\,\frac{1}{rR}\left[\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRs}\right]_{-1}^1 \;=\; -\,\frac{1}{rR}\left(\sqrt{(r-R)^2} - \sqrt{(r+R)^2}\right) \end{aligned} \tag{7.35}$$

より，r と R の大小関係に応じて

$$I_\theta = \begin{cases} \dfrac{2}{R} & (r < R) \\ \dfrac{2}{r} & (r \geq R) \end{cases} \tag{7.36}$$

となる。ここで，点 P が球の外にあるとする。変数 φ と θ についての積分の結果 (7.34) と (7.36) を，ポテンシャルを求める式 (7.33) に代入して

$$U(R) = -\,Gm\,\frac{1}{R}\int_0^a 4\pi r^2 \rho(r)\,\mathrm{d}r \tag{7.37}$$

となる。従って，球の中心から距離 r の点（球の外部）における万有引力のポテンシャル

$$U(r) \;=\; -\,G\,\frac{mM}{r}, \qquad M \;=\; 4\pi\int_0^a r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r \qquad (r \geq a) \tag{7.38}$$

が得られる。これは，原点にある質量 M の質点による万有引力のポテンシャルに等しい。この結果は，球状物体（密度が中心からの距離だけの関数であるとき）によるポテンシャル，従って，それから導かれる力

$$F = -\,G\,\frac{mM}{r^2} \tag{7.39}$$

は，球状物体の全質量が球の中心に集まったと考えて良いことを表している。M として地球の質量，$m = 1$ kg，R として地球の赤道半径 $R = 6378$ km を用いると，地球表面で質量 1 kg の物体にはたらく力の大きさは $F = 9.81$ N となる。

7.3.2　球状物体の内部のポテンシャル

球の内部のポテンシャルを求める際には，r についての 0 から a までの積分は，点 P の内側 $(0 \leq r < R)$ と外側 $(R \leq r \leq a)$ に分けられ

$$U(R) = -\,Gm\left[\frac{1}{R}\int_0^R 4\pi r^2\rho(r)\,\mathrm{d}r + \int_R^a 4\pi r\rho(r)\,\mathrm{d}r\right], \qquad (R < a) \tag{7.40}$$

と表される。右辺の第 1 項の積分は，半径 R の球の内部にある質量を与える。第 2 項の積分は，半径 R の球の外側にある質量に起因する部分である。密度分布 $\rho(r)$ の関数形が与えられないと積分は計算できない。

一様な球によるポテンシャル　特別な場合として，球の密度が一様であるときを考える。球の質量を M とすると，密度は $\rho(r) = \rho_0 = M/(4\pi a^3/3)$ である。従って，(7.40) の r についての積分を実行して一様な密度の球による万有引力のポテンシャルは，

$$U(R) = \begin{cases} -\,G\,\dfrac{mM}{R} & (R \geq a) \\[2ex] -\,G\,\dfrac{mM}{a}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{R^2}{a^2}\right) & (R < a) \end{cases} \tag{7.41}$$

となる。球の内部では（定数項を除いて）中心からの距離の 2 乗に比例し，外部では中心からの距離に反比例する。両者は球の表面で連続である（図 7.5）。なお，ポテンシャルには定数だけの不定性があるが，ここでは無限遠方でポテンシャルが 0 になるように定数を定めてある。

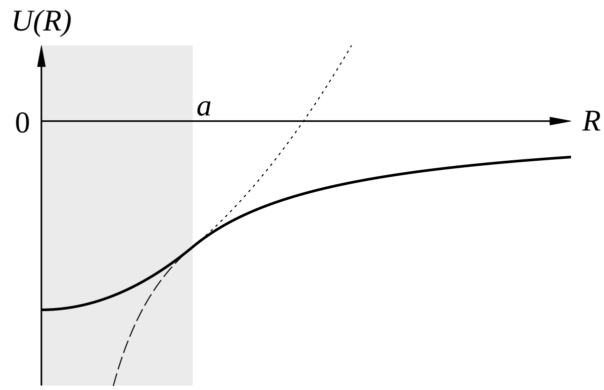

図 7.5: 密度が一様な球によるポテンシャル

7.3.3 球殻によるポテンシャル

内径が a で外径が b の球殻があり，その密度が球の中心からの距離だけの関数 $\rho(r)$ であるとき，球殻の内部のポテンシャルは (7.40) を利用して求められる。r についての積分は

$$U(R) = -\,Gm\int_a^b 4\pi r\,\rho(r)\,\mathrm{d}r \tag{7.42}$$

で与えられる。右辺の不定積分を

$$D(r) = \int 4\pi r\,\rho(r)\,\mathrm{d}r \tag{7.43}$$

とすると（D は質量を長さで割った次元を持つ），ポテンシャルは

$$U(R) = -\,Gm(D(b) - D(a)) \qquad (0 < R < a < b) \tag{7.44}$$

となる。すなわち，球殻の内部のポテンシャルは一定である。定数の微分は 0 であるから，球殻内部では，球殻による万有引力はどこでも 0 である（力がはたらかない）ことがわかる。これは，球殻の各部分による万有引力が，球殻の内部では完全に打ち消し合っているためである。

7.4 力学的エネルギーの保存

太陽から万有引力を受ける惑星などの運動を考える。万有引力は中心力であるから，太陽を原点とする極座標をとると，

$$h \;=\; r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{L}{m} \qquad \text{（面積速度一定）} \tag{7.45}$$

は保存し（L は角運動量の大きさ），これを用いて運動方程式の r 方向成分は

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{h^2}{r^3}\right) \;=\; m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{L^2}{mr^3} \;=\; -G\,\frac{mM}{r^2} \tag{7.46}$$

となる。エネルギー積分は (7.46) の両辺に $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ をかけ，時間 t について積分して求められる。左辺の第１項は，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 2\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \tag{7.47}$$

の関係を利用して書き直すことができる。また，左辺の第２項は

$$\int -\frac{L^2}{mr^3}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\,\frac{L^2}{m}\int \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r = \frac{L^2}{2mr^2} \tag{7.48}$$

となる。一方，右辺の積分

$$\int -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r \tag{7.49}$$

は万有引力のポテンシャル（負号をつけたもの）に他ならない。以上をまとめて，

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\,\frac{mM}{r} = E \tag{7.50}$$

となる。ここで，E は積分定数である。

(7.50) の左辺の第１項と第２項は，極座標で表した質量 m の物体の運動エネルギーであり，第３項は万有引力のポテンシャルである

$$K = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad\qquad U(r) = -\,G\,\frac{mM}{r} \tag{7.51}$$

(7.50) は

$$K + U = E \tag{7.52}$$

となり，万有引力に対するエネルギーの保存則を表している。ポテンシャルの基準点として無限遠方をとり，そこでのポテンシャルを $U(\infty) = 0$ とした。力学的エネルギーの保存を表す上の式は次のように書くこともできる。

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + W(r) = E \tag{7.53}$$

ここに，

$$W(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \,G\,\frac{mM}{r} \tag{7.54}$$

は有効ポテンシャルである。