

第 7 講 電流が磁場から受ける力

磁場のある空間に置かれた電流には力がはたらく。この力から磁束密度が定義される。また、電流は電荷の流れであり、電流が磁場から受ける力は運動する電荷が磁場から受ける力 (Lorentz 力) と見ることができる。

7.1 平行な電流にはたらく力

Ampère は動く導線を考案して、平行電流について実験を行い、次の実験則を見出した。

十分に長い平行な 2 つの直線電流が流れているとき、その強さを I_1, I_2 とすると、 I_2 (I_1) の長さ L の部分が I_1 (I_2) の全体から受ける力の大きさ F_{21} (F_{12}) は、両電流の積と長さ L に比例し、電流間の距離 r に反比例する：

$$F_{21} = F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} L. \quad (7.1)$$

2 つの電流が同じ向きに流れるときは互いに引き合い、逆向きに流れるときは互いに反発する (図 7.1 参照)。

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \quad (7.2)$$

は定数であり、これを真空の透磁率 (magnetic permeability) という。

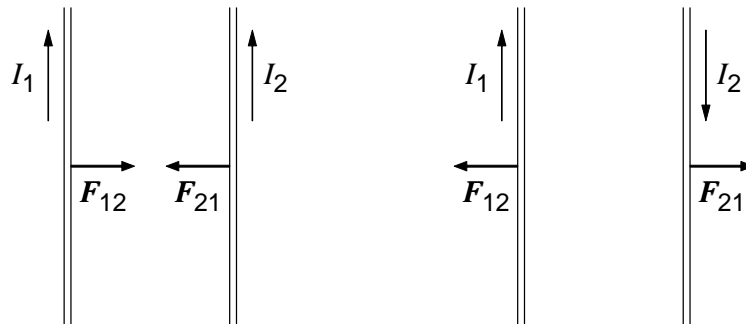


図 7.1: 平行な電流のあいだにはたらく力。左：同じ向きの電流，右：逆向きの電流

電流の単位の定義

すなわち、真空中で距離 1 m 隔てて置かれた 2 本の無限に長く細い平行直線導線に、強さが等し

い定常電流が流れていて、それぞれの導線の 1 m あたりにはたらく力の大きさが $F = 2 \times 10^{-7}$ N であるとき、導線を通る電流の強さを 1 A と定義する。

例題 7.1 図 7.2 の左図に示すように、3本の平行で無限に長い導線が、互いに距離 a だけ隔てて置かれている。次の場合に、導線 C の単位長さに作用する力を求めよ。

- (1) 3本の導線に、同一向きに等しい強さの電流 I が流れている場合。
- (2) 2本の導線 A と C は同じ向きに、導線 B にはそれと逆向きに、等しい強さの電流 I が流れている場合。

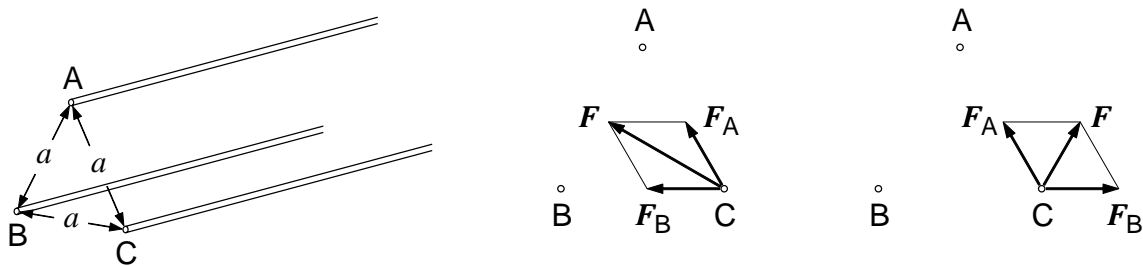


図 7.2: 3本の無限に長い平行な導線

解 導線に通る電流の向きによらず、電流 C が他の2つの電流 A, B から受ける力の大きさはそれぞれ等しい。電流 C の単位長さあたりに受ける大きさは

$$F_A = F_B = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}.$$

- (1) 2つの電流 A, B は電流 C と同じ向きに流れているので、2つの電流から受ける力は、どちらも引力である。その合力は図 7.2 の中図に示すように、角 ACB の二等分線の向きで、電流 C の単位長さあたりに受ける力の大きさは F_A (F_B) の $\sqrt{3}$ 倍である：

$$F = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I^2}{2\pi a}.$$

- (2) 電流 A は電流 C と同じ向きに流れているので、両者の間にはたらく力は引力であり、電流 B は電流 C と逆向きに流れているので、両者の間にはたらく力は斥力である(図 7.2 の右図)。その合力は電流 B から電流 A の向きで、その大きさは F_A (F_B) に等しい：

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}.$$

7.2 磁束密度

2つの平行電流のあいだにはたらく力 (7.1) は、電流の強さ I_1 と I_2 、及び、2つの電流の距離 r を指定して力が定まるという点で、2つの点電荷のあいだにはたらく力を与える Coulomb の法則とよく似ている。これは、直達説的な考えである。一方、媒達説的な考えに基づくと、Coulomb の法則は、電荷 q_1 と電荷 q_2 が直接に作用を及ぼすのではなく、電荷 q_2 が周囲の空間をひずませて電場 E_2 をつくり出し、その力の場（電場）の作用を電荷 q_1 が受けると解釈することができる。平行電流のあいだにはたらく力を媒達説的な考えに基づいて解釈すると、電流 I_2 が周囲の空間をひずませて、電場とは別の場をつくり出し、その力の場の作用を電流 I_1 が受けると考えられる。この場を 磁場 (magnetic field) と呼ぶ。

磁場は運動する電荷によってつくられる場であり、運動する電荷だけに作用する。Coulomb 力が作用する点電荷と比較して、電荷の運動は点（位置だけで指定できる）で表すことはできず、また、電荷の運動は向きがあるベクトル量である。すなわち、磁場も電流も方向性をもったベクトル量であるので、電流がつくる磁場も、運動する電荷が受ける磁気的な力も、複雑な方向性をもつ。電流がつくり出す磁場については後述するが、電流の微小部分が磁場から受ける力は次のように表される。

定常電流の微小部分 $I ds$ (電流素片) が磁場から受ける力を dF とすると、磁場の各点に

$$dF = I ds \times B \quad (7.3)$$

で表されるベクトル量 B が存在し、この B を 磁束密度 と呼ぶ (\times はベクトル積)。電流と磁場が直交するとき、これは Fleming の左手の法則 (Fleming's left-hand rule) を与える。

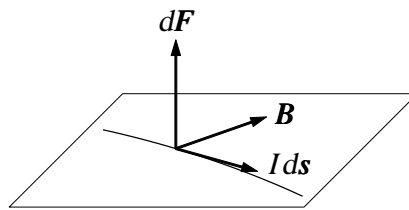


図 7.3: 電流素片が磁場から受ける力

E を電場と呼ぶのに対応して、 B を磁場と呼ぶのが自然であるが、これを磁束密度と呼ぶのは歴史的な理由によっている。

導線を通る強さ I の定常電流の微小部分 $I ds$ が磁場から受ける力 dF を考える。この力は、(7.1) からわかるように電流の強さ I に比例するので

$$dF = B \cdot I ds$$

と書くことができる。しかし、図 7.1 に示されるように、力 $d\mathbf{F}$ と電流素片 $I ds$ との向きは同じではない。すなわち、上の式の B は単なる定数ではなく、テンソルと呼ばれる量であり、3行3列の行列で表される：

$$B = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$$

これを用いて、上の式は

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I ds_x \\ I ds_y \\ I ds_z \end{pmatrix}$$

と表せる。テンソルの成分 B_{ij} は、平行電流のあいだにはたらく力の式 (7.1) だけからは定まらない。一般に、微小部分 $I ds$ だけにはたらく力 $d\mathbf{F}$ を知ることは難しい。そこで、対称性のよい磁場の中に置かれた直線電流にはたらく力から、帰納的に B を考えることにする。

十分長い円筒状のコイル（導線を円筒状に巻いたもので、ソレノイドと呼ぶ）を考え、その軸の方向に z 軸をとる。ソレノイドの中に直線電流を置いて、直線電流にはたらく力を調べると、力は常に

z 軸に垂直な面内で、電流と直角な方向にはたらく。

従って、このとき、テンソル B は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形に表される。力 $d\mathbf{F}$ と電流素片 $I ds$ との関係は

$$dF_x = BI ds_y, \quad dF_y = -BI ds_x, \quad dF_z = 0$$

となる。ここで、 z 軸方向のベクトル $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ を定義すると、上の関係式は

$$d\mathbf{F} = I ds \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} I ds_y \cdot B_z - I ds_z \cdot B_y \\ I ds_z \cdot B_x - I ds_x \cdot B_z \\ I ds_x \cdot B_y - I ds_y \cdot B_x \end{pmatrix}$$

と書くことができる。すなわち、 z 軸を中心軸とするソレノイドの中には、 z 軸方向に一樣な磁場（磁束密度 B ）ができていていると考えられる。

7.3 Lorentz 力

電荷 q をもつ荷電粒子が、速度 v で磁束密度 B の磁場の中を運動するとき、粒子は磁場から

$$F_m = qv \times B \quad (7.4)$$

の力を受ける。この力を、磁場が及ぼす Lorentz 力 (Lorentz's force) と呼ぶ。

Lorentz 力は速度をもつ荷電粒子にはたらくので、電荷をもたない粒子や速度が $v = 0$ である粒子には、磁場は力を及ぼさない。また、Lorentz 力は速度に直角な向きにはたらく (磁束密度の向きにも垂直) ので、粒子の運動の向きは変えるが、仕事はしない。

電流が磁場から受ける力 (7.3) は、導線内を流れる電子が磁場から受ける力とみることができ。導線の断面積を S 、導線内の自由電子の密度 (単位体積あたりの数) が n 、電子の平均速度を v とすると (図 7.4 参照)、導線を流れる電流 I は

$$I = n(-e)Sv$$

である。これを (7.3) に代入して電流の微小部分 $I ds$ が磁場から受ける力は

$$dF = -neS ds v \times B$$

と書ける。ただし、 $-v$ と ds が同じ向きをもつベクトルであることを用いた。ところで、上の式で $nS ds$ は、導線の長さ ds の部分に含まれる電子の数を表す。従って、1 個の電子が磁場から受ける力は

$$F = -e v \times B$$

である。磁場から力を受けるのは電子に限らない。電荷をもつ粒子が運動するとき、磁場から

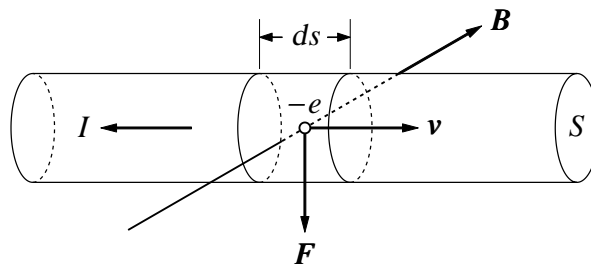


図 7.4: Lorentz 力

力を受ける。粒子の電荷を q として、一般に (7.4) が成り立つ。

荷電粒子が運動する空間に電場 E もあるとき、粒子に電場が及ぼす力は $F_e = qE$ であり、磁場と電場が及ぼす力を合わせて、一般に、Lorentz 力と呼ぶ：

$$F = q(E + v \times B). \quad (7.5)$$

Lorentz 変換による電場と磁場の変換

運動する荷電粒子に電場と磁場が及ぼす Lorentz 力 (7.5) は粒子の速度 v を含んでいるので、座標系の選び方に依存する。ある慣性系 K に対して一定の速度 v で運動している荷電粒子にはたらく Lorentz 力は (7.5) で与えられ、このとき、 E と B は速度 v に関係ないベクトル量であり、それぞれ、慣性系 K における電場と磁束密度である。なお、粒子の電荷 q は座標系に依存しない(どの座標系から見ても同じ値である)。慣性系 K に対して速度 u で運動している別の慣性系 K' からみて、同じ粒子にはたらく Lorentz 力 F' は、(7.5) と同じ形で

$$F' = q(E' + v' \times B')$$

と表せる。ここで、 v' は慣性系 K' からみた粒子の速度であり、 E' と B' は K' における電場と磁束密度である。2つの慣性系のあいだの変換は Lorentz 変換によって与えられる。電場 E と磁束密度 B から、 E' と B' への変換は

$$\begin{aligned} E'_p &= E_p, & E'_t &= \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} (E + u \times B)_t \\ B'_p &= B_p, & B'_t &= \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} (B - \frac{1}{c^2} u \times E)_t \end{aligned} \quad (7.6)$$

と書ける。ここで、 p の添え字をつけた量は速度 u の方向の成分を、 t の添え字をつけた量は速度 u に垂直な成分を表す。このように、電氣的な力と磁氣的な力の分離は絶対的なものではない。ある座標系で電氣的(磁氣的)な力であるものの一部が、他の座標系では磁氣的(電氣的)な力になる。

例題 7.2 サイクロトロン運動 一様な磁束密度 B の磁場の中へ、 B に垂直な速度 v_0 で飛び込んだ荷電粒子は円運動することを確認せよ。ただし、粒子の電荷を q 、質量を m とする。

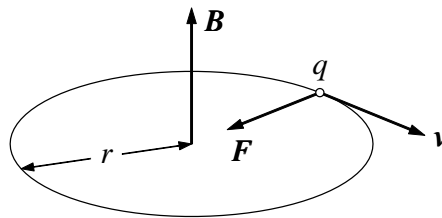


図 7.5: サイクロトロン運動

解 荷電粒子が磁場から受ける Lorentz 力 $F = qv \times B$ は粒子の速度 v にも磁束密度 B にも垂直である(図 7.5)。従って、 B に垂直な速度をもつ粒子は B に垂直な平面内で運動を続ける。

いま、粒子の軌道の曲率半径が r であるとする。このとき、粒子の運動方程式は、軌

道の接線方向と法線方向に分けて

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad m \frac{v^2}{r} = qvB$$

と表せる。接線方向の式から、粒子の速さが変化しないことが直ちにわかる。すなわち、粒子の運動は、速さが $v = v_0 = \text{一定}$ の等速運動である。この結果を法線方向の運動方程式に代入すると、

$$r = \frac{mv_0}{qB} = \text{一定}$$

が得られる。これは、曲率が一定の曲線、すなわち、円周上の運動である。つまり、荷電粒子は半径 $r = mv_0/(qB)$ の円周に沿った、速さ v_0 の等速円運動をする。この運動をサイクロトロン運動 (cyclotron motion) という。また、このとき、

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

をサイクロトロン角振動数 (cyclotron frequency) と呼ぶ。サイクロトロン振動数は粒子の速さによらず、粒子の比電荷 q/m と磁束密度の大きさ B で決まる。

例題 7.3 Hall 効果 電流が流れている導体を磁場の中に置くと、導体は磁場から力を受ける。この機構を説明せよ。

解 磁場から力を直接受けるのは、導体内を運動する荷電粒子 (電子) である。そこで、荷電粒子が磁場から力を受けると、なぜ導体が力を受けることになるかを考える。

- (a) 図 7.6 の (a) に、定常電流が右向きに流れている金属 (導体) 棒の様子を模式的に示す。金属の結晶格子を構成する正イオンを白丸で表し、自由電子 (荷電粒子) を黒丸で表す。定常電流が流れる向きに y 軸をとる。このとき、電子は平均として y 軸の負の向きに運動している。電子の平均移動速度 v を矢印で表す。
- (b) 電流が流れている金属棒に、図 7.6 の (b) に示すように、電流と直角に磁場をかける。磁束密度 B の向きに x 軸をとる。電子は磁場から Lorentz 力

$$\mathbf{F}_m = (-e)v \times \mathbf{B}$$

を受ける。 v は y 軸の負の向きで、 B は x 軸の正の向きであるので、Lorentz 力の向きは z 軸の負の向きである。電子は、Lorentz 力を受けたため、運動の方向が z 軸の負の向きにそれる。

- (c) 電子の運動速度が z 軸の負の向きにそれるため、金属棒の下の部分では電子の密度が増加し、上の部分では密度が減少する。その結果、棒の下部では負の電荷が過剰に、棒の上部では正の電荷が過剰になり、棒の内部に z 軸の負の向きに電場 E_h が発生する。この電場を Hall 電場 (Hall effect field) と呼ぶ。電子は Hall 電場から電気的な力 $\mathbf{F}_e = (-e)E_h$ を受ける。この力の向きは z 軸の正の向きである。つまり、電子は外からかけた磁場と Hall 電場の両方から力を受ける：

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e = (-e)v \times \mathbf{B} + (-e)E_h.$$

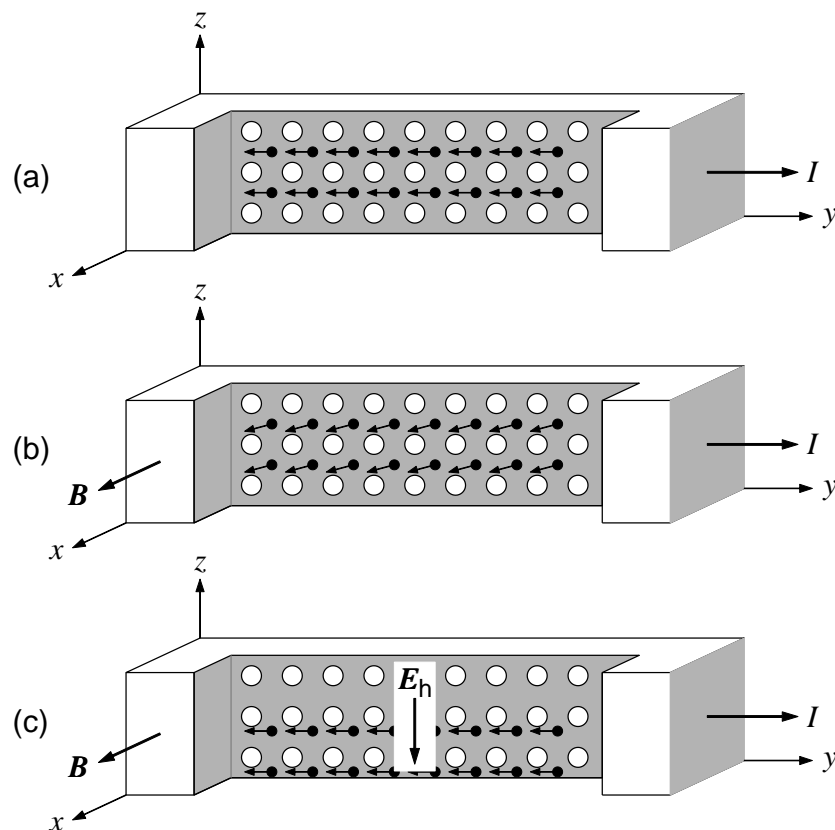


図 7.6: Hall 効果

2つの力の向きは逆である。電子密度の偏りが小さいうちは磁場から受ける力が勝って偏りが増大する。偏りが大きくなるほど Hall 電場は強くなり、やがて、 z 軸の負の向きの力 F_m と正の向きの力 F_e が釣りあう。このとき、電子は金属棒の下部に偏ったまま y 軸の負の向きに運動する。

金属格子を構成する正イオンは静止しているので磁場からは力を受けない。しかし、Hall 電場から電気的な力を受ける。電場は z 軸の負の向きであるので、正イオンが受ける電気的な力の向きも z 軸の負の向きである。よって、格子の正イオン、つまり、金属棒が z 軸の負の向きに力を受けることになる。

Hall 電場の存在は実証できる。 y 軸の正の向きに定常電流が流れる金属棒の z 軸方向の上下に電極をつけて、それを検流計をつなぐ。この金属棒に、 x 軸方向の磁場をかける。このとき、棒の内部には z 軸の負の向きに Hall 電場が生じ、電極間に起電力が生じて検流計に電流が流れる。この現象を Hall 効果 (Hall effect) といい、このときに現れる起電力を Hall 起電力 (Hall electromotive force) という。

7.4 コイルが磁場から受ける力

Ampère は、回転できる矩形コイルを用いて地球の地磁気的作用を調べ、コイルの面が常に子午線と直角な位置（コイルの面は南北を向く）に止まること、また、このとき、南側からコイルを見ると電流は時計回りに流れていることを見出した。

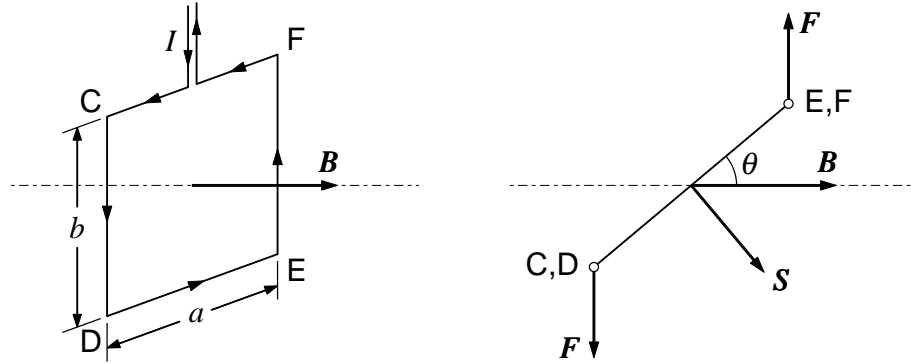


図 7.7: 矩形コイルが磁場から受ける力

図 7.7 の左図に示すように、一様な水平磁場内に、鉛直軸のまわりに回転できる矩形コイルをつるして電流を流す。コイルの面が磁束密度 B と角 θ を成しているときを考える（図 7.7 の右図）。矩形の水平な辺 CF (DE) では電流が \vec{FC} (\vec{DE}) の向きに流れているので、磁場から受ける力は

$$\mathbf{F}_{CF} = I\vec{FC} \times \mathbf{B} = IBa \sin(\pi - \theta) \mathbf{k} = IBa \sin \theta \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_{DE} = -IBa \sin \theta \mathbf{k}$$

(\mathbf{k} は鉛直上向きの単位ベクトル) である。2 つの辺に作用する力は大きさが等しく逆向きであり、作用線が一致しているのでつりあっている。

一方、鉛直な辺 CD (EF) では電流が \vec{CD} (\vec{EF}) の向きに流れているので、磁場から作用する力は

$$\mathbf{F}_{CD} = I\vec{CD} \times \mathbf{B} = IBbn, \quad \mathbf{F}_{EF} = I\vec{EF} \times \mathbf{B} = -IBbn$$

(n は紙面上の上向き単位ベクトル) より、大きさが IBb で紙面上向き（下向き）である。よって、鉛直な 2 辺にはたらく力は、大きさが等しく逆向きであるが、作用線が一致しないので偶力をつくる。偶力のモーメントは

$$\mathbf{N} = |\mathbf{F}_{CD}| \cdot |\vec{CE}| \cos \theta \mathbf{k} = IBab \cos \theta \mathbf{k} = \mathbf{IS} \times \mathbf{B}$$

と表せる。ここで、 \mathbf{S} はコイルの面に垂直で面積 ab に等しい大きさのベクトルである。ただし、 \mathbf{S} の向きは、電流の流れる向きに右ねじを回したときに、右ねじの進む向きにとる。 \mathbf{IS} をコイルの磁気モーメント (magnetic moment) と呼ぶ。

矩形コイルの磁気モーメント \mathbf{IS} と磁束密度 \mathbf{B} が平行でない ($\theta \neq \pi/2$) とき、コイルには磁場から偶力がはたらき、偶力のモーメント \mathbf{N} によってコイルは回転する。回転する向きは

IS と B が平行になるような向きである。すなわち、磁気モーメント IS の向きが磁束密度 B の向きに一致するように、コイルは鉛直軸のまわりに回転する。

地球は大きな磁石であり、北極付近に S 極があり、南極付近に N 極がある。従って、磁針 (磁石) の N が北を S が南を指す。地表あたりの磁束密度はほぼ子午線に沿って北向きである。

例題 7.4 半径が a の円形のコイルに定常電流 I が流れている。このコイルを磁束密度が B の一様な磁場の中につるす。コイルの面が B に平行であるとき、コイルにはたらく偶力のモーメントを求めよ。

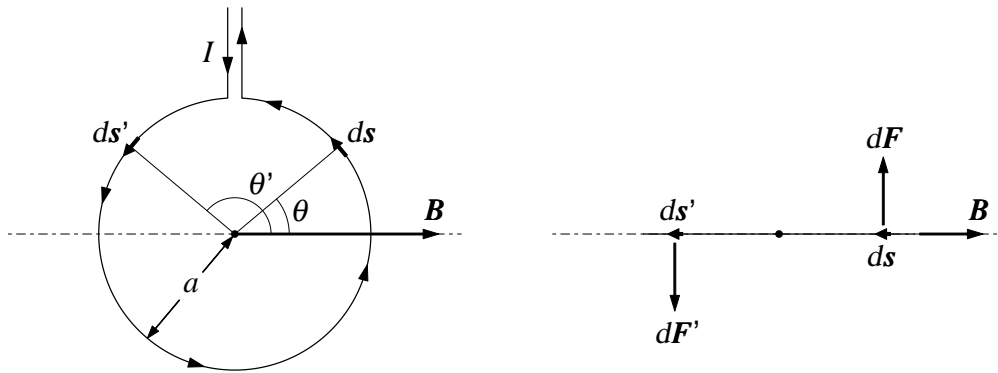


図 7.8: 円形コイルが磁場から受ける力

解 まず、磁束密度 B の向きから角 θ の微小部分の電流 $I ds$ を考える。 ds の向きは角 $\theta + \pi/2$ の向きであるから、この部分が磁場から受ける力は

$$dF = I ds \times B = IB ds \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) n = IBa \cos\theta d\theta n$$

と書ける。ここで、 n は紙面の表から裏へ向かう単位ベクトルである。また、半径 a の円周に沿った微小な長さ ds を $a d\theta$ と表した。同様に、 $\theta' = \pi - \theta$ の微小部分の電流 $I ds'$ が磁場から受ける力は $dF' = IBa \cos\theta' d\theta n = -IBa \cos\theta d\theta n$ となり、 dF と同じ大きさで逆向きである。2つの微小な電流の距離は $2a \cos\theta$ であるから、2つの力のモーメントの大きさは

$$dN = IBa \cos\theta \cdot 2a \cos\theta \cdot d\theta = 2IBa^2 \cos^2\theta d\theta$$

である。円電流全体が受ける力のモーメントは鉛直上向きで、大きさは上の式を θ について $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで積分して得られる：

$$N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2IBa^2 \cos^2\theta d\theta = \pi a^2 IB.$$

7.5 磁気双極子

磁気の Coulomb の法則

Coulomb は磁石の磁極の間にはたらく力を精密に測定し、電荷と同様に逆 2 乗則に従うことを示した。すなわち、磁石の N 極には正の磁荷 $+q_m$ が、 S 極には負の磁荷 $-q_m$ が存在するとし、磁荷の間には

$$F_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m q'_m}{r^2} \quad (7.7)$$

の大きさの力が磁荷を結ぶ向きにはたらくことを示した。 μ_0 は真空の透磁率である。磁荷の単位は $\text{Wb} = \text{J}/\text{A}$ (ウェーバー) を用いる。

電荷の間に作用する Coulomb 力の場合と同様に、ある点 P にある磁荷 q_m に磁氣的な力 F_m が作用するとき、この点には磁場 H があると考えられる：

$$F_m = q_m H. \quad (7.8)$$

これによって定まる磁場 H は磁束密度 B と

$$B = \mu_0 H \quad (7.9)$$

の関係がある。磁場 H の単位は $\text{N}/\text{Wb} = \text{A}/\text{m}$ である。

磁気双極子

等量異符号の磁荷 $\pm q_m$ が小さな距離を隔てて配置されたものを磁気双極子 (magnetic dipole) と呼ぶ。図 7.9 の左図に示すように、2つの磁荷の距離を L とする。このとき、磁荷 q_m と

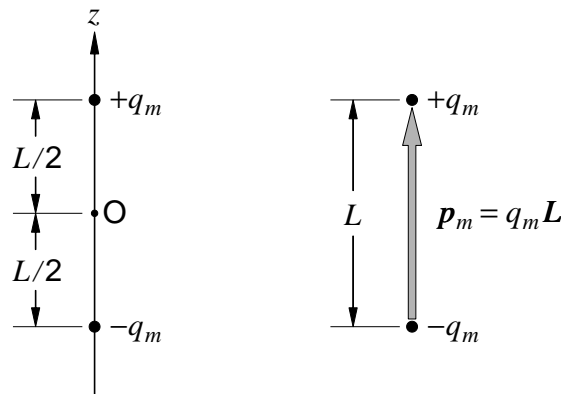


図 7.9: 磁気双極子モーメント

$-q_m$ から $+q_m$ へ向かうベクトル L との積で定義されるベクトル

$$p_m = q_m L. \quad (7.10)$$

を磁気双極子モーメント (magnetic dipole moment) と呼ぶ (図 7.9 の右図を参照)。

2つの磁荷を結ぶ直線を z 軸とし、中点を原点として $-q_m$ から $+q_m$ への向きを正の向きとする。磁荷の分布が z 軸対称であるので、磁気双極子がつくる磁場も z 軸に関して対称である。そこで、平面上の(2次元)極座標を用いると、磁気双極子から十分離れた点における磁場の r 方向成分と θ 方向成分は、(3.11) と同様に

$$\begin{aligned} H_r(r, \theta) &= \frac{2p_m \cos \theta}{4\pi\mu_0 r^3} \\ H_\theta(r, \theta) &= \frac{p_m \sin \theta}{4\pi\mu_0 r^3} \end{aligned} \quad (7.11)$$

と表せる。

一様な磁場の中に置かれた磁気双極子

図 7.10 に示すように、一様な磁場 H の中に置かれた磁気双極子には、次の式で与えられる力のモーメント N がはたらく：

$$\mathbf{N} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{H}. \quad (7.12)$$

力のモーメントのベクトル N の向きは、図 7.10 の場合、紙面に垂直に裏から表向きである。

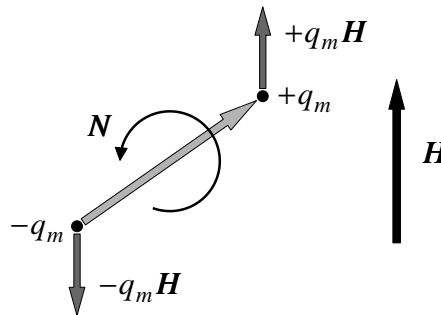


図 7.10: 一様な磁場の中に置かれた磁気双極子

磁場 H と磁気双極子モーメント p_m がなす角を θ とするとき、磁気双極子には、大きさが

$$|\mathbf{p}_m \times \mathbf{H}| = p_m H \sin \theta = q_m L H \sin \theta$$

で、図中に示した向きに力のモーメントが作用する。すなわち、磁気双極子モーメントの向きを磁場の向きに一致させる向きに力のモーメントは作用する。