第 4 章　例題

正則関数

4.1　Cauchy-Riemann の方程式

例題 4.1　Cauchy-Riemann の方程式を用いて，関数 $f(z) = \overline{z}$ はすべての点で微分不可能であることを示せ。

$z = x + iy$ とすると，$f(z) = u + iv = x - iy$ より，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

すなわち，Cauchy-Riemann の方程式が成り立たない。よって，すべての点で微分不可能。

例題 4.2　複素変数 $z = x + iy$ に対して $f(z) = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$ で定義される関数は，すべての点で微分可能であることを Cauchy-Riemann の方程式を用いて示せ。

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと，$u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$, $v(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ はすべての点の近傍で定義され，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y$$

が存在して連続である。さらに，上の偏導関数は Cauchy-Riemann の方程式をみたす。よって，微分可能性 2 の定理から，与えられた関数はすべての点で微分可能である。

例題 4.3　Cauchy-Riemann の方程式を用いて，関数 $f(z) = |\,z\,|^2$ の微分可能性を調べよ。

$f(z) = x^2 + y^2$ から（任意の点で微分可能で），$u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$ であるので，偏導関数は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

となる。従って，$x = y = 0$ のときだけ，Cauchy-Riemnann の方程式が成り立つ。すなわち，複素平面のただ一つの点 $z = 0$ のみで微分可能である。

例題 4.4　Cauchy-Riemann の方程式を用いて，関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ の微分可能性を調べよ。

$z = x + i\,y$，$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ とすると，

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

である。これらの関数は $x = y = 0$ を除いて，偏導関数

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \qquad \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

が存在して連続であり，Cauchy-Riemann の方程式を満たす。従って，$f(z) = 1/z$ は $z = 0$ を除いて微分可能である。

このとき，$f(z) = 1/z$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(x-i\,y)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{(x+i\,y)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

例題 4.5　極座標で表した Cauchy-Riemann の方程式を用いて，関数 $f(z) = z^3$ が微分可能であることを示せ。

$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,)$ とすると，$f(z) = r^3\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta\,)$ であるから，$f(z) = u + iv$ とおくと

$$u = r^3\cos 3\theta, \qquad v = r^3\sin 3\theta$$

である。r, θ に関する偏導関数は

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta} = 3r^2\cos 3\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} = 3r^2\sin 3\theta$$

となり，極座標による Cauchy-Riemann の方程式を満たしている。よって，$f(z)$ はすべての点で微分可能である。

例題 4.6　極形式で表した点 $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ における，関数 $f(z) = u + iv$ の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

であることを示せ。

(3.6) を x, y に関する偏導関数についての連立方程式であるとして解くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\cos\theta}{r} \end{aligned}$$

と表せる。同様の式が関数 v についても成り立つ。従って，$f(z)$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta}{r} + i\left[\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\,\frac{\sin\theta}{r}\right] \\
&= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，右辺の θ に関する導関数を，極座標による Cauchy-Riemann の方程式を用いて r に関する導関数に書き直して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} &= \cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(-r\,\frac{\partial v}{\partial r} + i\,r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\
&= (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる。

4.2 正則関数

例題 4.7 関数 $f(z) = z^n$（n は自然数）が全ての点で正則であることを示せ。

全ての点で次ぎの極限が存在することを示せばよい。

$$
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z}
$$

分子の第１項を二項定理によって展開して

$$
(z + \Delta z)^n = z^n + n z^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2}\, z^{n-2}(\Delta z)^2 + \cdots + (\Delta z)^n
$$

より

$$
\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\, z^{n-2}\Delta z + \cdots + (\Delta z)^{n-1}
$$

である。$\Delta z \to 0$ のとき，極限が存在することは明らかである。すなわち，全ての点 z の近傍の全ての点において微分可能であるから，関数 $f(z) = z^n$ は全ての点で正則である。なお，導関数は $f'(z) = n z^{n-1}$ である。

例題 4.8 関数 $f(z) = |\,z\,|^2$ の正則性を調べよ。

$f(z) = x^2 + y^2$ であるから，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくと，

$$
u(x, y) = x^2 + y^2, \qquad v(x, y) = 0
$$

である。どちらも連続で微分可能であり，偏導関数は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

連続である。$x = y = 0$ のとき Cauchy-Riemann の方程式を満たすので，$z = 0$ で微分可能であるが，$z = 0$ 以外の点では微分不可能である。すなわち，$z = 0$ のどのような近傍でも微分不可能であるので，$f(z) = |\,z\,|^2$ は複素平面上のいかなる点でも正則ではない。

例題 4.9　関数 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ の正則性を調べよ。

例題 4.1 でみたように，$f(z) = 1/z$ は $z = 0$ を除く全ての点で微分可能である。従って，$z = 0$ を除いて正則である。

例題 4.10　関数 $f(z) = z + \overline{z}$ の正則性を調べよ。

$f(z) = z + \overline{z} = 2x$ であるから，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくと，

$$u(x, y) = 2x, \qquad v(x, y) = 0$$

である。どちらも連続で微分可能であるが，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

は Cauchy-Riemann の方程式を満たさない。すなわち，どの点でも正則ではない。

例題 4.11　関数 $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$ の正則性を調べよ。

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおくと，

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \qquad v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

である。どちらも連続で微分可能であり，偏導関数は連続で Cauchy-Riemann の方程式を満たす

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \;=\; 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; -6xy.$$

よって，関数 $f(z)$ は全ての点で微分可能であり，従って，全ての点で正則である。

例題 4.12　2 つの実変数 x, y の関数 $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ が，$z = x + i\,y$ の関数の実部と虚部となることを示せ。

$u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ の偏導関数は Cauchy-Riemann の方程式を満たす

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

従って，$u(x, y) + i\,v(x, y)$ を z と $\overline{z}$ の関数とみなしたとき，$\overline{z}$ を含まず，z だけの関数である。実際，$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = z^2$ である。

4.3 調和関数

例題 4.13 $u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ が調和関数であることを示せ。

$u(x,y)$ の導関数を求めると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathrm{e}^{-x}\sin y - x\,\mathrm{e}^{-x}\sin y + y\,\mathrm{e}^{-x}\cos y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -2\,\mathrm{e}^{-x}\sin y + x\,\mathrm{e}^{-x}\sin y - y\,\mathrm{e}^{-x}\cos y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x\,\mathrm{e}^{-x}\cos y + y\,\mathrm{e}^{-x}\sin y - \mathrm{e}^{-x}\cos y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -x\,\mathrm{e}^{-x}\sin y + 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin y + y\,\mathrm{e}^{-x}\cos y
\end{aligned}$$

となる。2 階の偏導関数を加えて

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

が得られる。すなわち，$u(x,y)$ は調和関数である。

例題 4.14 $z = x + i\,y$ と $\overline{z} = x - i\,y$ を 2 つの独立変数とみなしたとき，Laplace の方程式は

$$\frac{\partial^2 h(z,\overline{z})}{\partial z\,\partial\overline{z}} = 0$$

と表されることを示せ。

x, y を z, $\overline{z}$ で表すと

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

であるから，z, $\overline{z}$ での偏微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

と表せる。従って，

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

となり，$\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\overline{z}}$ が Laplace の演算子と同じ（定数因子を除いて）であることがわかる。

例題 4.15 $u(x,y) = x^2 - y^2$ を実部とする正則関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を求めよ。

$u(x,y)$ の x, y に関する偏導関数が存在し，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を満たしている。すなわち，$u(x,y)$ は調和関数である。

正則関数は Cauchy-Riemann の方程式を満たすので，$v(x,y)$ の x, y に関する偏導関数は

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

である。左の式を y を定数であるとみなして x について積分すると

$$v(x,y) = 2xy + Y(y)$$

となる。ここで，$Y(y)$ は y だけの関数である。この式を上の右の式に代入すると，$Y(y)$ についての微分方程式が得られ，

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = 0$$

これを解いて $Y(y) = c$（c は実定数）となる。すなわち，$v(x,y) = 2xy + c$ である。よって，求める正則関数は

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy + ci = z^2 + ci$$

となる。

例題 4.16　$u(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\,(x \sin y - y \cos y)$ を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ。

直前の例題より $u(x,y)$ は調和関数である。一方，正則関数には Cauchy-Riemann の方程式をが成り立つので，$f(z) = u + iv$ の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

と，$u(x,y)$ の導関数，あるいは $v(x,y)$ の導関数だけで表される。与えられた $u(x,y)$ の微分を実行して

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-x}\,[y \cos y + (1-x) \sin y] + i\,\mathrm{e}^{-x}\,[(1-x) \cos y - y \sin y]$$

となる。これを，$v(x,y)$ の導関数であるとみなすと，$v(x,y)$ についての微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \mathrm{e}^{-x}\,[(1-x) \cos y - y \sin y] \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathrm{e}^{-x}\,[y \cos y + (1-x) \sin y]\end{aligned}$$

これより，c を実定数として

$$v(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\,(\,x\cos y + y\sin y\,) + c$$

が得られる。よって，求める関数 $f(z)$ は

$$f(z) = z\,\mathrm{e}^{-x}\,(\,\sin y + i\cos y\,) + ic$$

となる。

例題 4.17　2 変数の実関数 $u(x,y) = \mathrm{e}^{ax}\cos by$ が調和関数となる条件を求めよ。また，このとき，$u(x,y)$ を実部とする正則関数 $f(z)$ を求めよ。

$u(x,y)$ の 1 階，及び，2 階の導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\,\mathrm{e}^{ax}\cos by \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -b\,\mathrm{e}^{ax}\sin by$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\,\mathrm{e}^{ax}\cos by \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b^2\,\mathrm{e}^{ax}\cos by$$

より，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) \;=\; (a^2 - b^2)\,\mathrm{e}^{ax}\cos by$$

従って，$u(x,y)$ が調和関数となる条件は $a^2 = b^2$ である。

$a = b$ の場合を考える。$u(x,y)$ を実部とする正則関数 $f(z)$ の虚部を $v(x,y)$ とすると，Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \frac{\partial u}{\partial x} \;=\; a\,\mathrm{e}^{ax}\cos ay \qquad \frac{\partial v}{\partial x} \;=\; -\frac{\partial u}{\partial y} \;=\; a\,\mathrm{e}^{ax}\sin ay$$

これより，$v(x,y) = \mathrm{e}^{ax}\sin ay$ が得られる。従って，正則関数 $f(z)$ は

$$f(z) \;=\; \mathrm{e}^{ax}\cos ay + i\,\mathrm{e}^{ax}\sin ay \;=\; \mathrm{e}^{ax}(\cos ay + i\sin ay) \;=\; \mathrm{e}^{a(x+iy)} \;=\; \mathrm{e}^{az}$$

である。なお，複素数の指数関数については次章を参照。

例題 4.18　極座標で表した関数 $h(r,\varphi) = \log r$ （$r > 0$）は，極座標における Laplace の方程式を満たすことを示せ。

極座標で表した Laplace の微分演算子を作用させると

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{r} + 0 = 0$$

となり，h が極座標での Laplace の方程式を満たすことがわかる。

例題 4.19　正則な関数の実部，及び虚部は，極座標を用いて表したとき，極座標における Laplace の方程式を満たすことを証明せよ。

極座標で表した Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r\,\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

から次のように v を消去する。左の式を r で，右の式を θ で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) = r\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta\,\partial r} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

２階の偏導関数が連続であることを仮定すると，微分の順序を入れ換えて，上の２つの式の左辺が等しくなる。よって，u が極座標での Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

を満たすことがわかる。同様にして，u を消去すると，v は u と全く同じ方程式を満たすことが導ける。

例題 4.20　無限にのびた２枚の導体平面があり，それぞれ，電位が U_1 と U_2 に保たれている。平面のあいだの電位を求めよ。また，複素ポテンシャルを求めよ。

平面に垂直に x 軸をとる。静電ポテンシャル u は x だけの関数であり，Laplace の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} \;=\; 0$$

となる。平面の位置を $x = -L$，$x = L$ とすると，Laplace の方程式を積分して電位は

$$u(x) \;=\; ax + b \qquad a = \frac{U_2 - U_1}{2L} \qquad b = \frac{U_2 + U_1}{2}$$

となる。$u =$ 一定，すなわち，$x =$ 一定 が等電位面を表す。

u を実部とする正則関数を $f(z) = u + iv$ とすると，u と v は Cauchy-Riemann の方程式を満たす。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = a$$

従って，虚部は $v(x, y) = ay + c$（c は定数）となる。$v =$ 一定，すなわち，$y =$ 一定 が電気力線を表す。$z = x + iy$ として，複素ポテンシャル $f(z)$ は

$$f(z) \;=\; ax + b + i\,(ay + c) \;=\; az + (b + ic)$$

となる。v は u の共役調和関数であり，Laplace の方程式を満たす。

例題 4.21　無限にのびた２つの同軸導体円柱（内側の円柱の外径 R_1，外側の円柱の内径 R_2）があり，それぞれ，電位が U_1 と U_2 に保たれている。同軸導体円柱のあいだの電位を求めよ。また，複素ポテンシャルを求めよ。

対称性から電位は円柱の中心軸からの距離 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ だけの関数 $u(r)$ になり，平面極座標で表した Laplace の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \;=\; 0$$

の解である。r による微分を $'$ をつけて表すと，Laplace の方程式は

$$\frac{u''}{u'} \;=\; -\frac{1}{r}$$

と変形（変数分離）でき，これを積分して

$$\log u' \;=\; -\log r + c \quad \text{から} \quad u' \;=\; \frac{a}{r}$$

もう一度積分して

$$u(r) \;=\; a\log r + b$$

が得られる。ここで，

$$a \;=\; \frac{U_2 - U_1}{\log R_2 - \log R_1} \qquad b \;=\; \frac{U_1\log R_2 - U_2\log R_1}{\log R_2 - \log R_1}$$

である。$u =$ 一定，すなわち，$r =$ 一定 が等電位面である。

u を実部とする正則関数を $f(z) = u + iv$ とすると，u と v は Cauchy-Riemann の方程式を満たす。

$$\frac{\partial v}{\partial r} \;=\; -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \;=\; 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} \;=\; r\frac{\partial u}{\partial r} \;=\; a$$

これより，虚部 v は θ だけの関数である。

$$v(\theta) \;=\; a\theta + c \qquad c \text{ は定数}$$

$v =$ 一定，すなわち，$\theta =$ 一定 が電気力線を表す。

$z = x + iy$ として複素ポテンシャル $f(z)$ は

$$f(z) \;=\; a\log r + b + i\,(a\theta + c) \;=\; a\log z + (b + ic)$$

と表せる（複素数 z の対数関数については次章参照）。