

第 10 講 電磁誘導

前の講までは，時間的な変動のない静電場と静磁場を論じてきた。時間的に変化する磁場は電場を生じ，時間的に変化する電場は磁場を生じる。この講では，時間とともに変化する電場と磁場の現象と，電気と磁気の相互作用について述べる。

10.1 電磁誘導

10.1.1 Faraday による電磁誘導の発見

電荷がつくる電場によって導体表面に電荷を誘起する（静電誘導）ことから，Faraday は回路を流れる電流が，近くに置かれた別の回路に電流を誘起するのではないかと類推した。しかし，図 10.1 に示すように，一方の回路に定常電流を流しても，近くに置かれた回路に電流は誘起されなかった。Faraday はスイッチを入れたり切ったりするときだけ，他方の回路に電流が流れることを発見した。この発見は，右側の回路に流れる電流が時間的に変化するとき，す

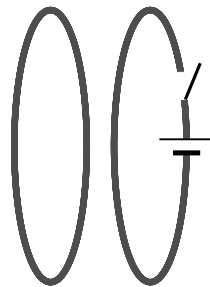


図 10.1: Faraday による電磁誘導の発見

なわち，左側の回路の付近につくられる磁場が時間的に変動するときだけに，左側の回路に電流を流す力が生じることを示している。この現象を 電磁誘導 (electromagnetic induction) という。「左側の回路に電流を流す力」は回路内にある荷電粒子（電子）を動かす力である。静止している荷電粒子を動かすのは電場であるので，時間的に変動する磁場によって回路内に起電力が生じていることになる。

磁束の変化による起電力

電磁誘導は，図 10.2 に示すように，棒磁石を円環状の導体（ループ）に近づけたり遠ざけたりするときにも生じる。棒磁石を左右に運動させると，運動によってループ近くの磁場が時間

的に変化し、棒磁石が運動しているあいだけループに電流が流れる。図 10.1 の場合と合わせて考えると、ループ（回路）近くの磁場が時間的に変化することが電流の流れる原因であり、その磁場が何によってつくられているかは問題ではないことがわかる。

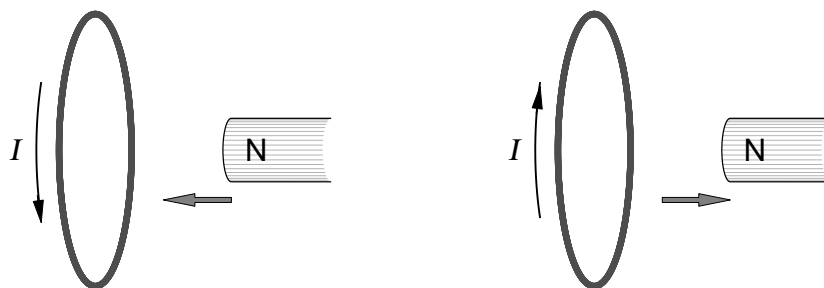


図 10.2: 磁束の変化による起電力．左：棒磁石が左に動く場合，右：棒磁石が右に動く場合

一様な磁場の中に平面状の回路が垂直に置かれているとき、磁束密度を B 、回路の面積を S とすると、回路を貫く磁束は

$$\Phi = BS$$

である。磁束密度が時間的に変化するとき、回路に生じる起電力 V_I は回路を貫く磁束の時間変化 $d\Phi/dt$ に比例する。ところで、図 10.2 において、棒磁石が右へ運動するときと左へ運動するときでは、ループに流れる電流の向きが逆になる。その向きは、起電力によって回路に流れる電流がつくる磁場が、磁束の時間変化を打ち消す向きである。この実験事実より、起電力は正定数 k を用いて

$$V_I = -k \frac{d\Phi}{dt} \quad (10.1)$$

と表すことができる。ただし、磁束の符号を、回路に向きを決めておいて、その向きに回転する右ねじが進む向きを正と約束する。図 10.2 の場合、棒磁石から見て時計回りを回路の正の向きと決めておくと、左図のように棒磁石を近づけると磁束が増加し、その結果、(10.1) より、電流は負の向きに流れることになる（電流が流れる向きは実験から決まっています、それを正しく表現するように (10.1) の右辺に負号がつけてある）。比例定数 k は磁束の定義に係わる定数であり、これについては次節で述べる。

回路が平面状でない場合、また、磁束密度が一様でない場合、回路を貫く磁束は

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (10.2)$$

で表される。ここに、右辺は回路を縁とする曲面にわたる磁束密度の面積積分である。ただし、回路に向きを決めておいて、その向きに回転する右ねじが進む向きを曲面の裏から表の向きと定める。最右辺の \mathbf{n} は曲面の裏から表を向いた単位法線ベクトルである。磁束密度に関する Gauss の法則より、(10.2) の右辺の面積積分の値は（回路を縁とする限り）曲面 S の取り方によらない。

10.1.2 運動の相対性

図 10.3 に示すように、棒磁石を固定してループを右側へ動かす場合と、ループを固定して棒磁石を左へ動かす場合を考える。どちらの場合もループに電流が流れる。前者の場合、観測者は棒磁石が静止している座標系から見ているのに対して、後者の場合は棒磁石とともに運動する観測者から見ているのである。しかし、ループに電流が流れる現象は、観測者が静止しているか運動しているかによって異なることはない。

電磁誘導はループの中にある電荷にはたらく Lorentz 力

$$F = q(E + v \times B) \quad (10.3)$$

による現象であると理解できる。ループが動く場合（左図）、棒磁石がつくる磁場の中をループ内の荷電粒子が運動するので、(10.3) の第 2 項の $qv \times B$ によって力を受けると理解できる。一方、棒磁石が動く場合（右図）は、ループ付近の磁場が時間的に変化するためにループ内に起電力が生じ、(10.3) の第 1 項の qE によってループ内の荷電粒子が力を受けると理解できる。しかし、運動は相対的である。互いに等速度運動している座標系は同等であり、どちら

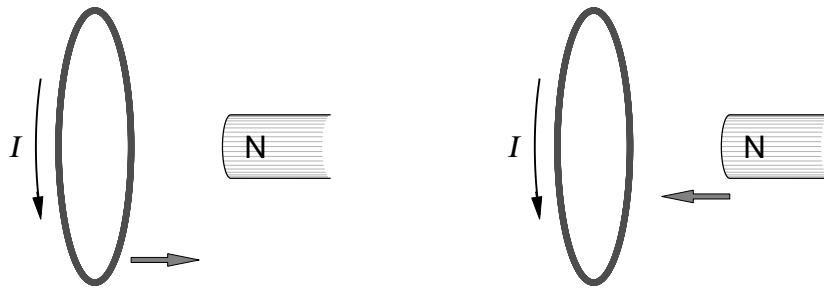


図 10.3: 運動の相対性．左：ループが動く場合，右：棒磁石が動く場合

の観測者に対しても自然法則は同じ形に表されなければならない。棒磁石が運動しているのか、あるいは、ループが運動しているのかは観測者（座標系）の立場によって異なるものであって本質的ではない。

Lorentz 力 (10.3) には電荷の速度 v が入っているので、電磁誘導を正しく理解するには、この現象を見る観測者（座標系）を明確にしなければならない。以下では、磁石に固定された座標系と、ループに固定された座標系のそれぞれから、この電磁誘導を考察する。そこから、Faraday の法則が導かれる。

10.2 運動するループに生じる誘導起電力

誘導起電力 (Faraday の法則の一つの表現)

一様でない磁場の中をループが運動するとき, ループには起電力が生じる。これを 誘導起電力 (induced electromotive force) という。誘導起電力 V_I はループを貫く磁束 Φ の減少する速さに等しい:

$$V_I = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (10.4)$$

この式は, ループの形が時間的に変化することによってループを貫く磁束が変化する場合にも, また, 磁束密度 B が時間的に変化することによって磁束が場合にも成り立つ。磁束の単位は Wb (ウェーバー) である:

$$\text{磁束の単位: } \text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s}. \quad (10.5)$$

磁束の単位の定義 Wb は (10.4) によって定義される。ループ (1 巻きのコイル) に 1 V の起電力が生じるとき, 磁束の 1 秒あたりの変化量を 1 Wb とする。

磁石に固定した座標系で, 運動するループの中の電荷にはたらく力を考察する。図 10.4 に示すように, 棒磁石がつくる静磁場 (磁束密度 $B(\mathbf{r})$ は時間的に変化しない) の中を, 中心軸が棒磁石の軸と一致するループが速度 v で右向きに運動している場合を考える。このとき, ループ内にある自由電子は, ループの運動に応じて平均移動速度 v で運動するので, 磁場から Lorentz 力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

を受ける。ループ上の各点 r で, 磁束密度 $B(\mathbf{r})$ の大きさは等しく, 向き (磁束線の向き) はループ (円) に垂直でループの速度 v と一定の角度 θ をなす。従って, Lorentz 力の大きさ

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = evB \sin \theta$$

は一定で, ループに沿った向きをもつ。その結果, ループには Lorentz 力 \mathbf{F} と逆向きに起電

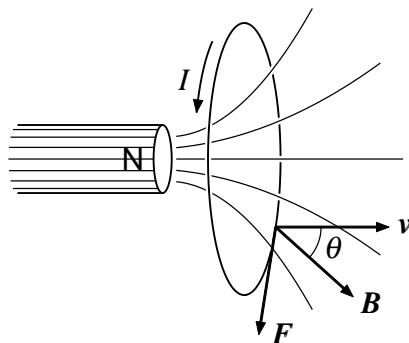


図 10.4: 磁場の中を運動するループ

力が生じる（電子の電荷が負であるので Lorentz 力と起電力の向きが逆になる）。電子が電場から力を受けたとみなせば $F = -eE$ と書くことができ、起電力の大きさは、この電場 E をループに沿って一周する積分で与えられる：

$$V_I = \frac{1}{-e} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = vB \sin \theta \oint ds = vBL \sin \theta.$$

ここに、ループの円周の長さを L とした。

一般に、一様でない磁場（磁束密度 $B(r)$ ）の中をループが一定の速度 v で運動するとき、ループ内の電子が磁場から受ける Lorentz 力によって起電力

$$V_I = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \quad (10.6)$$

が生じ、この誘導された起電力によって電流が流れる。起電力によってループに誘導電流が流れると、自由電子の速度は、ループの運動による速度 v に、ループに沿った速度 v' が加わって $v + v'$ になる。電子にはたらく Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = (-e)[(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B}] = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B} + (-e)\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$$

となる。しかし、第2項の $\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ は \mathbf{v}' に垂直、すなわち、ループに垂直であるので、起電力には寄与しない。よって、ループに誘導電流が流れても、誘導起電力は (10.6) で与えられる。

次に、ループの運動により、ループを貫く磁束が変化する割合を考える。図 10.5 に示すよ

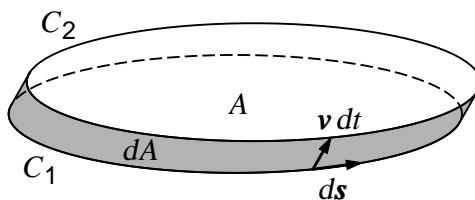


図 10.5: ループを貫く磁束の変化

うに、ループが速度 v で運動していて、時刻 t に位置 C_1 にあったループが、時刻 $t + dt$ に位置 C_2 へ移動したとする。

時刻 t にループを貫く磁束 $\Phi(t)$ は、 C_1 が囲む任意の曲面（ C_1 を縁とする曲面） A にわたる磁束密度の面積積分で与えられる：

$$\Phi(t) = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (10.7)$$

時刻 $t + dt$ においてループを貫く磁束は、 C_2 が囲む任意の曲面にわたる磁束密度の面積積分で与えられるが、ここで、曲面として、 C_1 が囲む曲面 A に、図 10.5 に示す帯状の部分 dA を加えた $A + dA$ をとる。このとき、 $t + dt$ においてループを貫く磁束 $\Phi(t + dt)$ は

$$\Phi(t + dt) = \int_{A+dA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi(t) + \int_{dA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

であり，従って，微小時間 dt の経過に伴う，ループを貫く磁束の変化は

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \int_{dA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

と表すことができる。

ところで，帯状の部分 dA の面積素片 $d\mathbf{S}$ は

$$d\mathbf{S} = \mathbf{v} dt \times d\mathbf{s}$$

と書ける。ここに， $\mathbf{v} dt$ は，微小時間 dt のあいだにループが移動した距離と向きを表すベクトルであり， $d\mathbf{s}$ はループに沿った微小ベクトルである。従って，ループを貫く磁束の変化 $d\Phi$ は，時刻 t におけるループの位置 C_1 に沿った線積分に書き直すことができる：

$$d\Phi = \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{s}).$$

これを時間について微分して，磁束の時間変化率は

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = - \oint_{C_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

となる。2 番目の等号では，ベクトルの 3 重積の性質 $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$ を用いて書き換えた。ループに誘導される起電力 (10.6) は，以上より

$$V_1 = - \frac{d\Phi}{dt}$$

と表せることがわかる。

例題 10.1 図 10.6 に示すように，抵抗 R をつないだ 2 本の導体棒に，別の導体棒を 2 点 P と Q で接触させて長方形の閉じた回路をつくる。この回路を一様な磁束密度 B の磁場の中に垂直に置き，導体棒を一定の速度 v で滑らせる。このとき，回路に流れる電流 I を求めよ。ただし，PQ 間の長さを a とする。

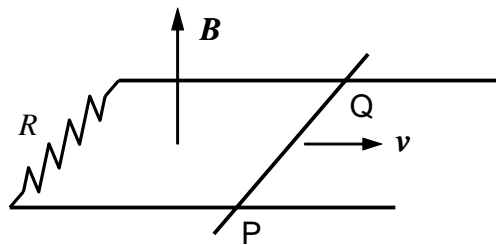


図 10.6: XXX

解 回路の面積は単位時間当たり av の割合で増加するので，回路を貫く磁束の増加率は Bav である。これより，回路に生じる起電力の大きさは $V_1 = Bav$ であり，回路を流れる電流は $I = Bav/R$ となる。

例題 10.2 単極誘導 図 10.7 の左図に示すように、半径 a の金属円板が、細い中心軸のまわりに一定の角速度 ω で回転している。この回転する円板を、中心軸方向の一様な磁束密度 B の磁場の中に置いて、円板の周辺部と回転軸に導線を接触させると、回路に電磁誘導が起こり起電力が現れる。誘起された起電力を求めよ。

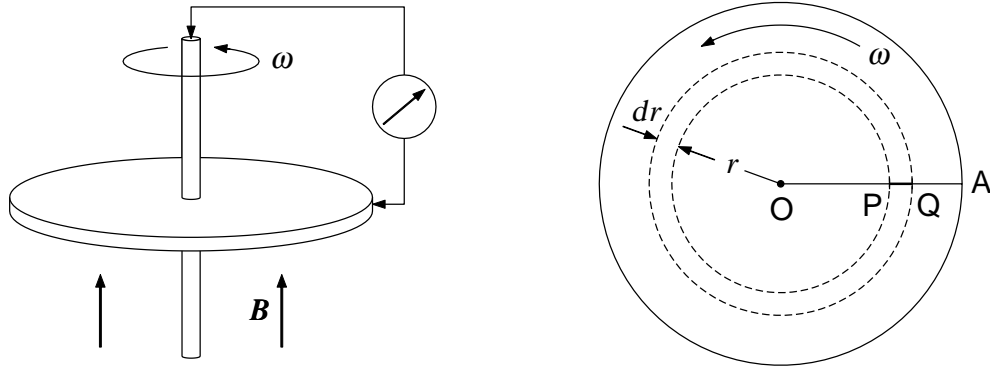


図 10.7: 単極誘導

解 回転する円板を上から見たところを 図 10.7 の右図に示す。半径 OA の上に、中心軸からの距離が r と $r + dr$ のあいだの部分 PQ を考える。この長さ dr の部分 PQ は、速さ $r\omega$ で回転しており、その運動の向きは半径 OA にも磁束密度 B にも垂直である。従って、 PQ 部分にある自由電子は、磁場から、中心軸に向かう Lorentz 力を受ける：

$$F = er\omega B.$$

その結果、長さが dr の部分 PQ の両端には電位差

$$dV = \omega B r dr$$

が生じる。円板の周辺部と中心軸のあいだの電位差は、上の式を r について 0 から a まで積分して

$$V = \int dV = \int_0^a \omega B r dr = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

と求められる。なお、この現象を単極誘導 (unipolar induction) という。

10.3 誘導電場

Faraday の法則 (Faraday's law)

磁束密度 B が時間的に変化すると, その変化を妨げる向きにうず状の電場が生じる:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{積分形}) \quad (10.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{微分形}) \quad (10.9)$$

積分形において, L は閉曲線を表し, S は L を縁とする曲面である。

静電場はうずなし場 ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$) であるのに対して, 電磁誘導によって生じる電場はうずなしではない。

上では, 図 10.3 に示したように, 磁石に固定した座標系で電磁誘導を考察したが, 次に, ここでは, ループに固定した座標系 (ループとともに運動する座標系) で誘導電流が流れる現象を考察する。

図 10.7 に示すように, ループに固定した座標系では, 棒磁石が速度 $-v$ で (左向きに) 運動する。しかし, ループ内の電子にはたらく力, 従って, ループに誘導される起電力は座標系によって変わることはない。すなわち, 電磁誘導は 図 10.3 に示したように棒磁石が静止する座標系でも, 図 10.8 に示すようにループが静止する座標系でも同様に観測される。ただし, 座標系が変わると現象を表す言葉が変わる。ループが静止する座標系では, ループ内の電子は磁場から Lorentz 力を受けない (電子は静止している) ので, 電子は電場から力を受けていなければならない。

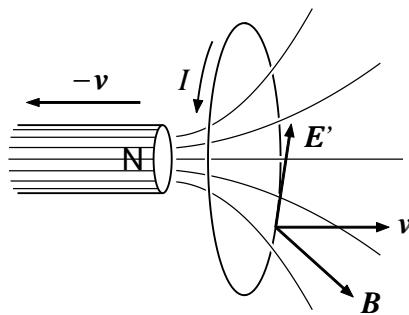


図 10.8: 誘導電場

座標系の変換に伴う電場と磁場の変換は Lorentz 変換によって与えられる。ある慣性系 K に対して一定の速度 v で運動する慣性系を K' とすると, K 系における電場 E と磁束密度 B

から, K' 系における E' と B' への Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} E'_p &= E_p, & E'_t &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \\ B'_p &= B_p, & B'_t &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} (\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E})_t \end{aligned}$$

と書け, ここに, p の添え字をつけた量は速度 v の方向の成分を, t の添え字をつけた量は速度 v に垂直な成分を表す。棒磁石が静止する座標系を K とすると, この系では電場が存在しない ($\mathbf{E} = 0$)。また, 速度 v は光速 c に比べて十分小さいので, $1/\sqrt{1-(v/c)^2} = 1$ と近似できる。従って, ループが静止する座標系 K' における電場と磁場は

$$\begin{aligned} E'_p &= 0, & E'_t &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_t \\ B'_p &= B_p, & B'_t &= B_t \end{aligned}$$

と書ける。すなわち, K' 系では, 磁束密度 $B' = B$ に加えて, 電場

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_I = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

が存在する。この電場 \mathbf{E}_I を誘導電場 (induced electric field) と呼ぶ。 K' 系においてループ内の自由電子が誘導電場から受ける力は, K 系における Lorentz 力と同じ力である。

誘導電場 \mathbf{E}' をループに沿って積分したものが, ループに生じる誘導起電力である:

$$V_I = \oint_L \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{s}.$$

ところで, 誘導起電力は (10.4) によって磁束の時間変化率で表され, また, 磁束は (10.7) によって磁束密度の面積積分で表される。よって, 上の線積分は次のように表すことができる:

$$\oint_L \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

ここに, S はループを表す閉曲線 L を縁とする任意の曲面である。さらに, K' では, 閉曲線 L も曲面 S も動かないので, 時間微分は偏微分として積分記号の中に入れることができる:

$$\oint_L \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

これが Faraday の法則である。

誘導電場は Coulomb 電場とは異質の電場である。Coulomb 電場は任意の閉曲線について線積分は 0 になる (保存場) ので, 上の積分において, 左辺の被積分関数に Coulomb 電場を入れても寄与しない

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{Coul}} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

すなわち, 左辺において, 誘導電場 \mathbf{E}_I を電場 \mathbf{E} で置き換えても差し支えない

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L (\mathbf{E}_{\text{Coul}} + \mathbf{E}_I) \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{s}.$$

従って, Faraday の法則は (10.8) で表される。Stokes の定理を用いて, 積分形から微分形が得られる。

例題 10.3 回転するコイル 図 10.9 の左図に示すように, 1 辺の長さが a の正方形のコイルが, 磁束密度 B の一様な水平磁場の中に置かれている。この正方形のコイルを, 鉛直な 1 辺を軸として, 一定の角速度 ω で回転させたとき, コイルを流れる電流 I を求めよ。ただし, コイルの抵抗を R とする。

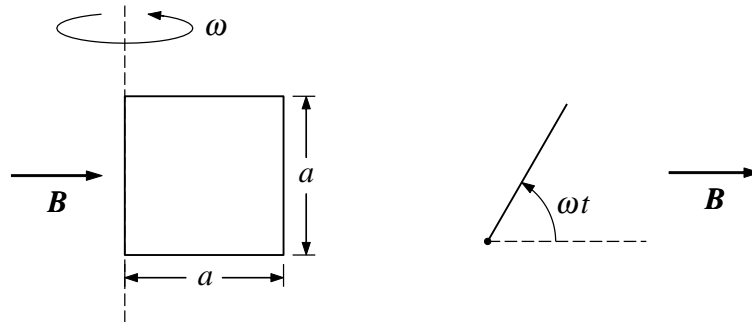


図 10.9: 一様な磁場の中で回転するコイル

解 図 10.9 の右図は, 回転するコイルを上から見たところである。時刻 $t = 0$ において, コイルの面が磁束密度 B に平行であるとする。時刻 t において, コイルを貫く磁束は

$$\Phi(t) = Ba^2 \sin \omega t$$

である。コイルに誘導される起電力は (10.4) より,

$$V = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\omega Ba^2 \cos \omega t$$

となる。コイルに流れる電流 I は, $I = V/R$ に代入して得られる:

$$I = -\frac{\omega Ba^2}{R} \cos \omega t.$$