

第 13 講 Maxwell の方程式と電磁波

前の講までに学んだ電場と磁場の法則を組み合わせると整理すると、電磁気学の基本的な4つの方程式、すなわち、Maxwell の方程式が得られる。ただし、その際、変位電流の概念を導入して Ampère の法則を一般化する。また、Maxwell の方程式から波動方程式が導かれ、その解として電磁波が存在する。

13.1 Maxwell の方程式

以上で、電磁気現象を理論的に説明する電磁場の基本方程式はでそろった。これらの4つの方程式を合わせて Maxwell の方程式と呼ぶ。

- E と D は電場と電束密度、 H と B は磁場と磁束密度を表す。真空中では、それらのあいだに簡単な関係が成り立つ (ϵ_0 と μ_0 は真空の誘電率と透磁率):

$$D = \epsilon_0 E \quad (13.1)$$

$$B = \mu_0 H. \quad (13.2)$$

(1) 電束密度 (電場) に関する Gauss の法則

閉曲面 S 全体にわたる電束密度 $D = \epsilon E$ の面積積分は閉曲面 S の内部にある電荷の総和に等しく、閉曲面 S の外部にある電荷は寄与しない:

$$\oint_S D \cdot dS = \int_V \rho(r) dr \quad (\text{積分形}) \quad (13.3)$$

$$\text{div } D = \rho \quad (\text{微分形}) \quad (13.4)$$

ρ は電荷密度で、右辺の体積積分は閉曲面 S によって囲まれる空間 V の全体積にわたって行う。

電場の源が電荷であり、また、電場が電荷から放射状であることを表し、Coulomb の法則が逆2乗則に従うことから導かれる。

(2) 拡張された Ampère の法則

閉曲線 C に沿った磁場 $H = B/\mu$ の線積分は、 C を縁とする曲面 S についての、電流密度の面積積分に等しい。ただし、電流には真の電流だけではなく、電束密度の時

間変化に伴う変位電流も含める。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{積分形}) \quad (13.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{微分形}) \quad (13.6)$$

電流，及び電場の変化が磁場を生むことを表す。電場の変化（変位電流）によっても磁場が発生することを Maxwell が付加えたので，Ampère-Maxwell の法則とも呼ばれる。

(3) 磁束密度に関する Gauss の法則

任意の閉曲面 S について，磁束密度 B の面積積分は 0 になる：

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{積分形}) \quad (13.7)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{微分形}) \quad (13.8)$$

磁場には源がないことを表す。電荷に相当する磁荷（単磁極，あるいはモノポール）というものではなく，（電流が無遠方まで分布していない限り）磁束線はループ状になって自ら閉じていることを示している。

(4) Faraday の法則

磁束密度 B が時間的に変化すると，その変化を妨げる向きにうず状の電場が生じる：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{積分形}) \quad (13.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{微分形}) \quad (13.10)$$

いわゆる，電磁誘導の法則である。

- (1) と (2) は，電荷（ ρ は電荷密度）や電流（ j は電流密度）といった物質の担う量と電磁場との関係を表す。
- (3) と (4) は電場と磁場の関係を表す。
- 物質中では，次の関係式が近似的に成り立つ：

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (13.11)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (13.12)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (13.13)$$

ε は物質の誘電率， μ は物質の透磁率， σ は物質の伝導率である。これらは，物質に固有の量であるが，定数であるとは限らない。

13.2 電磁波

Ampère の法則の拡張，すなわち，変位電流が磁場をつくることは理論的考察に基づいた仮定であり，実験で検証しなければならない。

Maxwell は，偏微分方程式を組み合わせると電場と磁場に関する波動方程式が導かれることを示した。波動方程式の解は電場と磁場の時間的な変動が伝播する波動である。すなわち，Maxwell の方程式は電磁波の存在を予言していた。真空中の電磁波の速度は，定数である真空の誘電率と透磁率によって決定される。この電磁波の理論的伝播速度が，実験的に得られていた光の速度（光速）と一致していたことから，光も電磁波の一種であると予言した。

Maxwell によって予言された電磁波の存在を実験的に検証したのは Hertz であり（1888 年），彼は放電によって電磁波を発生させ，離れた場所のコイルの両端を狭くしておくことと火花が発生して電磁波が伝わることを確認した。こうして，Maxwell の仮定は実験的に検証されたのである。

13.2.1 波動方程式

波動方程式の導出

電荷も電流もない真空の空間（ $\rho = 0, j = 0$ ）に，時間的に変化する電場 E と磁場 B が存在する場合を考える。このとき，Maxwell の方程式は次のようになる：

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (13.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (13.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (13.17)$$

ここで，簡単のため，電場と磁場は空間的には x だけの関数（ y と z には依存しない）であるとする。すなわち， $E(x, t), B(x, t)$ と表せるとする。このとき，(13.14) と (13.15) は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (13.18)$$

となり，(13.16) と (13.17) の 3 成分は，それぞれ，次のようになる。

$$0 = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (13.19)$$

$$0 = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (13.20)$$

まず，電場と磁場の x 成分は，(13.18)，及び，(13.19) と (13.20) の第 1 式から

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

である。すなわち, E_x と B_x は位置 x にも時間 t にも依存しない定数である。しかし, ここでは, 時間的に変化する電磁場を問題にするので,

$$E_x = B_x = 0 \quad (13.21)$$

とする。

y 成分と z 成分については, (13.19) の第 2 式と (13.20) 第 3 式を組み合わせると, B_y あるいは E_z を消去すると

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \quad (13.22)$$

が得られ, 同様に, (13.19) の第 3 式と (13.20) 第 2 式を組み合わせると, B_z あるいは E_y を消去すると

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \quad (13.23)$$

が得られる。4 つの偏微分方程式は同じ形をしており, 1 次元 (x 方向) の波動方程式である。

波動方程式の解

波動方程式の解, たとえば, E_z に関する波動方程式の解は

$$E_z(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (13.24)$$

の形で表せる。ここで, f と g は任意の関数であり, $f(x - vt)$ は x 軸の正の向きに速さ v で進む波動を表し, $g(x + vt)$ は x 軸の負の向きに速さ v で進む波動を表す。

(13.24) を (13.19) の第 2 式に代入する。このとき, $s = x - vt$, $s' = x + vt$ と置くと, E_z の x による微分は

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s'}$$

となるので, B_y の時間 t による微分は

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s'}$$

と書ける。つまり, B_y も $f(x - vt)$ と $g(x + vt)$ の線型結合で表される (a と b を定数として):

$$B_y = a f(x - vt) + b g(x + vt).$$

これを上の式に代入して

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = a \frac{\partial f}{\partial t} + b \frac{\partial g}{\partial t} = a \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + b \frac{\partial g}{\partial s'} \frac{\partial s'}{\partial t} = -av \frac{\partial f}{\partial s} + bv \frac{\partial g}{\partial s'}$$

となる。よって,

$$a = -\frac{1}{v}, \quad b = \frac{1}{v}$$

であり, B_y は

$$B_y = -\frac{1}{v} [f(x-vt) - g(x+vt)]$$

と表せることがわかる。つまり, E_z と B_y は

$$\begin{aligned} E_z &= f(x-vt) + g(x+vt) \\ B_y &= -\frac{1}{v} [f(x-vt) - g(x+vt)] \end{aligned} \quad (13.25)$$

と, 同じ関数 f と g で表され, 両者が互いに組み合せて, 離れることなく, 同じ速さ v をもつ波動となって x 軸にそって伝播する。これを電磁波 (electromagnetic wave) と呼ぶ。電磁波は, 振動する電場 (E_z) と磁場 (B_y) の方向が, いずれも波の進行方向 (x 軸方向) に垂直になっており, 横波である。進行方向に振動する縦波成分 (E_x, B_x) は存在しない。また, 電場の振動方向 (z 軸方向) と磁場の振動方向 (y 軸方向) は垂直である。さらに, x 軸の正の向きに進行する電磁波において, 電場が z 軸の正の向きであるとき ($E_z > 0$), 磁場は y 軸の負の向きである ($B_y < 0$)。すなわち, 電場, 磁場, 及び電磁波の進行方向は互いに直角で右手系をなしている。この性質は, ここで示した例に限らず, 一般的に電磁波に対して成り立つ特徴である。

例題 13.1 x 軸の正の向きに進行する電磁波の電場がある。電場は y 軸方向に振動していて, 正弦波

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

で表されるとする。

- (1) 電磁波の進む速さを波数 k と角振動数 ω で表せ。
- (2) 磁束密度を求めよ。

解 電場は次のベクトルで表される:

$$\mathbf{E} = (0, E_0 \sin(kx - \omega t), 0).$$

- (1) 波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

に代入すると,

$$\text{左辺} = -(-\omega)^2 E_0 \sin(kx - \omega t), \quad \text{右辺} = -c^2 k^2 E_0 \sin(kx - \omega t)$$

となるので, 電磁波の進む速さ c は

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \text{より} \quad c = \frac{\omega}{k}$$

と表せる。

- (2) 電磁波は横波であるので，進行方向である x 成分はもたない ($B_x = 0$)。また，電場と磁場は常に垂直であるので，磁場は z 成分だけである。そこで，

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

に電場 E_y の表式を代入すると，

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -k E_0 \cos(kx - \omega t)$$

となる。時間について積分して，

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t) = \frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

が得られる。ただし，積分定数を 0 とした。よって，磁場のベクトルは z 成分だけをもち，

$$\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$$

ここで，

$$H_z = H_0 \sin(kx - \omega t), \quad H_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0$$

である。電場と磁場の様子を 図 13.1 に示す。

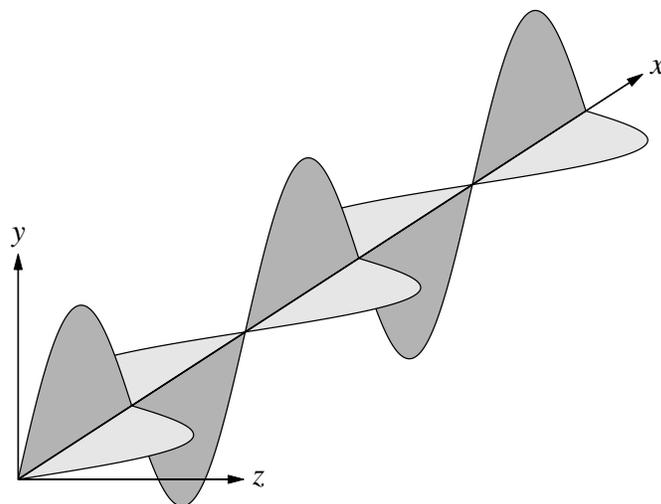


図 13.1: x 軸の正の向きに進行する電磁波の電場と磁場

例題 13.2 一般に，3次元の形で，電場 \mathbf{E} に対する波動方程式を導け。

解 Faraday の法則（微分形）の両辺の回転は

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{B})$$

となる。左辺は、ベクトル解析（及び、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ ）を用いて

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{grad} \rho - \nabla^2 \mathbf{E},$$

右辺は、

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

より、

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

となる。電荷と電流がない（ $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ）真空中では（ $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を用いて）波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}$$

が得られる。

13.2.2 光の電磁波説

電磁波の伝播する速さ

(13.24) を波動方程式に代入すると、 x による2階微分と t による2階微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right), \quad \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)$$

より、波動が進む速さは

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

である。

光の電磁波説

真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 の値

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad [\text{C} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}]$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad [\text{N} \cdot \text{A}^{-2}]$$

を代入すると、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

となり、真空中の電磁波（波動方程式の解）が伝播する速さが光速に一致することがわかる。このことと、電磁波が横波であることから、Maxwell は電磁波と光は同じものであると考え、光の電磁波説を主張した。

電磁波の存在は Hertz によって実証されたが、電磁波の理論的伝播速度が大きな問題になった。一つの問題は、Newton 力学における速度の和則に反することである。たとえば、空気中を伝播する音波は、空気を媒質として圧力が伝わる波動であり、媒質である空気が移動していると音の伝播速度も変化する。さらに、電磁波の媒質は何なのかという問題である。そのために電磁波の伝播媒質としてエーテルが想定され、エーテルの存在を検証しようとする実験 (Michelson-Morley の実験) が行われた (1887 年)。彼らは地球の自転する速度を利用して、地球の進行方向に伝播する光の速度と、その直角方向に伝播する光の速度を比較して、光の速度に差が無い事を確認した。すなわち、電磁波の媒体として想定されたエーテルは存在せず、Maxwell の理論が予言するように光速は一定であることが確認された。このようにして、Einstein の相対性理論の誕生 (1905 年) へと進展していく。Maxwell の電磁場の理論は、Newton 力学ではなく、Einstein の相対性理論と整合した理論である。

電磁波の振動数 (波長) は広い範囲に及んでいる。電磁波は振動数に応じて異なる名前で呼ばれることが多い。

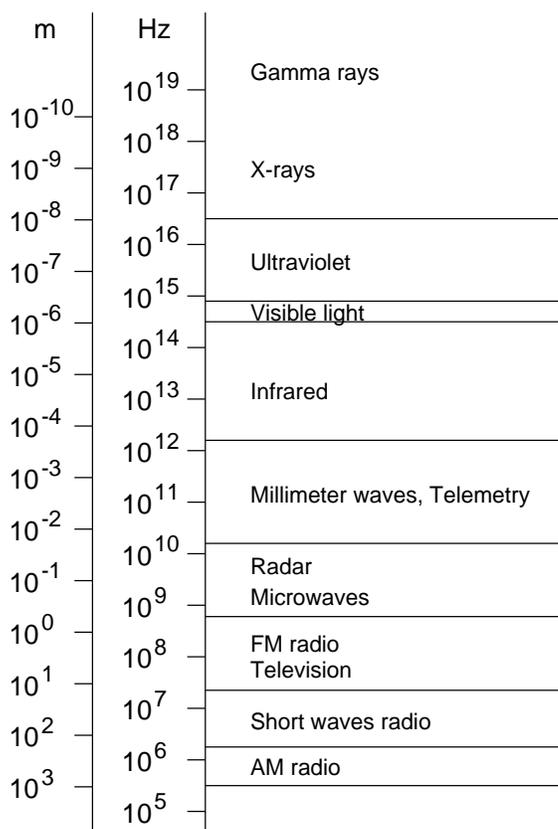


図 13.2: 電磁波

13.2.3 ポインティングベクトル

次の式で定義されるベクトル S をポインティングベクトル (poynting vector) といい、電磁波のエネルギーの流れの密度を表す：

$$S = E \times H \quad (13.26)$$

ポインティングベクトルは、電場 E と磁場 H のベクトル積で定義され、電場にも磁場にも垂直なベクトルである。

例題 13.1 を例にとる。 x 軸の正の向きに進行する正弦波で、電場が y 軸方向に振動するとき、

$$E = (0, E_y, 0), \quad E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad (13.27)$$

磁場は z 軸方向に振動する：

$$H = (0, 0, H_z), \quad H_z = H_0 \sin(kx - \omega t). \quad (13.28)$$

ここに、

$$H_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \quad (13.29)$$

である。ポインティングベクトルは両者のベクトル積で定義され、

$$S = E \times H = (S_x, 0, 0)$$

と、 x 成分だけをもち、 x 成分は次の式で表される：

$$S_x = E_0 H_0 \sin^2(kx - \omega t).$$

ここで、電磁波が運ぶエネルギー密度の、波長あたりの平均を考える。波長は、ある時刻に、波動の位相が 2π だけ異なる 2 点の距離である。たとえば、時刻 $t = 0$ において、 $x = 0$ と $x = 2\pi/k$ は位相が 2π だけ異なる。すなわち、波長 λ は次の式で与えられる：

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

上で求めたポインティングベクトル (x 成分) を、時刻 $t = 0$ において、 x について 0 から λ まで積分し、 λ で割ると平均のエネルギー密度 \bar{S}_x が求められる。積分を実行して

$$\bar{S}_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda S_x(x, t=0) dx = \frac{1}{2} E_0 H_0 \quad (13.30)$$

が得られる。この値は、時刻に依らない。また、ある点 x において、1 周期について時間平均をとった場合も同じ値になる。

ところで，電磁波の電場のエネルギーと磁場のエネルギーの 1 周期にわたる時間平均は，(13.28) 及び (13.27) から，(13.30) と同様に計算して

$$\overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2, \quad \overline{\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2} = \frac{1}{4}\mu_0 H_0^2$$

である。ここで，(13.29) を用いると両者は等しいことがわかる。従って，(13.30) の右辺は

$$\frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

より

$$\bar{S}_x = c \left(\overline{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2} + \overline{\frac{1}{2}\mu_0 H_z^2} \right)$$

と書ける。すなわち，この電磁波によって，電磁場のエネルギーが x 軸の正の向きに光速で運ばれていること，また，それがポインティングベクトルで表されることがわかる。

13.2.4 偏光

x 軸の正の向きに方向に進行する電磁波の場合， $E_x = B_x = 0$ であり，電場や磁場が振動する方向，すなわち， E_0 と B_0 は x 軸に垂直であり，波動方程式の導出からも明らかのように，互いに直交している。しかし， E_0 の方向は波動方程式からは決まらない。ここでは，前の例より一般的に，

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_{0y} \sin(kx - \omega t + \theta_y) \\ E_z(x, t) &= E_{0z} \sin(kx - \omega t + \theta_z) \end{aligned}$$

で表される正弦波を考える。

直線偏光： $\theta_y = \theta_z$ の場合
 $\theta_y = \theta$ と表すと，上の式は

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t + \theta), \quad \mathbf{E}_0 = (0, E_{0y}, E_{0z})$$

と書ける。この波は座標 x と時間 t に依存して振動するが， \mathbf{E}_0 は定ベクトルであるから，常に同じ方向に振動している。このような正弦波を直線偏光という。ベクトル \mathbf{E}_0 によって定まる面を電場の振動面，それに垂直な B_0 によって定まる面を磁場の振動面という。

円偏光

$E_{0y} = E_{0z} = E_0$ で $\theta_z = \theta_y + \pi/2$ の場合： $\theta_y = \theta + \pi/2$ と表すと，電場は

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) = E_0 \cos(\omega t - kx - \theta) \\ E_z(x, t) &= -E_0 \sin(kx - \omega t + \theta) = E_0 \sin(\omega t - kx - \theta) \end{aligned}$$

と書ける。 $x = \text{一定}$ の点，たとえば， $kx + \theta = 0$ を満たす点 $x_0 = -\theta/k$ でみると，電場の時間的变化は

$$E_y(x_0, t) = E_0 \cos \omega t, \quad E_z(x_0, t) = E_0 \sin \omega t$$

と表される。すなわち，正弦波の進行方向からみて，時間の経過とともに電場の振動面は左回り（反時計回り）に一定の角速度 ω で回転する。このような正弦波を 左回りの円偏光，または，左旋光 という。

$\theta_z = \theta_y - \pi/2$ の場合： $\theta_y = \theta + \pi/2$ と表すと，電場は

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \theta) = E_0 \cos(\omega t - kx - \theta)$$

$$E_z(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \theta) = -E_0 \sin(\omega t - kx - \theta)$$

と書ける。 $x = \text{一定}$ の点，たとえば， $kx + \theta = 0$ を満たす点 $x_0 = -\theta/k$ でみると，電場の時間的变化は

$$E_y(x_0, t) = E_0 \cos \omega t, \quad E_z(x_0, t) = -E_0 \sin \omega t$$

と表される。正弦波の進行方向からみて，電場の振動面は右回り（時計回り）に回転し，右回りの円偏光，または，右旋光 という。

直線偏光と円偏光

直線偏光は，振幅が等しい左回りの円偏光と右回りの円偏光の和として表すことができる。従って，振幅が等しい左回りの円偏光と右回りの円偏光を加えて直線偏光をつくることができる。

楕円偏光

E_{y0} と E_{z0} が異なる一般的な場合， (E_y, E_z) で表される点は楕円上を運動する。このような場合を楕円偏光と呼ぶ。振動面の回転する向きに応じて，それぞれ，左回りの楕円偏光，右回りの楕円偏光という。また，直線偏光と円偏光は楕円偏光の特殊な場合である。

13.3 電磁波の放射

電磁波は電荷も電流もない真空中で存在できるが、真空中では電磁波は発生しない。電磁波は電荷や電流分布があって、そこから放射される。しかし、電荷密度や電流密度は Maxwell 方程式において非同次項として現れ、非同次項を含む偏微分方程式を解くには数学的な準備が必要である。ここでは、簡単なモデルを用いて説明するにとどめる。

電気双極子放射

単振動する電気双極子は簡単なモデルを考える。 z 軸上の $(0, 0, L/2)$ に q の電荷、 $(0, 0, -L/2)$ に $-q$ の電荷があり、2つの電荷は導線で結ばれている。電荷の大きさと導線の太さは無視できるとする。導線を通る電流を I とする（正の向きに流れる場合に $I > 0$ と向きを定める）と

$$\frac{dq}{dt} = I$$

の関係が成り立つ。いま、電流は一定の角振動数 ω で振動しているとする：

$$I(t) = I_0 \cos \omega t.$$

このとき、 z 軸方向の単位ベクトルを \mathbf{k} と表すと、電流密度は

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) = I(t) \delta(x') \delta(y') \mathbf{k}$$

とデルタ関数を用いて表せる。従って、この電流によるベクトルポテンシャルは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(t - |\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|/c)}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|} dz'$$

となる。ここに、 $\mathbf{r}' = z'\mathbf{k}$ をあることに注意して、 x' と y' についての積分を実行した。

この積分を一般の r に対して求めるのは容易ではない。電磁波を観測する点までの距離 $r = |\mathbf{r}|$ が2つの電荷の間の距離 L に比べて十分大きいとすると、

$$|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}| = \sqrt{r^2 - 2rz' \cos \theta + z'^2} \approx r - z' \cos \theta$$

と近似できる。ここに、 θ は r と z 軸の正の向きとの成す角である。また、分子にある電流 I の変数は

$$t - \frac{|\mathbf{r} - z'\mathbf{k}|}{c} \approx t - \frac{r - z' \cos \theta}{c}$$

と近似できる。さらに、電流 I の周期 $T = 2\pi/\omega$ に比べて $|z' \cos \theta|/c$ が十分小さいならば、すなわち、

$$\frac{|z' \cos \theta|}{c} < \frac{L}{c} \ll T$$

が成り立つならば、分子にある電流 I の変数を $t - r/c$ と近似できる。上の条件は、放射される電磁波の波長を λ として

$$L \ll \lambda \tag{13.31}$$

と書き換えることができる。この条件が満たされるとき，遠方におけるベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{I(t-r/c)}{r} dz' = \mathbf{k} \frac{\mu_0 L}{4\pi r} I(t-r/c) \quad (13.32)$$

となる。

スカラーポテンシャル ϕ は

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(Lorentz 条件) から求めることができる。ベクトルポテンシャル (13.32) を代入して

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx c^2 \frac{\mu_0 L}{4\pi} \left[\frac{z}{r^3} I(t-r/c) + \frac{z}{r^2 c} \frac{\partial}{\partial t} I(t-r/c) \right]$$

となるが，時間についての積分は容易にできて

$$\phi(\mathbf{r}, t) \approx c^2 \frac{\mu_0 L}{4\pi} \left[\frac{z}{r^3} q(t-r/c) + \frac{z}{r^2 c} I(t-r/c) \right]$$

が得られる (時間に依存しない定数項は無視した)。ところで， $q\omega \approx I$ 程度であるから，右辺の第1項は第2項に比べて λ/r 程度小さいので，遠方では無視できる。よって，スカラーポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{czL}{r^2} \cos \omega(t-r/c) \quad (13.33)$$

が得られる。スカラーポテンシャル (13.33) とベクトルポテンシャル (13.32) から電場と磁場が求められ，遠方では球面波で近似される。

例題 13.3 図 13.3 に示す LC 直列回路のコンデンサの2つの極板に，それぞれ， $+Q_0$ と $-Q_0$ の電荷を与え，時刻 $t=0$ にスイッチを入れてコンデンサを放電する。このとき，コンデンサから空間に放射される電磁波の波長を求めよ。ただし，コイルの自己インダクタンスを $L = 20 \mu\text{H}$ ，コンデンサの電気容量を $C = 0.0020 \mu\text{F}$ とする。

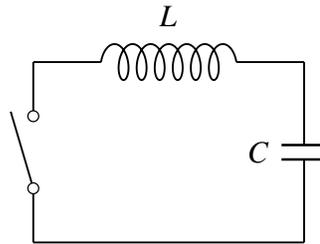


図 13.3: LC 直列回路からの電磁波の放射

解 回路を流れる電流を $I(t)$ とすると，Kirchhoff の法則より，

$$-L \frac{dI}{dt} - V_C = 0$$

が成り立つ。ここで、コンデンサの両極板にある電荷を $\pm Q(t)$ とすると、

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

と書ける。これらを上の方程式に代入して、電荷 Q についての次の微分方程式が得られる：

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\frac{Q(t)}{LC}.$$

これは単振動の方程式であるので、一般解は、2つの定数 a と b を用いて

$$Q(t) = a \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + b \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

と書ける。これらの定数は、初期条件

$$Q(t=0) = Q_0, \quad I(t=0) = \left. \frac{dQ(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

より定まり ($a = Q_0, b = 0$)、解は

$$Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

となる。

コンデンサの両極板にある電荷が、上の式の $Q(t)$ に従って時間的に振動するのに伴い、極板間の電位差 $V_C(t)$ 、電場 $E(t)$ 、電束密度 $D(t)$ も同様に振動する：

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \quad E(t) = \frac{V_C(t)}{d}, \quad D(t) = \varepsilon_0 E(t)$$

(極板の間隔を d とした)。電束密度の振動(時間的変化)は変位電流を生じ、変位電流によって磁場が発生する。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

電場と磁場は互いに伴いあって、電磁波となって放射される。

これらは、いずれも角振動数

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

で振動する。電磁波が伝播する速さは光速 c であり、電磁波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{c}{\omega/(2\pi)}$$

で与えられる。数値を代入して、

$$\sqrt{LC} = \sqrt{(20 \times 10^{-6}) \cdot (0.0020 \times 10^{-6})} = 2.0 \times 10^{-7} \text{ [s]}$$

より、

$$\lambda = (3.0 \times 10^8) \cdot 2\pi \cdot (2.0 \times 10^{-7}) = 3.8 \times 10^2 \text{ [m]}$$

が得られる。