

第 12 講 変動する電場による磁場

Faraday は磁場が時間的に変化すると電場が生じることを発見したが、Maxwell は理論的考察から、電場が時間的に変化するとき、ある種の電流が生じることを見出した。この拡張された意味での電流が変位電流である。Maxwell は変位電流も、通常の真の電流と同様に磁場をつくると考えて、Ampère の法則を拡張した。

12.1 拡張された Ampère の法則

12.1.1 Ampère の法則の矛盾

図 12.1 の左図に示すように、充電されたコンデンサが放電する場合を考える。放電によって、導線には時間的に変化する電流 $I(t)$ が流れる。このとき、導線を取り囲む1つの閉曲線 C について Ampère の法則を適用すると

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

が得られる。ここで I は、閉曲線 C を縁とする曲面 S を（右ねじの向きに）貫く電流である。ところで、曲面 S は閉曲線 C を縁とする曲面であれば任意である。たとえば、図 12.1 の右図

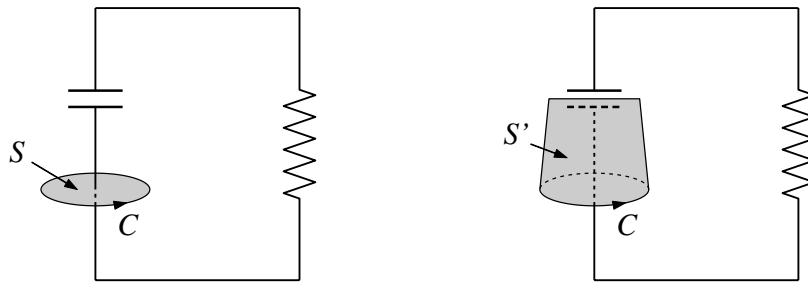


図 12.1: Ampère の法則の矛盾

に示すように、コンデンサの極板のあいだを通る曲面 S' でもよいはずである。ところが、この曲面 S' を貫く電流はない：

$$\int_{S'} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

つまり、閉曲線 C は同じであっても、 C を縁とする曲面の取り方によって、電流が存在する場合もあるし、存在しない場合もある。言い換えれば、Ampère の法則は、どのような場合に

も成り立つ一般則ではない。

実際，Ampère の法則の微分形 $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ の両辺の発散を計算すると

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = \mu_0 \text{div } \mathbf{j}$$

となる。しかし，左辺はベクトル \mathbf{B} の回転の発散であり，これは恒等的に 0 になる。すなわち，Ampère の法則（微分形）の発散は

$$\text{div } \mathbf{j} = 0$$

となる。一方，電荷の保存を表す連続の方程式

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

は一般的に成り立つ関係式である。つまり，電荷分布 ρ が時間的に変化する場合には，Ampère の法則が成り立たないことを意味している。

12.1.2 Ampère の法則の矛盾を救うには

図 12.1 において， S と S' とでつくられる閉曲面に，電束密度に関する Gauss の法則を適用する：

$$\oint_{S+S'} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -Q.$$

ここでは，Gauss の法則の約束に従って，閉曲面の法線は外向きにとる。また， $-Q$ は下の極板にある電荷である。この式を時間 t で微分して

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

が得られ，右辺にある電荷の時間微分が電流 I を表す：

$$\frac{dQ}{dt} = -I.$$

ここで，改めて，曲面 S と S' に対する法線の向きを，閉曲線 C の回転方向に対して電流と同じ向きにとり直す。つまり， S の法線は閉曲面 $S + S'$ の内向きに， S' の法線は閉曲面 $S + S'$ の外向きにとる。その結果，曲面 S についての積分の符号を変えて，

$$-\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = I$$

より，

$$\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

が得られる。コンデンサが放電するこの系で，電束密度が存在するの ($\mathbf{D} = 0$ でない) は，コンデンサの両極板のあいだである。つまり，上の等式で，曲面 S では $\mathbf{D} = 0$ であるから，右辺 $= I$ である。よって，上の等式は

$$\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = I$$

が成り立つことを意味する。つまり，

電束密度が時間的に変化するとき， D の向きに $|\partial D/\partial t|$ の大きさの電流密度をもつ変位電流が流れると考えれば，真の電流と変位電流の和は曲面によらない。

このように，電束密度の時間変化をある種の電流（変位電流）とみなすと，コンデンサの両極板のあいだを電流（変位電流） I が流れており，図 12.1 の右図の曲面 S' に対して Ampère の法則を適用した場合も

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

が得られる。

拡張された Ampère の法則

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{積分形}) \quad (12.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (\text{微分形}) \quad (12.2)$$

拡張された Ampère の法則から電荷の保存則を導くことができる。(12.2) の両辺の発散は

$$\frac{1}{\mu_0} \text{div}(\text{rot } \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{j} + \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

と書ける。ここで，左辺は恒等的に 0 になる（回転の発散は常に 0）。右辺の第 2 項は，電束密度に関する Gauss の法則を用いて，

$$\text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となる。よって，電荷の保存則が得られる：

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

これは，電磁場の基本方程式 (12.2) の中に電荷の保存則が含まれていることを示している。

12.2 変位電流

電磁気現象に関する多くの法則；Gauss の法則，Ampère の法則，Faraday の電磁誘導の法則は実験事実に基づいて，それを電磁場が満たすべき方程式として定式化されたものである。それに対して，変位電流の考え方は，電磁気の理論を構築する上で，理論に矛盾が生じないように Maxwell が理論的考察によって導入したものである。変位電流が実験的に検証されたのは，変位電流を含む Maxwell の方程式から電磁波の存在が予言され，電磁波が Hertz によって確認されて始めてなされた。なお，変位電流（displacement current）という名称は，物質中における電磁場の定式化から命名された。

図 12.2 に示すように，正負等量の電荷が与えられた円形の極板からなる平行板コンデンサがある。極板を導線でつないだときに生じる磁束密度を求める。ただし，極板の半径を a ，間隔を d とする。

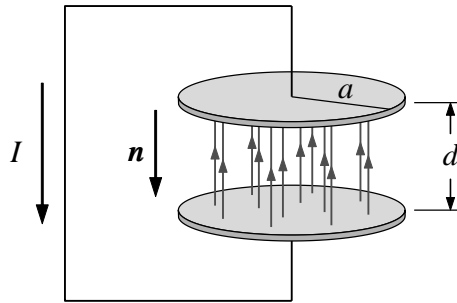


図 12.2: 平行板コンデンサが放電するときの変位電流

上の極板に $+Q(t)$ ，下の極板に $-Q(t)$ の電荷があるとき，極板の表面の電荷密度（面密度）は一樣でその大きさは $\pm\sigma(t) = \pm Q(t)/(\pi a^2)$ である。よって，電場は（端の効果を除いて）極板の間だけにあり，上の極板から下の極板への向きで，大きさは $E(t) = \sigma(t)/\epsilon_0$ である。電束密度も同様である

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) = \sigma(t) \mathbf{n} = \frac{Q(t)}{\pi a^2} \mathbf{n}.$$

ここに， \mathbf{n} は上の極板から下の極板へ向いた単位ベクトルである。このとき，極板の間を流れる変位電流の密度は

$$\mathbf{j}_d(t) = \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} = -\frac{1}{\pi a^2} \frac{dQ(t)}{dt} \mathbf{n}$$

である。電束密度は下向きであるが，電荷が導線を流れるとともに電束密度の大きさは小さくなるので，電束密度の時間変化率は上向きである。変位電流は極板間の空間だけにあり，極板に垂直に上向きに一樣に流れる。すなわち，極板間を流れる変位電流は

$$\pi a^2 \mathbf{j}_d(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \mathbf{n}$$

で与えられる。ところで，極板をつなぐ導線を通る電流を $I(t)$ とすると

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$$

であるから，

$$\pi a^2 j_d(t) = I(t)$$

が成り立つ。つまり，導線を通る電流と極板間を通る変位電流の大きさは等しい。

次に，前講（例題 11.7）で扱った，図 12.3 に示す LCR 回路における変位電流を考えてみる。

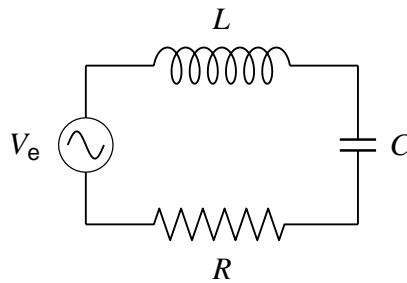


図 12.3: LCR 直列回路

交流電源が角振動数 ω で振動するとき

$$V_e(t) = V_0 \sin \omega t$$

回路を通る電流は

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \delta), \quad I_0 = \frac{V_0 R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

で与えられる。回路を構成する導線の断面積を S とすると，電流密度 $j(t)$ の大きさは $j(t) = I(t)/S$ である。このとき，電流密度 $j(t)$ は回路内の電場を $E(t)$ ，導線の電気伝導度を σ として次のように表せる

$$j(t) = \sigma E(t) = \sigma E_0 \sin(\omega t + \delta), \quad E_0 = \frac{V_0 R}{\sigma S} \frac{1}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

ところで，変位電流の密度は電束密度の時間微分であるから，

$$j_d(t) = \frac{dD}{dt} = \varepsilon_0 \omega E_0 \sin(\omega t + \delta)$$

である。すなわち，両者の大きさの比は $\sigma : \varepsilon_0 \omega$ である。金属の電気伝導度は

$$\sigma \sim 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

程度であるので、真空の誘電率の値を代入すると

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim 10^{18} \text{ s}^{-1}$$

となる。つまり、通常用いられる交流の角振動数 $\omega \sim 10^2 \text{ s}^{-1}$ のとき、

$$\sigma \gg \varepsilon_0 \omega$$

が成り立つ。変位電流は極めて小さく完全に無視できる。よって、通常の交流回路等を扱う場合は変位電流を考えなくてもよい。

例題 12.1 図 12.4 に示すように、2枚の導体円板からなる平行板コンデンサに交流電源 V_e をつなぐ。導体円板の半径を a 、間隔を d 、交流電源を $V_e(t) = V_0 \sin \omega t$ とする。また、端の効果は無視してよいとする。

- (1) 平行板コンデンサの極板間に生じる変位電流を求めよ。
- (2) 極板間における、変位電流による磁場の磁束密度を求めよ。

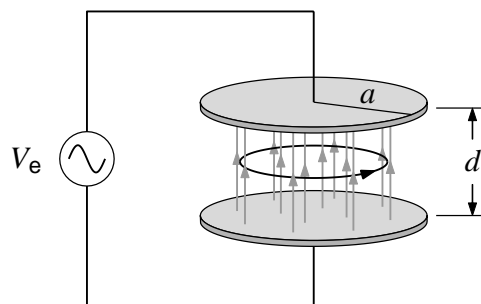


図 12.4: 平行板コンデンサに交流電源をつないだときの変位電流

解 コンデンサの両極板にかかる電圧（電位差）は $V_e(t)$ で、極板間の電場は極板に垂直で空間的に一様である。

- (1) 極板間の電場 E 、及び、電束密度 D は、空間的に一様であるが、交流電源に応じて時間的に変化する。磁束密度の時間的変化は

$$E(t) = \frac{V_e(t)}{d} = \frac{V_0 \sin \omega t}{d}$$

より

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0 \sin \omega t}{d}$$

である。変位電流の密度は、電束密度を時間で微分して

$$j_d(t) = \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \omega V_0 \cos \omega t}{d}$$

となる。すなわち、極板間には、一様な密度 $\partial D(t)/\partial t$ （時間的には変化する）で、変位電流が流れる。

回路に流れる電流 I は、電流密度に極板の面積をかけて

$$I(t) = \pi a^2 j_d(t) = \frac{\varepsilon_0 \omega \pi a^2 V_0 \cos \omega t}{d}$$

と得られる。

- (2) 端の効果は無視して、電束密度はコンデンサの極板のあいだだけにあるとする。図 12.4 に灰色の矢印で示すように、電束密度の時間変化率 ($\partial D/\partial t$) が上向きであるとき、磁束密度 B は、図中の黒い矢印で示すように、コンデンサの極板に平行で、極板の中心軸に関して回転対称である。従って、変位電流による磁場の磁束密度は、Ampère の法則を用いて求められる。中心軸上の点を中心として、極板に平行な平面上に半径 r の円を考えて Ampère の法則を適用すると

$$B(r, t) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(t) \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

より、磁束密度の大きさは

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 I(t) r}{2\pi a^2} = \frac{\mu_0 r}{2} \frac{\partial D(t)}{\partial t}$$

となる。

例題 12.2 x 軸上を一定の速度 v で運動する点電荷 q がある。この点電荷がまわりの空間に生じる変位電流の密度 $j_d(t)$ を求めよ。

解 点電荷は時刻 $t = 0$ に座標原点を通るとする。時刻 t に点 $P(x, y, z)$ における電位は

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

で与えられ、ここで、 r は時刻 t における点電荷と点 P の距離である：

$$r = \sqrt{(x - vt)^2 + y^2 + z^2}.$$

電場は $E = -\text{grad } \phi$ によって、さらに、電束密度は $D = \varepsilon_0 E$ によって求められる：

$$\begin{aligned} D_x &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi} \frac{x - vt}{r^3} \\ D_y &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi} \frac{y}{r^3} \\ D_z &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi} \frac{z}{r^3}. \end{aligned}$$

よって、変位電流密度は

$$\begin{aligned}(j_d)_x &= \frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \frac{2(x-vt)^2 - y^2 - z^2}{r^5} \\(j_d)_y &= \frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \frac{3y(x-vt)}{r^5} \\(j_d)_z &= \frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{q}{4\pi} \frac{3z(x-vt)}{r^5}\end{aligned}$$

となる。
