第 1 講　　序論

1.1　電磁相互作用

1.1.1　４種類の基本的相互作用

自然界には４種類の基本的な相互作用がある。相互作用の強い方から順に,

- 強い相互作用　(strong interaction)
- 電磁相互作用　(electromagnetic interaction)
- 弱い相互作用　(weak interaction)
- 重力相互作用　(gravitational interaction)

と呼ばれる。

• **強い相互作用**：原子の中心にある原子核において，陽子や中性子を互いに結合させている相互作用で，４種類の中では最も強い。正電荷をもつ陽子を，互いに反発しあう電気的な力に抗して，原子核という小さな空間に閉じ込めているのが強い相互作用である。しかし，力の及ぶ距離が短い（10^{-15} m 程度）ので，原子核の外（原子・分子のスケール）に強い相互作用の効果が現れることはない。

• **弱い相互作用**：到達距離が強い相互作用より更に短く，日常的な現象に現れることはほとんどない。比較的身近な現象としては，宇宙線が大気に入射してできる空気シャワーや，放射性同位元素の崩壊などである。

• **重力相互作用**：他の３種類の相互作用と比較すると極めて弱い相互作用であり，我々の身近な世界では無視できる大きさでしかない。しかし，到達距離は無限大であるので，質量の大きい天体の運動では支配的な相互作用であり，古くから良く知られた相互作用であると言える。

• **電磁相互作用**：重力と同様に無限遠方まで力を及ぼす相互作用であり，また，相互作用の強さも比較的強いので，我々が目にする身近な現象の多くは電磁相互作用によって支配されている。その多くは，電子や原子核（の中の陽子）がもつ電荷（electric charge）と磁気モーメント（magnetic moment）のあいだに作用する電気的な力と磁気的な力によるものである。原子や分子，また，生命の細胞のレベルにおいても，電磁相互作用が支配的であり，物質の物理的性質・化学的性質を決定している相互作用である。

1.1.2　電荷

電荷の保存

我々の身の回りの物質は原子や分子で構成され，原子は中心に原子核があり，そのまわりに電子がある。電子は負の電荷をもち，原子核の中の陽子が正の電荷をもつ（原子核の中の中性子は名前の通り電荷をもたない中性な粒子である）。物質は通常，ミクロなレベルで見ると電子の負電荷と陽子の正電荷に偏りがある場合でも，平均的には正負の電荷が完全に等量あり，電気的に中性である。しかし，たとえば，異なる物質からなる２つの物体を摩擦しあうと，一方から他方へ電子が移動し，物体を離した後も移動した電子がそのまま留まることがある。この場合でも，符号を含めた電荷の和は，摩擦する前と後で変化はない。摩擦する前に２つの物体が電気的に中性であれば，摩擦した後に一方の物体に残る負電荷の大きさ（絶対値）は，他方の物体に残る正電荷に等しい。一般に，電荷が生成されたり消滅することはなく，孤立した系では電荷の総和は一定である。

電荷の正負

電荷には２種類あって，同種の電荷は互いに反発しあい，異種の電荷は互いに引き合う。２種類の電荷のどちらを「正」の電荷と呼ぶのかは本質的ではなく，異なる２種類の電荷があることが絶対的な意味をもつ。すなわち，２種類の電荷を便宜上「正」の電荷,「負」の電荷と呼んで区別しているのである。琥珀を毛皮でこすったときに両者は帯電するが，毛皮が得た過剰な電荷を「プラス」，琥珀が得た電荷を「マイナス」としたのは，雷が電気現象であることを確認した Flanklin であるといわれる。現在では電子が移動することによって帯電することが知られており，負の電荷をもった電子を得た場合に負（マイナス）に帯電し，電子を失った場合に正（プラス）に帯電する。

素電荷

電子と陽子がもつ電荷の大きさは等しく，符号が異なる。その大きさを，電荷の最小単位という意味で，電気素量，または素電荷（elementary electric charge）と呼ぶ：

$$e = 1.602\ 176\ 53(14) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

ここで，C は電荷の単位 Coulomb（クーロン）である。物体がもつ電荷は，常に素電荷の整数倍である。なぜ電荷が正確に素電荷の整数倍であるのかは現在でも未解決の問題である。なお，陽子や中性子を構成するクォーク（quark）は $\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ の電荷をもつが，クォークが単独で存在することはなく（宇宙初期においては，単独で存在していたと考えられている），クォークが集まってできている粒子の電荷は常に素電荷の整数倍である。

電荷は，電子やクォークなどの素粒子に固有な量であり，素粒子を離れては存在しない。しかし，古典電磁気学においては，電荷をあたかも物体（素粒子）から離れた実体のように扱う。また，電荷は素電荷の整数倍でしか存在しないが，電荷の値として連続的にどのような値でも取ることができるとし，連続的に分布した電荷を扱うこともある。

1.1.3　場と近接作用

電気の場，磁気の場

２つの電荷のあいだには，２つの電荷を隔てる距離の２乗に反比例する電気的な力がはたらき，これは数学的に Coulomb の法則として表現される。しかし，この電気的な力を異なる視点から見ることができる。すなわち，一方の電荷が電場を作り，その中に置かれた他方の電荷が電場から力を受けるという考え方である。どちらの考え方によっても，電荷に作用する力は同じであるが，両者の考え方のあいだには大きな違いがある。後者の考え方によれば，２番目の電荷のあるなしに係わらず，１番目の電荷によって，その周りの空間に電場という「場」がつくられているのである。

Coulomb 力は静止している２つの電荷のあいだにはたらく力であるので，Coulomb の法則は運動している電荷には厳密には適用できない。電荷が運動しているとき，電場から受ける力とは別に，磁気的な力の作用を受ける。たとえば，電荷が運動して電流が生じ，その近くを運動する電荷は磁気的な力を受ける。これを電荷が電流から受ける力と見ることもできるが，電流の周りの空間に磁場が作られ，その磁場から運動する電荷が力を受けるとも考えられる。後者が，近くを運動する電荷の有無に係わらず，電流の周りに磁場という「場」がつくられているという考え方である。

電場と磁場は単に電気的な力と磁気的な力を考える上での便宜的なものではなく，物理的な実体であると考えられる。電荷が電場から受ける電気的な力と磁場から受ける磁気的な力を合わせて Lorentz 力と呼び，

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1.1}$$

で表される。ここで，q は電荷，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は電場と磁束密度，$\boldsymbol{v}$ は電荷の速度である（$\times$ はベクトル積を表す記号）。第１項が電気的な力であり，第２項が磁気的な力である。

相対性理論と矛盾のない電磁気学

磁気的な力を表す (1.1) の第２項は電荷の速度 $\boldsymbol{v}$ に依存する。しかも，電荷の速度は座標系の取り方によって変わる。従って，磁気的な力は座標系の取り方に依存する。特に，電荷が静止している座標系，すなわち，電荷とともに動く座標系を選べば，磁気的な力ははたらかない。このことは，磁気的な力が相対論的効果であることを示している。

Einstein は 1905 年,「運動物体の電磁気学について」というタイトルの論文を発表し，今日，特殊相対性理論と呼ばれる仮説を提唱した。この論文の序の部分で，座標系の取り方によって電磁気現象の解釈に違いが生じることを指摘している。

たとえば，図 1.1 に示すような，円環状の導体と棒磁石からなる系を考える。左図にあるように，導体を固定して磁石を速さ V で導体に近づける。このとき，磁極のまわりに電場が生じ，その電場を受けて導体に電流が流れる。すなわち，円環が動かない座標系では，(1.1) の第１項の電場から導体内の電子が力を受けて電流が流れる。一方，右図にあるように，磁石を固定して導体を速さ V で磁石に近づける。このときは，磁石は動かないので磁極のまわりに電場は発生しない。しかし，磁石がつくる磁場の中を導体内の電子が運動するので，静止していない電子は磁場から力を受けて，結果として円環に沿って電流が流れる。すなわち，磁石が動かない座標系では，(1.1) の第２項によって円環導体に電流が流れる。

左図と右図では電流を流す力の源の解釈は明確に異なる。それにも係わらず，流れる電流の向きと大きさは同じであり，円環導体と棒磁石の相対的な速度のみによって定まる。従って，円環が静止した座標系でも，棒磁石が静止した座標系でも，電磁場の法則は同じ形に表現されるべきであると考えられる。

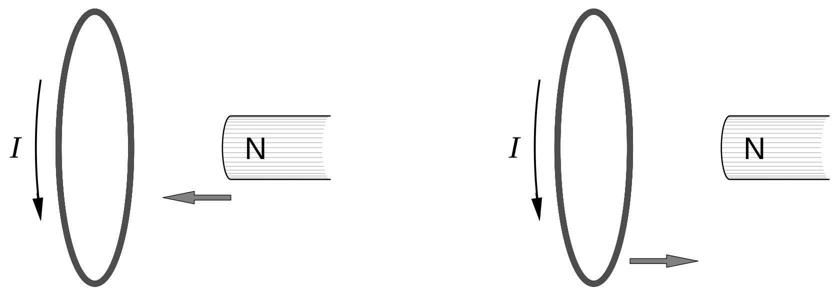

図 1.1: 電気的力と磁気的力。左：棒磁石が動く場合，右：円環導体が動く場合

Einstein は，このような考察から,「物理法則は全ての慣性系に対して同じ形で表される（特殊相対性原理)」ことを要請した。これに加えて,「全ての慣性系に対して光が真空中を伝播する速さは一定である」ことを要請して,（特殊）相対性理論を構築した。Einstein の相対性理論によれば，電気的な力と磁気的な力を合わせたものが不変であり，座標系を指定すると電気的な部分と磁気的な部分が分離できる。言い換えると，新しい座標系を取ったとき，前の座標系で電気的な力であったものの一部が磁気的な力になり，磁気的な力であったものの一部が電気的な力になる。このように，電磁気学は Einstein によって相対性理論が提唱される以前に完成したにも係わらず，相対性理論と全く矛盾しない理論になっている。電場と磁場は，何ら修正することなく，相対性理論の枠組みに取り入れることができたのである。

近接作用と遠隔作用

Newton の万有引力の法則（Newton 力学）は遠隔作用に基づいている。すなわち，万有引力は２つの物体のあいだにはたらく力である。空間は２つの物体を隔てる単なる空間でしかない。また，ある時刻に２つの物体がどの位置にあるかを指定するだけで，その時刻における万有引力は決定される。これは，万有引力が質量のあいだに直接作用するという考え，言い換えると，力の作用が瞬時に一方の物体から他方の物体に伝わることを意味する。同様に，Newton 力学の基礎を成す Galilei 変換において，時間は座標系に依存することなく全く同じに進行するとしている（絶対時間)。

電磁気学においては，２つの電荷のあいだにはたらく電気的な力を表す Coulomb の法則や，２つの電流のあいだにはたらく磁気的な力は遠隔作用の考え方に基づいた法則と言える。しかし，電荷や電流がその周りに電場や磁場をつくるという考え方は，遠隔作用とは異なる立場に基づいている。電荷は，電場や磁場がある空間から電気的な力や磁気的な力を受けると考えるもので，遠隔作用（あるいは，直達説）に対して，近接作用（あるいは，媒達説）と呼ばれる。この考え方は Faraday によって採用された。力の作用は瞬時に伝わるのではなく，有限の速さで伝わる。この考えは，Newton 力学が仮定する絶対時間の考えに矛盾し，空間と時間が互いに関連する相対性理論に合致したものである。

近接作用と遠隔作用は，上の考え方の比較からもわかるように，時間的に変化しない定常的な状況では同じ結果を与える。たとえば，電荷が静止している場合や，定常的に電流が流れている場合などがこれに相当する。従って，静電場や定常電流がつくる磁場を議論する場合には，遠隔作用を近接作用から区別する必要はない。むしろ，遠隔作用の方が扱いが簡単でわかり易いとも言える。しかし，電荷の位置や分布，あるいは，電流が時間とともに変化する場合には，電荷のあいだに作用する力，電流のあいだに作用する力という考え方だけでは，電磁気現象を完全に記述することはできない。近接作用に基づいた記述が必要になる。

重ね合わせの原理

簡単な例として，３つの電荷があるとする。１番目の電荷は２番目と３番目の電荷から電気的な力を受ける。場の考え方によれば，２番目と３番目の電荷がつくる電場から，１番目の電荷は力を受ける。ところで,「２番目と３番目の電荷がつくる電場」というのは，２番目の電荷がつくる電場 $\boldsymbol{E}_2$ と３番目の電荷がつくる電場 $\boldsymbol{E}_3$ の単純な和 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$ であるのか，それとも，それとは異なる電場 $\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$ であるのか。前者は，３番目の電荷の有無に係わらずに２番目の電荷による電場が決まるとするものであり，後者は，２つの電荷があることによって電場 $\boldsymbol{E}$ が定まるとするものである。現実は前者であり，個々の電荷がつくる電場をベクトルとして足し合わせればよい。これは電場だけでなく，磁場についても成り立ち，**重ね合わせの原理（principle of superposition）**と呼ばれる。電磁相互作用の基本的な性質は４つの偏微分方程式から成る Maxwell 方程式によって表されるが，これらの方程式は電場や磁場について線形な方程式として表現される。

重ね合わせの原理により，１つの電荷，あるいは，１つの電流などについての法則がわかれば，複数個の電荷や電流，また，空間的に分布した電荷密度や電流密度の場合にも，電場や磁場を求めることができる。

重ね合わせの原理は，力学における力の合成（ベクトル和），波動現象における波の重ね合わせなど，線形現象に一般的にひろく見られる。ただし，重ね合わせの原理は自明なものではなく，実験によって確認するべきものである。電場や磁場について，真空中では高い精度で成り立つことが検証されているが，物質中においては近似的に成り立つにすぎないことがわかっている。

1.2　Maxwell の方程式

全ての電磁気現象は Maxwell の方程式によって理論的に説明される。Maxwell は電気と磁気に関する多くの実験事実の中から，次の３つを最も基本的な法則として捕らえ

- 電荷のあいだにはたらく力を記述する Coulomb の法則（1785 年）
- 電流の磁気作用に関する Ampère の法則（1820 年）
- Faraday の電磁誘導に関する法則（1831 年）

さらに，変位電流の考えを導入して Ampère の法則を拡張し（1861 年），これらをまとめて４つの偏微分方程式に表した（1865 年）。

次ページに，電磁気学に関する重要な事項を年代順に示す。電磁気現象の多くは１８世紀から１９世紀にかけて解明されてきたが，Volta による電池（２種類の金属に湿った布を組み合わせた電池）の発明（1799 年）によって安定な電源を供給できるようになり，特に電流が関与する現象を解明する研究が急速に発展した。

電磁波の予言と電磁波の伝播速度

Maxwell は，偏微分方程式を組み合わせると電場と磁場に関する波動方程式が導かれることを示した。波動方程式の解は電場と磁場の時間的な変動が伝播する波動である。すなわち，Maxwell の方程式は電磁波の存在を予言していた。真空中の電磁波の速度は，定数である真空の誘電率と透磁率によって決定される。この電磁波の理論的伝播速度が，実験的に得られていた光の速度（光速）と一致していたことから，光も電磁波の一種であると予言した。

ところが，電磁波の理論的伝播速度が大きな問題になった。一つの問題は，Newton 力学における速度の和則に反することである。たとえば，空気中を伝播する音波は，空気を媒質として圧力が伝わる波動であり，媒質である空気が移動していると音の伝播速度も変化する。さらに，電磁波の媒質は何なのかという問題である。そのために電磁波の伝播媒質としてエーテルが想定され，エーテルの存在を検証しようとする実験（Michelson-Morley の実験）が行われた（1887 年）。彼らは地球の自転する速度を利用して，地球の進行方向に伝播する光の速度と，その直角方向に伝播する光の速度を比較して，光の速度に差が無い事を確認した。すなわち，電磁波の媒体として想定されたエーテルは存在せず，Maxwell の理論が予言するように光速は一定であることが確認された。このようにして，Einstein の相対性理論の誕生（1905 年）へと進展していく。Maxwell の電磁場の理論は，Newton 力学ではなく，Einstein の相対性理論と整合した理論である。

Maxwell によって予言された電磁波の存在を実験的に検証したのは Hertz であり（1888 年），彼は放電によって電磁波を発生させ，離れた場所のコイルの両端を狭くしておくと火花が発生して電磁波が伝わることを確認した。

電磁気学の発展における重要な事項

1746　P. van Masschenbroeke　静電気を蓄えるライデン瓶を発明

1752　B. Franklin　雷が電気現象であることを確認

1773　H. Cavendish　電気力が距離の逆二乗則に従うことを発見

1780　L. Galvani　生体電気を発見：メスでカエルの神経を刺激すると筋肉が痙攣することを発見

1785　C.A. de Coulomb　**Coulomb の法則** を発見：精密なねじりばかりを発明し，電気力を正確に測定

1799　A. Volta　電池を発明

1820　H.C. Oersted　電流による磁力を発見，電流と磁気の相互作用を突き止めた

A.M. Ampère　**Ampère の法則**：平行電流間の力を解析し，電気と磁気に関する理論を確立

J.B. Biot, F. Savart　Biot-Savart の法則：電流による磁場の正確な計算式を完成

1826　G.S. Ohm　Ohm の法則を発表

1829　J. Henry　電磁石の発見：コイルの中に大きな磁力が発生することを発見

1831　M. Faraday　**電磁誘導の法則**：磁石とコイルの相対運動によって電流が誘導される電気と磁気の相互変換を実証

1833　M. Faraday　電気分解の法則：電気分解の作用は電気の一定量に対し常に一定

1840　J.P. Joule　電流の熱作用を発見：発生熱量は電流の 2 乗と抵抗に比例

1845　M. Faraday　Faraday 効果（磁気と光の相互作用）を発見：ガラス管を磁場の中に置き光を通すと偏光面が回転することを発見

1860　J.C. Maxwell　場の考え方を導入し，電磁誘導を場の理論として定式化

G.R. Kirchhoff　Kirchhoff の法則：電気回路の計算方法を確立

1861　J.C. Maxwell　**変位電流**の考え方を導入

1865　J.C. Maxwell　**Maxwell の方程式**を発表，電磁波を予言

1887　A.A. Michielson, E.W. Morley　光速度不変の測定

1888　H. Hertz　電磁波の発生

1892　H.A. Lorentz　Lorentz 変換

1905　A. Einstein　特殊相対性理論を発表

1909　R. Millikan　電気素量を正確に測定

Maxwell の方程式

全ての電磁気現象を理論的に説明する Maxwell の方程式は次の４つの方程式からなる。４つの方程式のそれぞれに積分形式と微分形式があり，それを左側と右側に記す。

(1)　電束密度（電場）に関する Gauss の法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho \tag{1.2}$$

(2)　拡張された Ampère の法則

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.3}$$

(3)　磁束密度に関する Gauss の法則

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

(4)　Faraday の法則

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.5}$$

- (1.2) と (1.3) は，電荷（ρ は電荷密度）や電流（$\boldsymbol{j}$ は電流密度）といった物質の担う量と電磁場との関係を表す：

(1)　電場の源が電荷であることを表す。電場は電荷から放射状に出る。

(2)　電流，及び電場の変化が磁場を生むことを表す。電場の変化（変位電流）によっても磁場が発生することを Maxwell が付加えたので，Ampère の法則は Ampère-Maxwell の法則とも呼ばれる。

- (1.4) と (1.5) は電場と磁場の関係を表す：

(3)　磁場には源がないことを表す。電荷に相当する磁荷（単磁極，あるいはモノポール）というものはなく，磁場はループ状になっている。

(4)　磁場の時間変化が電場を生じること，すなわち，電磁誘導を表す。

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ は電場と電束密度，$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ は磁場と磁束密度を表す。真空中では，それらのあいだに簡単な関係が成り立つ：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}. \tag{1.6}$$

ε_0 と μ_0 は真空の誘電率と透磁率と呼ばれる定数である。物質中では，次の関係式が近似的に成り立つ：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H} \qquad \boldsymbol{j} = \sigma\,\boldsymbol{E}. \tag{1.7}$$

ε，μ，及び σ は物質に固有の定数である。

1.3　ベクトル

一つの数（大きさ）で表される量をスカラーという。質量，面積，温度などはスカラーの例である。力や速度，電場や磁場などは大きさのほかに方向を持つ量であるので，ベクトルで表すのが便利である。ベクトルは向きを持った線分で表されることが多いが，向きを持った線分そのものがベクトルではなく，その図的表示の一つである。このように表すと，ベクトルの特性や演算などが理解しやすいからである。ベクトルとは３個の実数の組で表される量である。

ベクトルとその表現

ベクトルの成分

直角座標系（cartesian coordinates, Descartes' coordinates）で，原点 O から線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{A}$ を引いたとき，終点 P の座標 A_x, A_y, A_z を，直角座標系で表したベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分という。この３個の実数の組によって，ベクトルを次のように表すことができる（左側を行ベクトル，右側を列ベクトルと呼ぶ）：

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

ベクトルの大きさ

ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の大きさを $|\,\boldsymbol{A}\,|$，あるいは A と書き，成分では次の式で与えられる：

$$|\,\boldsymbol{A}\,| = A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}. \tag{1.9}$$

方向余弦

ベクトルの成分 A_x，A_y，A_z とベクトルの大きさ $A = |\,\boldsymbol{A}\,|$ の比は，線分 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸，y 軸，z 軸とのなす角 θ_x，θ_y，θ_z の余弦を表し，方向余弦と呼ばれる：

$$l = \cos\theta_x = \frac{A_x}{A}, \qquad m = \cos\theta_y = \frac{A_y}{A}, \qquad n = \cos\theta_z = \frac{A_z}{A}. \tag{1.10}$$

３つの方向余弦の間には

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{1.11}$$

の関係があるので，いずれかの２つを定めれば符号を除いて残りの１つが定まる。成分の代わりに，ベクトルの大きさと２個の方向余弦でベクトルを表すことができる。

単位ベクトル

大きさが１であるベクトルを単位ベクトルという。曲線・曲面の法線や接線の向きを表すのに，法線単位ベクトルや接線単位ベクトルが用いられる。

基本ベクトル

直角座標系で，座標軸の正の向きを向く単位ベクトルを，この系の基本ベクトルと呼ぶ。基本

ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ と書く：

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

任意のベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ は，成分と基本ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{1.13}$$

と表すことができる。

ベクトルの積

スカラーとベクトルの積

スカラー a とベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ の積は，次のベクトル $\boldsymbol{B}$ を得る演算である：

$$\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} aA_x \\ aA_y \\ aA_z \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を，向きを持った線分 $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{B}$ の長さは $\boldsymbol{A}$ の長さの $|\,a\,|$ 倍で，向きは $a > 0$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向き，$a < 0$ のときは逆向きである。

内積（スカラー積）

内積は，２つのベクトルから１つのスカラーを得る演算である。２つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の内積を $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ と書き，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.15}$$

で与えられる。ここで，θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が成す角である。内積は２つのベクトルに対して交換可能である：$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$。また，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が直交するとき，内積は $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ となる。

３つの基本ベクトルは互いに直交するので，内積に対して次の関係式が成り立つ：

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0. \tag{1.16}$$

ベクトル積（外積）

ベクトル積は，２つのベクトル（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$）から１つのベクトル（$\boldsymbol{C}$）を得る演算であり，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ と書く。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が成す角を θ としたとき，ベクトル $\boldsymbol{C}$ の大きさは

$$C = |\,\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\,| = AB\sin\theta \tag{1.17}$$

で与えられ，方向は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直である。$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ へ $\theta \leq \pi$ になるように回るとき，右ねじの進む向きをベクトル $\boldsymbol{C}$ の正の向きとする（このような約束を右手系という）。ベクトル積を成分で表せば，

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.18}$$

となる。最右辺は３行３列の行列式である。行列式の隣り合う２つの行を入れ替えると符号が変わることからもわかるように，ベクトル積の順序を変えると負号がつく（可換ではない）：

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.19}$$

互いに直交する３つの基本ベクトルのベクトル積は

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{1.21}$$

となる。

スカラー三重積

スカラー三重積は３つのベクトルからつくられるスカラーで

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

と書ける。スカラー三重積には次の性質がある。

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{1.24}$$

スカラー三重積の絶対値は，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ を互いに平行でない３辺とする平行六面体の体積となる。

ベクトル三重積

ベクトル三重積は３つのベクトルからつくられるベクトル $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ で次のように内積を用いて表すことができる：

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}. \tag{1.25}$$

式 (1.25) において，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{n}$ とおくと（$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトル）

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{n}) \tag{1.26}$$

が得られる。これは，任意のベクトル $\boldsymbol{B}$ を単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向（第１項）とそれに垂直な方向（第２項）とに分解するときに用いられる公式である。

1.4　微分演算子

スカラー関数の微分

はじめに，２変数の関数 $f(x,y)$ を考える。ここで，x と y は２つの独立変数で，これらの値を指定したとき，１つの値 $f(x,y)$ が定まる関数をスカラー関数という。

偏導関数

２個の独立変数 x,y のうちの１個，たとえば y を固定して，x だけを変化させたときの関数 $f(x,y)$ の変化率は

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \tag{1.27}$$

と表され，これを関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数という。y に関する偏導関数も同様に定義できる：

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}. \tag{1.28}$$

微分の操作を繰り返せば，２階以上の偏導関数も同じように定義できる。たとえば，式 (1.27) で定義した１階の偏微分を $f_x(x,y)$ と表せば，これの y に関する偏導関数は

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x,y+\Delta y)-f_x(x,y)}{\Delta y} \tag{1.29}$$

で求められる。このような関数が存在して，連続であるとき，微分の順序を入れ替えた

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} \tag{1.30}$$

が成り立つ。

全微分

偏微分が１個の独立変数を変えて他の独立変数を固定したときの関数の変化を表すのに対して，次に示す関数の変化を，関数 $f(x,y)$ の全微分という：

$$\mathrm{d}f(x,y) = f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y). \tag{1.31}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x,y) &= \left[\frac{f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y+\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x \\ &\quad+\left[\frac{f(x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)}{\mathrm{d}y}\right]\mathrm{d}y \\ &= \frac{\partial f(x,y+\mathrm{d}y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{1.32}$$

と書き直すことができ，さらに，２次以上の微小量は無視できて，全微分は次のように表せる：

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{1.33}$$

独立変数が３個の場合も同様にして，３変数関数 $f(x, y, z)$ の全微分は

$$\mathrm{d}f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{1.34}$$

と表される。

微分演算子と勾配，発散，回転

微分演算子 Nabla $\boldsymbol{\nabla}$

式 (1.34) の偏微分の操作は形式的にベクトルの３つの成分とみなすことができる：

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

ここで，記号 $\boldsymbol{\nabla}$ はナブラ（nabla）と読む。

３個の独立変数をベクトルとして $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$，その微少量もベクトルとして $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z)$ と表すと，式 (1.34) の全微分は

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.36}$$

と書くことができる。

勾配（gradient）

スカラー関数 $f(x, y, z)$ に微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させると次のベクトルが得られる：

$$\mathrm{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

これを，スカラー関数 f の勾配と呼ぶ。勾配は３成分からなるベクトル関数である。

発散（divergence）

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ と微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ から得られるスカラー関数

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.38}$$

をベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ の発散と呼ぶ。$\boldsymbol{\nabla}$ は通常のベクトルではないが，上の式の右辺は形式的に $\boldsymbol{\nabla}$ と $\boldsymbol{A}$ の内積の形をしている。そこで，発散を $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ と表す。
$\boldsymbol{\nabla}$ は微分演算子であるので，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ は全く意味が異なる。後者は $\boldsymbol{\nabla}$ の右側に微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ が作用する関数があるときに初めて意味をもつ。

回転（rotation）

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ と微分演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ から得られるベクトル関数

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{1.39}$$

をベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転と呼ぶ。発散の場合と同様に，回転は形式的に $\boldsymbol{\nabla}$ と $\boldsymbol{A}$ のベクトル積の形をしているので，回転を $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と表す。$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla}$ の意味が異なるのも，発散の場合と同様である。

勾配の回転

スカラー関数 $f(x,y,z)$ の勾配はベクトル関数であり，その回転を考えることができる。$f(x,y,z)$ の 2 階偏導関数が存在して連続であるとき，次の恒等式が成り立つ：

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

ここで，２階偏導関数が存在して連続であるとき，偏微分の順序が交換できることを用いた。勾配の回転は正しくはベクトルであるが，単に $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=0$ と書くことが多い。

この恒等式から，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$ を満たすベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ はスカラー関数の勾配 $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,f$ と表せることがわかる：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\,f=\boldsymbol{\nabla}f. \tag{1.41}$$

回転の発散

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の回転はベクトル関数であり，その発散を考えることができる。$\boldsymbol{A}(x,y,z)$ の 3 成分に対して 2 階偏導関数が存在して連続であるとき，次の恒等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0.\end{aligned} \tag{1.42}$$

ここでも，微分の順序の可換性を用いた。この恒等式から，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$ を満たすベクトル関数 $\boldsymbol{B}$ は別のベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表せることがわかる：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}. \tag{1.43}$$

1.5　国際単位

電磁気学では，従来，cgs esu，cgs emu，Gauss 単位系，MKSA 有理単位系など，さまざまな単位系が用いられてきたが，最近では **国際単位（SI 単位：Systeme International d'Unites）** に統一されつつある。国際単位は，従来用いられてきた MKSA 単位系とほぼ一致している。**国際単位は，４種の基本量を含む７個の基本単位と，２個の補助単位から構成される。**また，基本単位から，物理学の法則，定義に基づく乗除のみで導かれる **組立単位** がある。

基本単位

時間　秒（second, s）　^{133}Cs 原子の基底状態の２つの超微細準位の間の遷移に対応する放射の 9 192 631 770 周期の継続時間.

長さ　メートル（metre, m）　光が真空中で 1 / (299 792 458) s の間に進む距離.

質量　キログラム（kilogram, kg）　国際キログラム原器の質量

電流　アンペア（ampere, A）　真空中に 1 m の間隔で平行に置かれた，無限に小さい円形断面積を有する，無限に長い２本の直線状導体のそれぞれを流れ，これらの導体の長さ 1 m ごとに 2×10^{-7} N の力を及ぼし合う一定の電流.

温度　ケルビン（kelvin, K）　水の三重点の熱力学温度の 1/273.16. 温度間隔にも同じ単位を使う.

物質量　モル（mole, mol）　0.012 kg の ^{12}C に含まれる原子と等しい数（注：アボガドロ数）の構成要素を含む物質量. モルを使用するときは，構成要素（原子，分子，イオン，電子など）を指定しなければならない.

光度　カンデラ（candela, cd）　周波数 540×10^{12} Hz の単色放射を放出し所定の方向の放射強度が 1/683 $\mathrm{W \cdot sr^{-1}}$ である光源の，その方向における光度.

補助単位

平面角　ラジアン（radian, rad）　円の周上で，その半径の長さに等しい長さの弧を切り取る２本の半径の間に含まれる平面角.

立体角　ステラジアン（steradian, sr）　球の中心を頂点とし，その球の半径を１辺とする正方形に等しい面積を球の表面上で切り取る立体角.

組立単位　基本単位から，物理法則，定義に基づく乗除のみで導かれる単位
固有の名称をもつＳＩ組立単位を 表 1.1 に示す。

単位の１０の整数倍乗を表す接頭辞を 表 1.2 に示す。

表 1.1　固有名称をもつＳＩ組立単位

量	単位	記号		
周波数	ヘルツ（Hertz）	Hz		s^{-1}
力	ニュートン（newton）	N	J/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
圧力，応力	パスカル（pascal）	Pa	N/m	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
エネルギー，仕事，熱量	ジュール（joule）	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
仕事率，電力	ワット（watt）	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
電気量，電荷	クーロン（coulomb）	C	$A \cdot s$	$s \cdot A$
電圧，電位	ボルト（volt）	V	J/C	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
静電容量	ファラド（farad）	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
電気抵抗	オーム（ohm）	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
コンダクタンス	ジーメンス（siemens）	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
磁束	ウェーバー（weber）	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
磁束密度	テスラ（tesla）	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
インダクタンス	ヘンリー（henry）	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
光束	ルーメン（lumen）	lm	$cd \cdot sr$	
照度	ルクス（lux）	lx	lm/m^2	
放射能	ベクレル（becquerel）	Bq		s^{-1}
吸収線量	グレイ（gray）	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
線量当量	シーベルト（sievert）	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$

表 1.2　単位の１０の整数乗倍の接頭辞

名称	記号	大きさ	名称	記号	大きさ
ヨタ（yotta）	Y	10^{24}	デシ（deci）	d	10^{-1}
ゼタ（zetta）	Z	10^{21}	センチ（centi）	c	10^{-2}
エクサ（exa）	E	10^{18}	ミリ（milli）	m	10^{-3}
ペタ（peta）	P	10^{15}	マイクロ（micro）	μ	10^{-6}
テラ（tera）	T	10^{12}	ナノ（nano）	n	10^{-9}
ギガ（giga）	G	10^{9}	ピコ（pico）	p	10^{-12}
メガ（mega）	M	10^{6}	フェムト（femto）	f	10^{-15}
キロ（kilo）	k	10^{3}	アト（atto）	a	10^{-18}
ヘクト（hecto）	h	10^{2}	ゼプト（zepto）	z	10^{-21}
デカ（deca）	da	10^{1}	ヨクト（yocto）	y	10^{-24}