第 2 講　電場

静止している２つの電荷の間にはたらく力（相互作用）は Coulomb の法則によって表される。この相互作用をもとに，近接作用の立場から，ベクトル場である電場を定義する。数学的な表現として，電場に対する Gauss の法則を，また，それの微分形式の表現を導く。この法則は電場の源が電荷であることを示し，Coulomb の法則が逆２乗則であることに起因する。

2.1　Coulomb の法則

２つの電荷 q_1 と q_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ にあるとき，q_1 が q_2 から受ける力 $\boldsymbol{F}_{12}$，q_2 が q_1 から受ける力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \tag{2.1}$$

と表される（**Coulomb の法則**）。ここで，

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\ 187\ 817\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \tag{2.2}$$

は真空の**誘電率**（permittivity）と呼ばれる定数である。

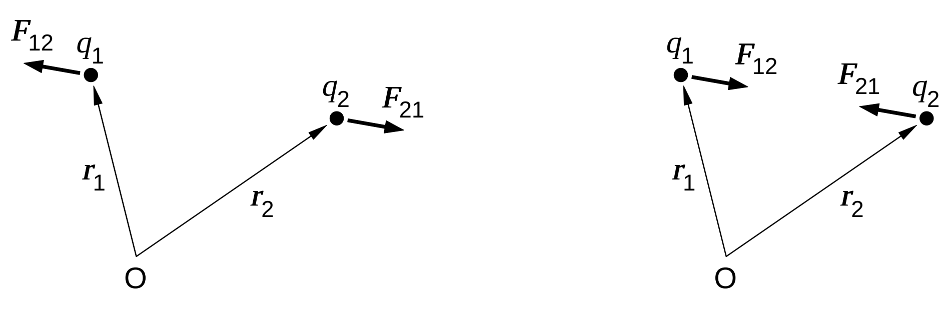

図 2.1:　Coulomb の法則。左：同符号の電荷，右：異符号の電荷

(1)　作用・反作用の関係 $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$ が成り立つ。

(2)　２つの電荷が同符号であるとき，すなわち，$q_1q_2 > 0$ のとき，$\boldsymbol{F}_{12}$ は $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ の向きである。つまり，同符号の電荷のあいだにはたらく力は斥力である。他方，$q_1q_2 < 0$

のとき，$\boldsymbol{F}_{12}$ は $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ の向きであり，つまり，異符号の電荷のあいだには引力がはたらく。

(3) Coulomb 力は，電荷の距離の 2 乗に反比例する大きさをもつ力である。

例題 2.1　太陽と同じ質量をもち，半径が 10 km の中性子星の表面に置かれた電子にはたらく重力を求めよ。また，中性子星の中心に何個の陽子を置いたら，陽子から電子が受ける Coulomb 力は重力と同じ大きさになるか。太陽の質量を $M = 1.988 \times 10^{30}$ kg とする。

解　重力の大きさは，中性子星の質量が全て中心に集まっているとして計算してよい：

$$F_G = 6.6742 \times 10^{-11} \cdot \frac{(1.988 \times 10^{30}) \cdot (9.109 \times 10^{-31})}{(10 \times 10^3)^2} = 1.21 \times 10^{-18} \text{ [N]}.$$

一方，中性子星の中心に置かれた 1 個の陽子と表面に置かれた 1 個の電子のあいだにはたらく Coulomb 力は

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12}} \cdot \frac{(1.602 \times 10^{-19})^2}{(10 \times 10^3)^2} = 2.31 \times 10^{-36} \text{ [N]}$$

となる。重力と同じ大きさを得るために必要な陽子の個数は，$(1.21 \times 10^{-18})/(2.31 \times 10^{-36}) \approx 5 \times 10^{17}$ 個である。なお，中性子星を構成する中性子の数は約 10^{57} 個である。このように，重力によって束縛しているマクロな系でも，電気的な力の効果は大きい。現実の中性子星は中性子だけではなく陽子も存在する。上の計算から示唆されるように，陽子と同数の電子も含み，全体としては電気的に中性であると考えられる。

2.2　電場

Coulomb の法則 (2.1) は 2 つの電荷のあいだに作用する力を表す法則であるが，これを次のように 2 つの式に分解して書くことができる：

$$\boldsymbol{F}_{21} = q_2 \boldsymbol{E}_1 \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \tag{2.4}$$

ここで，(2.4) の $\boldsymbol{E}_1$ は電荷 q_2 には依存せず，電荷 q_1 と，相対的な位置を表す $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ によって定まるベクトルである。このベクトルを電荷 q_1 がつくる **電場**（electric field）と呼ぶ。(2.3) は電荷 q_1 がつくる電場 $\boldsymbol{E}_1$ から電荷 q_2 が力 $\boldsymbol{F}_{21}$ を受けることを表している。すなわち，2 つの電荷が及ぼしあう力は，電荷 q_1 と電荷 q_2 が直接に作用を及ぼすのではなく，電荷 q_1 が周囲の空間をひずませて電場 $\boldsymbol{E}_1$ をつくり出し，その力の場（電場）の作用を電荷 q_2 が受けると解釈することができる。これは，Coulomb の法則の媒達説的な表現である。

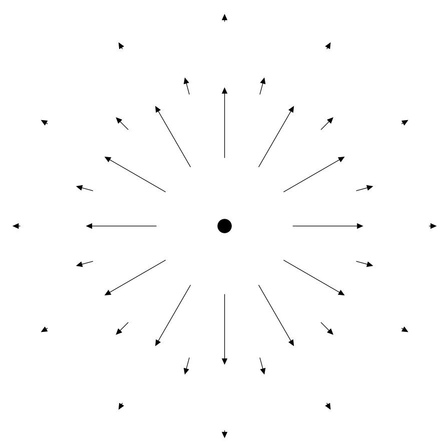

図 2.2:　点電荷がつくる電場

物理的実体としての電場

(2.4) と (2.3) は Coulomb の法則 (2.1) を形式的に分解しただけのように見えるが，両者の解釈には大きな違いがある。Coulomb の法則 (2.1) は，2 つの電荷 q_1，q_2 と両者の相対的な位置が規定されなければならない。一方，(2.4) は，電荷 q_2 のあるなしに係わらず，電荷 q_1 によって，その周りに電場 $\boldsymbol{E}_1$ がつくり出されていることを意味する。また，(2.3) は電場 $\boldsymbol{E}_1$ が何によってつくり出されているかに係わらず，電荷 q_2 が存在する位置に電場 $\boldsymbol{E}_1$ があるとき，力 $\boldsymbol{F}_{21}$ が電荷 q_2 に作用することを表している。ここでは，電荷によってつくられる電場を考えているが，一般的には電荷が無くても電場は存在する（後で見るように時間的に変化する磁場によっても電場がつくられる）。すなわち，電場は電荷とは独立した物理的な実体である。

分布している電荷がつくる電場　空間的に分布している電荷がつくる電場は，重ね合わせの原理に従って，個々の電荷がつくる電場のベクトル和として求めることができる。

複数の点電荷 q_k が位置 $\boldsymbol{r}_k$ にあるとき ($k = 1, 2, \cdots, n$)，全電荷がつくる電場は，電荷 q_k が単独で存在する場合に位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場 $\boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{r})$ のベクトルとしての和で与えられる：

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{E}_k(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|}. \tag{2.5}$$

上の表式は，**電荷密度** $\rho(\boldsymbol{r})$ を導入することによって，電荷が連続的に分布している場合に拡張することができる。いま，電荷が分布する領域を微小体積に分割して考える。微小体積 Δv_k の位置を $\boldsymbol{r}_k$ とすると，その中にある電荷は $\rho(\boldsymbol{r}_k)\,\Delta v_k$ であるから，領域全体の電荷がつくる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|^3}\,\rho(\boldsymbol{r}_k)\,\Delta v_k \tag{2.6}$$

で与えられる。ここで，領域の微小部分への分割において $\Delta v_k \;\to\; 0$ の極限（同時に $n \to \infty$）をとると，上の式の和は積分に置き換えられる。すなわち，

> 電荷密度が $\rho(\boldsymbol{r}')$ で与えられるとき，この電荷が位置 $\boldsymbol{r}$ につくる電場は次の式で与えられる：
>
> $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'. \tag{2.7}$$
>
> $\mathrm{d}V'$ は $\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$ であり，右辺は電荷が分布する領域にわたる体積積分である。
> 電場の単位は，真空の誘電率 ε_0 の単位が $\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ であるので，
>
> $$\text{電場の単位} \;:\; \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}} \;=\; \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \tag{2.8}$$
>
> である。

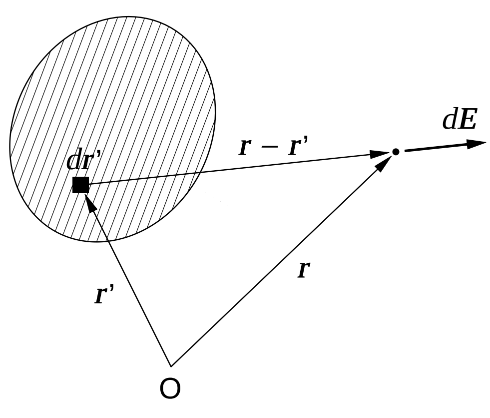

図 2.3:　空間的に分布している電荷がつくる電場

点電荷は Dirac の **デルタ関数**（δ function）を用いて，電荷密度の形で表現することができる。たとえば，上に示した場合のように，複数の点電荷 q_k が位置 $\boldsymbol{r}_k$ にあるとき ($k = 1, 2, \cdots, n$)，電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \sum_{k=1}^{n} q_k \, \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_k) \tag{2.9}$$

と表せる。デルタ関数は

$$\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) = \begin{cases} \infty & \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} \\ 0 & \boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{r} \end{cases} \tag{2.10}$$

となる関数（超関数）である。デルタ関数を含む積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}') \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' = f(\boldsymbol{r}) \tag{2.11}$$

となる。電荷密度 (2.9) を (2.7) に代入し，デルタ関数の性質 (2.11) を用いると，複数の点電荷がつくる電場の式 (2.5) が得られる。

例題 2.2　座標原点を中心とする半径 a の球面上に総量 Q の電荷が一様に分布している。z 軸上の電場を求めよ。

解　z 軸上の点 P における電場を求める。3 次元の極座標を用いる。z 軸の正の向きから測った角度が θ と $\theta + \mathrm{d}\theta$ のあいだにある球面の微小面積は $2\pi a \cdot a \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$ で与えられる。球の表面積は $4\pi a^2$ であるので，微小面積にある微小電荷は

$$\mathrm{d}Q = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot 2\pi a \cdot a \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{Q \sin\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta$$

である。この電荷が点 P につくる電場の大きさは

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{R^2}$$

であり，ここで，R は微小電荷から点 P までの距離である。ただし，対称性より，電場は z 軸方向であり，x 成分と y 成分は 0 である。すなわち，図 2.4 に示すように角 φ をとって，電場の z 成分は次のように表せる。

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}Q}{R^2} \cos\varphi$$

ここで，角 ψ に関する余弦定理 $R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi = a^2$，及び，角 θ に関する余弦定理 $a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta = R^2$ より，それぞれ，

$$\frac{\cos\varphi}{R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Rr} + \frac{r}{R^2} - \frac{a^2}{R^2 r}\right), \qquad \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{R}{ar} \, \mathrm{d}R$$

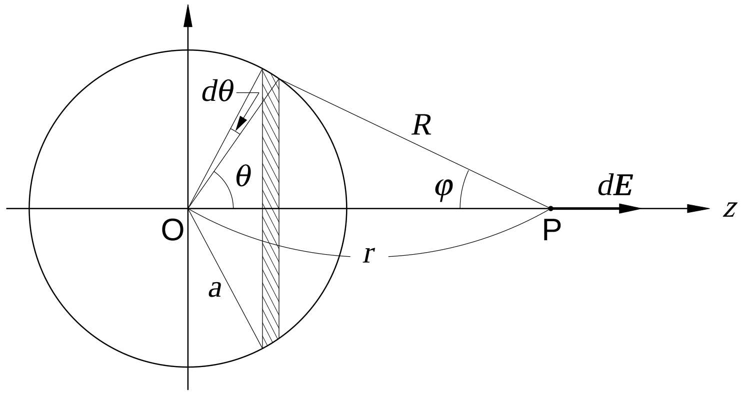

図 2.4:　球面上に一様に分布した電荷がつくる電場

が成り立つ。これらを代入して R に関する積分を実行して電場が求められる。点 P が球の外部にあるとき，及び，点 P が球が内部にあるとき，それぞれ，

$$E_z = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}\int_{r-a}^{r+a}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{r}{R^2}-\frac{a^2}{R^2r^2}\right)\mathrm{d}R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r>a$$

$$E_z = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 a}\int_{a-r}^{r+a}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{r}{R^2}-\frac{a^2}{R^2r^2}\right)\mathrm{d}R = 0 \qquad r<a$$

となる。

2.3　電場に関する Gauss の法則

2.3.1　電束密度

電気力束

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は空間の各点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で大きさと向きをもつベクトル場である：

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

ベクトル場にはフラックス（flux, または流束）と呼ばれる量が定義できる。すなわち，ベクトル場のある領域に曲面を考え，曲面上の点 P に対して，そのまわりの微小面積 $\mathrm{d}S$ をとる。ここで，微小面積に向きを持たせてベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ で表す。ベクトルの向きは点 P における曲面の法線の方向であり，ベクトルの大きさは面積に等しい。従って，点 P における曲面の法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて，$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ と表すこともできる。

点 P における電場 $\boldsymbol{E}$ と微小面積を表すベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ の内積が $\mathrm{d}S$ を通る電場のフラックスである：

$$\text{電場のフラックス} = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

この電場のフラックスを **電気力束**（flux of electric force）と呼ぶ。電気力束の単位は (2.8) より，$\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{C}^{-1}$ である。

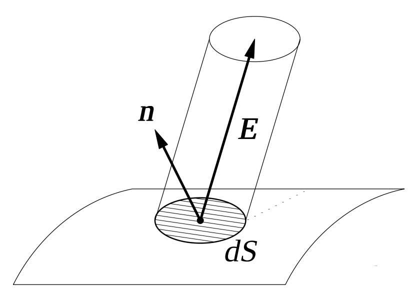

図 2.5:　微小面積を通過する電束

電束，電束密度

ベクトル場として良く知られている例の一つが非圧縮性流体の速度場である。ベクトル場である電場を流体の流れの場にたとえて電場 $\boldsymbol{E}$ を流速とすると，電場のフラックス（電気力束）$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は単位時間に微小面積 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を通過する流体の体積に相当する。しかし，流体力学では，通過する流体の体積よりも，体積に密度をかけた流量のほうが一般的に重要な意味をもつ。そこで，電磁気学でも，電気力束に誘電率 ε_0 をかけた量を用いたほうが有用であると考えられる：

$$\mathrm{d}\psi = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.12}$$

この量を，微小面積 $\mathrm{d}S$ を通過する **電束**（electric flux）と定義する。電束の単位は，真空の誘電率 ε_0 の単位が $\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{N}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2}$，電場の単位が $\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1}$ であるから

$$\text{電束 } \psi \text{ の単位} \ : \ \mathrm{C} \tag{2.13}$$

である。

電束の式に現れる積

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2.14}$$

を真空中の **電束密度**（electric flux density）と呼ぶ。電束密度の単位は

$$\text{電束密度の単位} \ : \ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2} \tag{2.15}$$

である。

電束密度を用いると電束は

$$\mathrm{d}\psi = \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \tag{2.16}$$

と表される。

2.3.2　電場の面積積分

ある曲面を通過する全電束 ψ は曲面を微小な面積 $\mathrm{d}S$ に分割し，各々の微小面積を通る電束 $\mathrm{d}\psi$ を足し合わせて求められる。すなわち，(2.12)，あるいは，(2.16) を曲面全体にわたって積分すればよい：

$$\psi = \varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{2.17}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{D}$) と $\mathrm{d}S$ は曲面上の位置の関数であり，一般的に積分の実行は難しい。しかし，曲面が閉じているとき，閉曲面全体にわたる積分は以下にみるように容易に求められる。

最も簡単な例：点電荷を中心とする球面

座標原点に点電荷 q があるとき，原点を中心とする半径 r の球面を考え，この球面全体にわたる積分 (2.17) を求めてみる。点電荷がつくる電場は点電荷から等方的に放射状であり，半径 r の球面上では，電場は球面に垂直（曲面の法線の向きに一致）である。すなわち，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E\,\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表すことができ，電場の大きさ E は

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

である。ここで，ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，半径 r の球面上の任意の点（位置 $\boldsymbol{r}$）で内側から外側へ向かう向きに単位法線ベクトルに一致する。従って，微小面積を表すベクトルは，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ を用

いて $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ と書ける。よって，微小面積 $\mathrm{d}S$ を通る電束 $\mathrm{d}\psi$ は

$$\mathrm{d}\psi \;=\; \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \;=\; \frac{q}{4\pi r^2}\,\mathrm{d}S \tag{2.18}$$

である（ここで，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$ を用いた）。これを球面全体にわたって積分して，球面を貫く全電束は

$$\psi \;=\; \oint \mathrm{d}\psi \;=\; \frac{q}{4\pi r^2}\oint \mathrm{d}S \;=\; \frac{q}{4\pi r^2}\cdot 4\pi r^2 \;=\; q \tag{2.19}$$

となる。点電荷がつくる電場の大きさが r^{-2} に比例し，球の表面積が r^2 に比例するため，球面を貫く全電束は球面の半径 r に依存せず，点電荷の値 q に等しい。

式 (2.18) は，微小面積 $\mathrm{d}S$ を通る，点電荷 q による電束 $\mathrm{d}\psi$ を与える：

$$\mathrm{d}\psi \;=\; \frac{q}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}S}{r^2}.$$

ここで，右辺の第 2 因子 $\mathrm{d}S/r^2$ は，図 2.6 の左側の図に示すように，点電荷から微小面積 $\mathrm{d}S$ を見込む立体角 $\mathrm{d}\omega$ である。すなわち，(2.18) は立体角を用いて次のように書き直すことができる：

$$\mathrm{d}\psi \;=\; \frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.20}$$

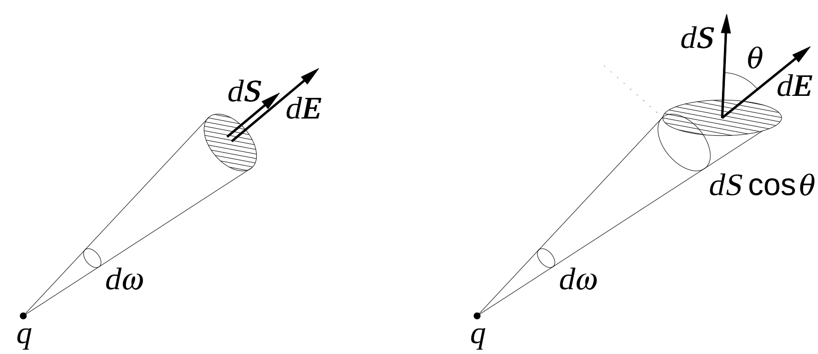

図 2.6:　微小面積を通る点電荷による電束と立体角

点電荷を囲む閉曲面

式 (2.20) は微小面積 $\mathrm{d}S$ が球面上にあることとは無関係に成り立つ。たとえば，図 2.6 の右側の図に示すように，微小面積 $\mathrm{d}S$ が球面上にない場合でも成り立っている。斜線を入れた $\mathrm{d}S$ の法線ベクトルが，点電荷から放射状に広がる電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ と角 θ を成すとき，点電荷から微小面積 $\mathrm{d}S$ を見込む立体角 $\mathrm{d}\omega$ は

$$\mathrm{d}\omega \;=\; \frac{\mathrm{d}S\,\cos\theta}{r^2}$$

である。このとき，$\mathrm{d}S$ を通る電束は（$E \;=\; q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ を代入して）

$$\mathrm{d}\psi \;=\; \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \;=\; \varepsilon_0 E\cos\theta\,\mathrm{d}S \;=\; \frac{q}{4\pi}\,\frac{\mathrm{d}S\,\cos\theta}{r^2}$$

と表すことができ，確かに (2.20) の関係が成り立っている。従って，任意の曲面にわたる電場（電束密度）の面積積分は，立体角についての積分に置き換えられる。点電荷を中に含む閉曲面についての面積積分は (2.20) より，

$$\psi = \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi} \oint \mathrm{d}\omega$$

と書くことができる。全立体角が 4π であることから，点電荷 q を含む任意の閉曲面全体にわたる電場の面積積分は

$$\psi = \frac{q}{4\pi} \oint \mathrm{d}\omega = \frac{q}{4\pi} \cdot 4\pi = q \tag{2.21}$$

となり，球面全体にわたる面積積分の結果 (2.19) に一致する。

点電荷を囲む一般的な閉曲面

複雑な閉曲面の場合でも，閉曲面全体にわたる電場の面積積分の結果は同じになる。点電荷が閉曲面 S の内部にあるとき，点電荷から見込む微小な立体角 $\mathrm{d}\omega$ を考えると，立体角の錐体は閉曲面を奇数回横切る。１回目は閉曲面の内側から外側へ，２回目は閉曲面の外側から内側へ，３回目は内側から外側へ … 。最後の奇数回目には内側から外側へと出ることになる。このとき，立体角 $\mathrm{d}\omega$ が閉曲面から切り取る微小面積を $\mathrm{d}S_1$，$\mathrm{d}S_2$，$\mathrm{d}S_3$，$\cdots$ とする。微小面積の法線ベクトルは閉曲面の内側から外側への向きと約束するので，微小面積を通る電束は，それぞれ

$$\mathrm{d}\psi_1 = \frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega, \quad \mathrm{d}\psi_2 = -\frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega, \quad \mathrm{d}\psi_3 = \frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega, \quad \cdots$$

となる。奇数番目 $(2k-1)$ の電束と偶数番目 $(2k)$ の電束が相殺し（$\mathrm{d}\psi_1 + \mathrm{d}\psi_2 = 0, \cdots$），最後の奇数番目の電束だけが面積積分に寄与する。閉曲面全体にわたる面積積分は

$$\psi = \oint_S \mathrm{d}\psi = \int \frac{q}{4\pi}(\,\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega + \cdots + \mathrm{d}\omega\,) = \int \frac{q}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega = q \tag{2.22}$$

となり，結果は単純な閉曲面の場合に一致する。

点電荷が閉曲面 S の外部にあるときは，点電荷から見込む微小な立体角 $\mathrm{d}\omega$ の錐体は閉曲面を偶数回横切る。奇数回の場合と同様に，奇数番目 $(2k-1)$ の電束と偶数番目 $(2k)$ の電束が相殺するので，結果として，閉曲面全体にわたる積分は

$$\psi = \oint_S \mathrm{d}\psi = \int \frac{q}{4\pi}(\,\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega + \cdots + \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega\,) = 0 \tag{2.23}$$

と，0 になる。

2.3.3　Gauss の法則

ここまでは，１つの点電荷がつくる電場（電束密度）に対する閉曲面についての面積積分を扱ってきた。点電荷が複数ある場合も，重ね合わせの原理により，同様な結論が導ける。

n 個の点電荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ があるとき，全電場 $\boldsymbol{E}$ は，それぞれの点電荷 q_k がつくる電場 $\boldsymbol{E}_k$ の和である。よって，任意の閉曲面 S を通る全電束 ψ も，それぞれの点電荷に起因する

電束 ψ_k の和として求められる：

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{n} \oint_S \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{2.24}$$

電場だけでなく，電束密度についても重ね合わせの原理が成り立つ。点電荷が閉曲面 S の内部にある場合，点電荷による電束 ψ_k は面積積分によって q_k の寄与をする。点電荷が閉曲面 S の外部にあるとき，点電荷による電束の面積積分は 0 となる。従って，(2.24) の値は閉曲面 S の内部にある電荷の総和になる。

電荷が空間的に連続分布している場合には，閉曲面 S の内部の立体 V を微小な体積 $\mathrm{d}V$ に分割して同様に考えればよい。微小体積 $\mathrm{d}V$ の内部にある電荷は，電荷密度 ρ を用いると $\rho\,\mathrm{d}V$ である。複数の点電荷がある場合と同様に，これらの寄与を足し合わせることによって，空間的に分布した電荷による電束密度の面積積分が求められる。閉曲面 S の内部の電荷の総和は V の内部の電荷の総和であり，これは電荷密度の積分で与えられる。

以上の結果は，積分形式の次の法則にまとめられる：

電場に関する Gauss の法則
閉曲面 S 全体にわたる電束密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ の面積積分は閉曲面 S の内部にある電荷の総和に等しく，閉曲面 S の外部にある電荷は寄与しない：

$$\begin{aligned}\psi &= \varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{S\ \text{の内部}} q_k & &\text{（点電荷）} \\ \psi &= \varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V & &\text{（連続分布）}\end{aligned} \tag{2.25}$$

ここで ρ は電荷密度で，右辺の体積積分は閉曲面 S によって囲まれる空間 V の全体積にわたって行う。

この法則は，電荷がつくる電場の大きさが，電荷からの距離の２乗に反比例する（逆二乗則）ことに起因する。すなわち，Coulomb の法則から導かれる，電場の特徴を表す法則である。
この関係式は Maxwell の方程式を構成する４つの方程式の１つである。微分形式は次の節で示す。

Coulomb の法則からは，電場に関するもう一つの重要な関係式が導ける。それについては次講で述べる。

例題 2.3　座標原点を中心とする半径 a の球面上に総量 Q（$Q > 0$）の電荷が一様に分布している。Gauss の法則を用いて電場を求めよ。

解　電荷は座標原点に関して対称に分布しているので，電荷がつくる電場も原点に対して対称である。すなわち，電場は原点から放射状に外向き（$Q < 0$ の場合は内向き）で

あり，その大きさは原点からの距離によって決まる。そこで，図 2.7 に示すように，原点を中心とする半径 r の球面を考えて Gauss の法則を適用する。

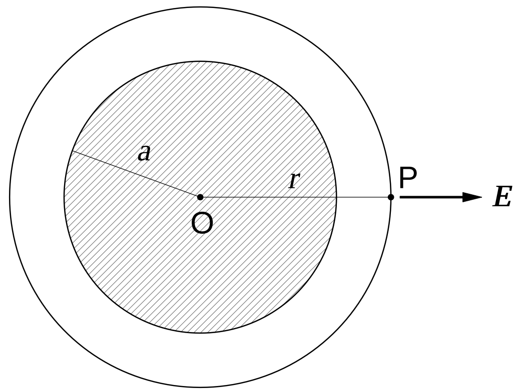

図 2.7:　球面上に一様に分布した電荷がつくる電場

球の外部（$r > a$）にある点 P における電場を考える。電場 $\boldsymbol{E}$ は半径 r の球面に垂直であり，球面上のどこでも微小面積を表すベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ と同じ向きをもつ。また，球面上の点は原点からの距離が等しいので，電場の大きさは球面上のどこでも等しい。従って，球面全体にわたる面積積分は

$$\varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2$$

となる。ここで，E は半径 r の球面上での電場の大きさである。一方，球面の内部にある電荷の総量は Q であるから，Gauss の法則を適用して，

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \text{より} \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

が得られる。

球の内部（$r' < a$）にある点 P$'$ における電場を考える。この球の内部には電荷がないので，Gauss の法則を適用すると

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r'^2 = 0 \qquad \text{より} \qquad E = 0$$

となる。

2.4 Gauss の法則の微分形

2.4.1 微小な閉曲面に対する Gauss の法則

微小な閉曲面 ΔS に対して Gauss の法則を適用すると

$$\oint_{\Delta S} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}S = \int_{\Delta V} \rho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}V \tag{2.26}$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は閉曲面 ΔS の上に外向きにたてた単位法線ベクトルであり，閉曲面上の各点 $\boldsymbol{r}$ で定義される。また，ΔV は微小な閉曲面 ΔS によって囲まれた微小な体積を表す。いま，図 2.8 に示すように，x, y, z 軸方向に長さがそれぞれ Δx，Δy，Δz である直方体の箱を閉曲面 ΔS としてとる。直方体の体積は $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ である。

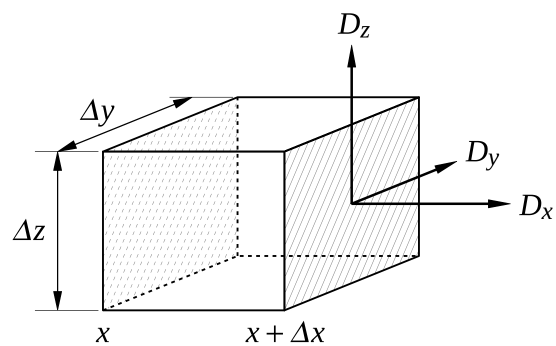

図 2.8: 微小な閉曲面に対する Gauss の法則

(2.26) の左辺の面積積分

まず，電束密度の面積積分のうち，x 軸に垂直な 2 つの面（長方形）上での面積積分を考える。面積はそれぞれ $\Delta y \Delta z$ である。右側の面（x の値が $x + \Delta x$ の面）では，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は x 軸の正の向きである。従って，電束密度の x 成分 $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} = D_x$ だけが積分に寄与し，y 成分（D_y）と z 成分（D_z）は寄与しない。直方体の左側の面（x の値が x の面）では，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は x 軸の負の向きである。従って，電束密度の x 成分だけが寄与するが，$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} = -D_x$ である。x 軸に垂直な 2 つの面を合わせて，

$$\begin{aligned}\int_x \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S &= D_x(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - D_x(x, y, z)\Delta y \Delta z \\ &= \frac{D_x(x + \Delta x, y, z) - D_x(x, y, z)}{\Delta x}\, \Delta V\end{aligned}$$

と書ける。ここで，$\Delta x / \Delta x = 1$，及び，$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \Delta V$ を用いた。

y 軸に垂直な面と z 軸に垂直な面についても同様な計算をして，3 つを加えて，電束密度の面積積分は次のように表せる：

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta S} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = &\left[\frac{D_x(x + \Delta x, y, z) - D_x(x, y, z)}{\Delta x} + \frac{D_y(x, y + \Delta y, z) - D_y(x, y, z)}{\Delta y}\right. \\ &\left. + \frac{D_z(x, y, z + \Delta z) - D_z(x, y, z)}{\Delta z}\right] \Delta V.\end{aligned}$$

ここで，両辺を ΔV で割り，Δx, Δy, $\Delta z \to 0$ の極限（従って，$\Delta V \to 0$）をとる。右辺の第 1 項は

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{D_x(x+\Delta x, y, z) - D_x(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

となる。同様に，第 2 項，第 3 項について計算して，

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\Delta S} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}{\Delta V} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{2.27}$$

が得られる。

発散

一般に，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して，微小な閉曲面 ΔS で囲まれた微小体積 ΔV を点 $\boldsymbol{r}$ に収縮させたとき，

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}{\Delta V} \tag{2.28}$$

の右辺が，ΔV 収縮の方法のいかんにかかわらず一定の極限値に収束する場合，この演算をベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散といい，$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}$ または $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ と書く。上の発散の定義は座標系によらない。直角座標系で表した発散は

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.29}$$

となる。

(2.27) の右辺は (2.29) から明らかなように，電束密度の発散を表す。すなわち，(2.26) の左辺にある面積積分は

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\Delta S} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S}{\Delta V} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{D} \tag{2.30}$$

と表せる。

(2.26) の右辺の体積積分

(2.26) の右辺にある体積積分は微小体積 ΔV の中に存在する電荷の総量を表す。これを ΔV で割って $\Delta V \to 0$ の極限をとる。このとき，Δx, Δy, $\Delta z \to 0$ である。$\boldsymbol{r} = (\,x,\, y,\, z\,)$ として，$\Delta V \to 0$ の極限

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\Delta V} \rho(\boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}V'}{\Delta V} = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.31}$$

は位置 $\boldsymbol{r}$ における電荷密度である。

(2.26) の左辺にある面積積分から得られた式 (2.30)，及び，右辺にある体積積分から得られた式 (2.31) より，電束密度が $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ であることに注意して，Gauss の法則を微分形式で表した次の関係式が得られる：

Gauss の法則の微分形

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.32}$$

源の強さ

発散は全束（電束密度の場合は全電束）の体積密度で，微分可能なベクトル場（電束密度）に対して行うことができる。源（電荷）を囲むどの閉曲面においても全束の値が同じであるような場合には，これを源の強さと考えて良い。このようなベクトル場は，逆 2 乗則に従う場である。実際，点電荷がつくる電束密度の大きさは，点電荷からの距離の 2 乗に反比例する。

2.4.2 Gauss の定理

Gauss の定理

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が微分可能であり，発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ が定義できるとき，領域 V を囲む閉曲面 S に対して

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V \tag{2.33}$$

が成立する。

これは **面積積分を体積積分に変換する数学の重要な定理**である。Gauss の発散定理とも呼ぶ。

式 (2.28) が微小な閉じた領域に対して成り立つ関係であるのに対して，Gauss の定理は有限な領域に対する関係式である。

いま，互いに隣り合った微小な領域を考え，その体積をそれぞれ ΔV_1, ΔV_2，それを囲む閉曲面を ΔS_1, ΔS_2 とする。また，$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ を囲む閉曲面を ΔS とする。二つの微小領域に関する発散の定義式 (2.28)

$$\int_{\Delta S_1} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S_1 \approx (\operatorname{div} \boldsymbol{A})_1 \Delta V_1 \,, \qquad \int_{\Delta S_2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S_2 \approx (\operatorname{div} \boldsymbol{A})_2 \Delta V_2$$

を辺々加える。ΔV_1 と ΔV_2 が接する面は，面積が等しく法線の向きが逆であるので面積分は打ち消し合い，結果として ΔV を囲む ΔS の面積分だけが残る：

$$\int_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \approx (\operatorname{div} \boldsymbol{A})_1 \Delta V_1 + (\operatorname{div} \boldsymbol{A})_2 \Delta V_2$$

有限な体積 V を持つ領域の場合，V を n 個の微小部分 ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n に分割し，上の操作を繰り返すと，Gauss の法則が得られる：

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta S_i} \boldsymbol{A}_i \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{div} \boldsymbol{A})_i \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}V. \tag{2.34}$$