第 11 章　例題

留数定理

11.1　特異点

例題 11.1　次の関数 $f(z)$ を [　] に与えられた特異点を中心にして Laurent 展開せよ。また，それぞれの場合について，どのような特異点であるか調べよ。

(1)　$f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^3}$　　$[\, z = 1\,]$

$z-1=u$ とすれば，$z = 1+u$ より

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{\mathrm{e}^{2+2u}}{u^3} = \frac{\mathrm{e}^2}{u^3}\,\mathrm{e}^{2u} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{u^3}\left[1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \cdots\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{(z-1)^3} + \frac{2\,\mathrm{e}^2}{(z-1)^2} + \frac{2\,\mathrm{e}^2}{z-1} \\ &\quad + \frac{4\,\mathrm{e}^2}{3} + \frac{2\,\mathrm{e}^2}{3}(z-1) + \cdots \end{aligned}$$

となる。よって，$z = 1$ は位数 3 の極である。

(2)　$f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$　　$[\, z = -2\,]$

$z+2=u$ とすれば，$z = u-2$ より

$$\begin{aligned} (z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (u-5)\sin\frac{1}{u} \\ &= (u-5)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^5} - \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!\,u^2} + \frac{5}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^4} - \cdots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} - \cdots \end{aligned}$$

となる。Laurent 級数展開の主要部が無限個の項をもつので，$z = -2$ は（孤立）真性特異点である。

(3)　$f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$　　$[\, z = 0\,]$

与えられた関数の分子を級数展開すると

$$\begin{aligned}
\frac{z - \sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left[z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\right] \\
&= \frac{1}{z^3}\left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots
\end{aligned}$$

となる。右辺の展開は負のべきの項をもたないので，$z = 0$ は除去可能な特異点である。

(4)　$f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$　　$[\, z = -2\,]$

$z + 2 = u$ とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\,\frac{1}{1-u} \\
&= \frac{2-u}{u}\left(1 + u + u^2 + u^3 + \cdots\right) \\
&= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \cdots \\
&= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \cdots
\end{aligned}$$

となる。$z = -2$ は 1 位の極である。

(5)　$f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$　　$[\, z = 3\,]$

$z - 3 = u$ とすれば，二項定理を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-3)^2} &= \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{u^2}\,\frac{1}{9\left(1 + \dfrac{u}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{9u^2}\left[1 + (-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \cdots \\
&= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \cdots
\end{aligned}$$

となり，$z = 3$ は 2 位の極である。

11.2　留数定理

例題 11.2　次の関数の特異点における留数を求めよ。

$$(1)\ f(z) = \frac{z-2}{(z^2+1)^2} \qquad (2)\ f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{1/z}$$

(1)　$(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ であるから，$z = \pm i$ がいずれも 2 位の極である。m 位の極の留数を求める方法により

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(+i) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-i)^2\frac{z-2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]\\ &= \lim_{z\to i}\frac{z+i-2(z-2)}{(z+i)^2} = \frac{i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(-i) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+i)^2\frac{z-2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{z-i-2(z-2)}{(z-i)^2} = -\frac{i}{2}\end{aligned}$$

(2)　特異点 $z = 0$ を中心として Laurent 展開すると

$$\begin{aligned}z^2\,\mathrm{e}^{1/z} &= z^2\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{z^2}{2!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)!\,z^{n+2}} + \cdots\right]\\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{(n+2)!}\,\frac{1}{z^n} + \cdots\end{aligned}$$

であるから，$z = 0$ は孤立真性特異点である。留数は，Laurent 展開の $1/z$ の係数より，$\mathrm{Res}(0) = \dfrac{1}{6}$ である。

例題 11.3　次の関数の極における留数を求めよ。

$$(1)\ f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \qquad (2)\ f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{\sin^2 z}$$

(1)　$f(z)$ は $z = -1$ に 2 位の極，$z = \pm 2i$ に 1 位の極をもつ。極における留数の求め方により

$$\mathrm{Res}(-1) = -\frac{14}{25} \qquad \mathrm{Res}(\pm 2i) = \frac{7 \pm i}{25}$$

(2)　$f(z)$ は $z = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) において 2 位の極をもつ。よって，留数は $f(z)$ を $z = m\pi$ において Laurent 級数展開し，$1/(z - m\pi)$ の係数によって求められる。

$z = u + m\pi$ とおくと，$u = 0$ を中心とする Laurent 展開すべき関数は

$$\mathrm{e}^{u+m\pi}\,\frac{1}{\sin^2(u+m\pi)} = \mathrm{e}^{m\pi}\,\mathrm{e}^u\,\frac{1}{\sin^2 u}$$

となる。e^u 及び $\sin u$ を Maclaurin 展開して

$$\begin{aligned} e^u \frac{1}{\sin^2 u} &= \frac{1+u+\dfrac{u^2}{2!}+\dfrac{u^3}{3!}+\cdots}{\left(u-\dfrac{u^3}{3!}+\dfrac{u^5}{5!}-\cdots\right)^2} = \frac{1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+\cdots}{u^2\left(1-\dfrac{u^2}{3}+\dfrac{2u^4}{45}-\cdots\right)} \\ &= \frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{6}+\frac{u}{3}+\cdots \end{aligned}$$

が得られる。ここで，$1/u = 1/(z - m\pi)$ の係数は 1 であるので，留数は $e^{m\pi}$ である。

例題 11.4　次の積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_C \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz$　　C : 円 $|z| = 2$ の上半円と点 $-2, 2$ を結ぶ直径。

被積分関数の特異点は $z = \pm i$ であるが，C の内部に含まれるのは $z = i$ だけである。留数 $\mathrm{Res}(i) = i/2$ であるから，留数定理により

$$\int_C \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) = 2\pi i\,\frac{i}{2} = -\pi$$

(2)　(1) の積分で C を円 $|z| = 2$ とした場合。

円 $|z| = 2$ の内部に $z = i$ と $z = -i$ の両方の極が含まれるので，留数定理により

$$\int_C \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(-i) = 2\pi i\left(\frac{i}{2}-\frac{i}{2}\right) = 0$$

(3)　$\displaystyle\int_C z^2 e^{1/z}\,dz$　　C : 単位円 $|z| = 1$。

特異点は原点 $z = 0$ だけであり，そこでの留数は 1/6 であるので，留数定理により

$$\int_C z^2 e^{1/z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(0) = 2\pi i\,\frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$