第 12 章　実関数の定積分

複素関数の積分を実関数の定積分に利用することができる。実関数 $f(x)$ の値は，複素関数 $f(z)$ の $z = x + i0$ の場合の値とみなせる。そこで，$f(z)$ が複素平面で定義された関数であると考えて，適当な閉曲線 C を選んで，留数定理を応用して実関数の定積分の値を求める。この選び方はかなり工夫を要することもある。

12.1　有理関数

実変数 x の有理関数（実関数）$f(x)$ の 0 から $+\infty$ までの **無限積分** は，次の極限として定義する：

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

右辺の極限が存在するとき，この無限積分は **収束する** といい，極限値を無限積分の値という。$-\infty$ から $+\infty$ までの無限積分は，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

で定義する。

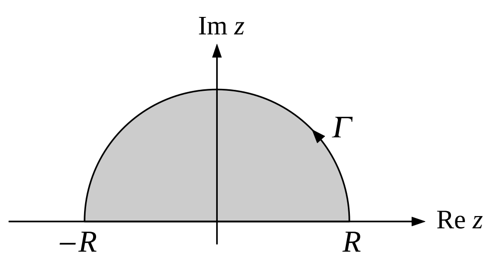

図 12.1: 定積分を計算する際の積分路（1）：有理関数

積分路 C を，実軸上の $-R$ から $+R$ までの線分と，これを直径とする実軸の上方にある半円 $\varGamma$ とからなる閉曲線とし，C に沿って 1 周する積分を考える（図 12.1）。ついで，$R\to\infty$ とする。C を 1 周する積分は

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\varGamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

であるから，実関数の積分は

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

より求めることができる。右辺の第 1 項は留数定理を応用して求める。従って，数学的に重要な部分は第 2 項の積分が $R\to\infty$ のとき

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

となることを示すことである。

関数 $f(x)$ が共通因子をもたない 2 つの多項式 $p(x)$ と $q(x)$ で $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ と表されるとき，

$$\begin{aligned} &[\,q(x)\ \text{の次数}\,] \geq [\,p(x)\ \text{の次数}\,] + 2 \\ \Longrightarrow\quad &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\pi i\Big[\,\mathrm{Res}(z_1)+\mathrm{Res}(z_2)+\cdots+\mathrm{Res}(z_n)\Big]\end{aligned}$$

となる。ここに，$\mathrm{Res}(z_k)$（$k=1, 2, \cdots, n$）は上半平面上の特異点 z_k における $f(z)$ の留数である。すなわち，z_k は多項式 $q(z)$ の零点である。

$f(x)$ が偶関数ならば，この複素積分は，実関数 $f(x)$ の 0 から ∞ までの定積分を求めるのにも利用できる。

例　$\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\sqrt{2}}{4}\,\pi}$

被積分関数は偶関数であるので，積分は

$$\int_0^R \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

から，$R\to\infty$ の極限として求められる。そこで，複素関数

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^4+1}$$

を考え，図 12.1 に示すように，実軸に半円 Γ を加えた閉曲線 C に沿った複素積分を行う。このとき，実関数の積分は

$$\int_0^R \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\left[\int_C \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right]$$

で求められる。

複素関数 $f(z)$ の特異点は

$$z_1 \;=\; \frac{1+i}{\sqrt{2}},\qquad z_2 \;=\; \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\qquad z_3 \;=\; \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\qquad z_4 \;=\; \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

であり，いずれも１位の極である。従って，閉曲線 C に沿った積分は留数定理を適用して求められる。R を大きくしたとき，積分路の内部に含まれる特異点は z_1 と z_2 であり，その点における留数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z_1) &= \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\frac{1}{z^4+1}\right] = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\\ \mathrm{Res}(z_2) &= \lim_{z\to z_2}\left[(z-z_2)\frac{1}{z^4+1}\right] = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

である。よって，C を１周する積分は

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(z_1)+\mathrm{Res}(z_2)\Big)\\ &= 2\pi i\,\frac{1}{4}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad (12.1)\end{aligned}$$

となる。

一方，半円 Γ 上において

$$\left|\frac{1}{z^4+1}\right| = \frac{1}{|\,z^4+1\,|} \le \frac{1}{|\,z^4\,|-1} = \frac{1}{R^4-1} < \frac{2}{R^4}$$

であるので，$R\to\infty$ の極限では

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (12.2)$$

となる。

(12.1) と (12.2) から，求める実関数の定積分は

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\pi$$

である。

12.2　三角関数の有理関数

三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$ の有理関数である $F(\sin\theta, \cos\theta)$ の定積分を複素積分を用いて求める。

$z = \mathrm{e}^{i\theta}$ とおくと，θ が 0 から 2π まで変化するとき，z は複素平面上で，原点を中心とする単位円 $C : |z| = 1$ の周上を正の向きに 1 周する（図 12.2）。

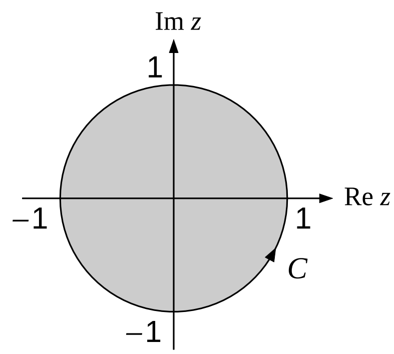

図 12.2: 定積分を計算する際の積分路（２）: 三角関数の有理関数

このとき，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = iz \qquad \text{より} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

である。また，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は

$$\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

と表せる。よって，求める実関数の積分は単位円を 1 周する複素積分

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z \tag{12.3}$$

で求められる。単位円 C 上に特異点がないならば，右辺の複素積分は単位円 C の内部にある特異点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ における留数で表され，

$$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi i \Big[\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(z_n)\Big] \tag{12.4}$$

となる。

積分範囲が 0 から π までの場合は，$z = \mathrm{e}^{2i\theta}$ とおけばよい。このとき，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = 2iz \qquad \text{より} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{2iz}$$

である：

$$\int_0^{\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{1}{2iz}\,\mathrm{d}z. \tag{12.5}$$

例
$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

積分範囲が $0 \le \theta \le \pi$ であるので，$z = \mathrm{e}^{2i\theta}$ とすると，図 12.2 に示す複素平面上の単位円 C に沿った積分で表せる。このとき，

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \text{より} \qquad \frac{1}{1+\sin^2\theta} = \frac{2}{3-\cos 2\theta}$$

また，Euler の公式より

$$\cos 2\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

である。従って，被積分関数は複素変数 z で

$$\frac{1}{1+\sin^2\theta} = \frac{2}{3-\dfrac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{4}{6-z-z^{-1}} = -\frac{4z}{z^2-6z+1}$$

と表せる。また，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = 2iz \qquad \text{より} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{2iz}$$

である。よって，実関数の積分は

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = -\int_C \frac{4z}{z^2-6z+1}\frac{\mathrm{d}z}{2iz} = 2i\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1} \tag{12.6}$$

となる。すなわち，複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z^2-6z+1}$$

を単位円 C に沿って積分すればよい。

関数 $f(z)$ は $z = z_1 = 3-2\sqrt{2}$ と $z = z_2 = 3+2\sqrt{2}$ に 1 位の極をもつ。単位円の内部にあるのは z_1 だけであり，そこでの留数は

$$\mathrm{Res}(3-2\sqrt{2}) = \frac{1}{z_1-z_2} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

であるので，単位円に沿った積分は次のようになる。

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-6z+1} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi i}{2\sqrt{2}}. \tag{12.7}$$

(12.6) と (12.7) より

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が得られる。

12.3　有理関数と三角関数の積

三角関数 $\sin mx$，あるいは $\cos mx$ と，x の有理関数 $F(x)$ の積の定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \left\{ \begin{array}{c} \sin mx \\ \cos mx \end{array} \right\} \mathrm{d}x$$

を複素積分を用いて計算する。

実関数の無限積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x \, \mathrm{d}x$$

は，$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{e}^{ix} \, \mathrm{d}x$$

の虚部と実部である。従って，図 12.3 に示す閉曲線 C を積分路としてとると，C を 1 周する積分は

$$\oint_C f(z)\mathrm{e}^{iz} \, \mathrm{d}z \;=\; \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{ix} \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{e}^{iz} \, \mathrm{d}z$$

より，実関数の積分は

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{ix} \, \mathrm{d}x \;=\; \oint_C f(z)\mathrm{e}^{iz} \, \mathrm{d}z - \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{e}^{iz} \, \mathrm{d}z$$

から求めることができる。右辺の第 1 項は留数定理を応用して求める。従って，数学的に重要

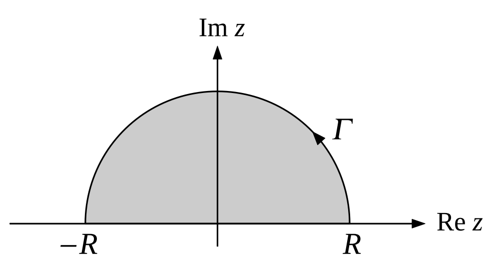

図 12.3: 定積分を計算する際の積分路（３）: 有理関数と三角関数の積

な部分は第 2 項の積分が $R \to \infty$ のとき

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{e}^{iz} \, \mathrm{d}z \;=\; 0$$

となることを示すことである。

関数 $f(x)$ が，共通因子をもたない 2 つの多項式 $p(x)$ と $q(x)$ で $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ と表される

とき，

$$
\begin{aligned}
& [\, q(x) \text{ の次数} \,] \geq [\, p(x) \text{ の次数} \,] + 1 \\
\Longrightarrow \quad & \lim_{R\to\infty} \int_{\varGamma} \frac{p(z)}{q(z)}\, \mathrm{e}^{iz}\, \mathrm{d}z \;=\; 0 \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x \, \mathrm{d}x \;=\; \mathrm{Re}\Big[\, 2\pi i \Big(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(z_n) \Big) \Big] \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x \, \mathrm{d}x \;=\; \mathrm{Im}\Big[\, 2\pi i \Big(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2) + \cdots + \mathrm{Res}(z_n) \Big) \Big]
\end{aligned}
$$

となる。ここに，$\mathrm{Res}(z_k)$（$k = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$）は上半平面上の特異点 z_k における $f(z)\mathrm{e}^{iz}$ の留数である。すなわち，z_k は多項式 $q(z)$ の零点である。

例

$$
\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2b}\, \mathrm{e}^{-ab} \qquad a,\ b \;>\; 0}
$$

複素関数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2}$ を 図 12.3 に示す積分路に沿って積分する。被積分関数は $z = \pm ib$ に 1 位の極をもち，そのうち $z = ib$ だけが C の内部にある。$z = ib$ における留数は

$$
\mathrm{Res}(ib) \;=\; \lim_{z\to ib} \left[(z - ib)\, \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{(z - ib)(z + ib)} \right] \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2ib}
$$

である。

従って，積分路 C を 1 周する複素積分は

$$
\oint_C \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2}\, \mathrm{d}z \;=\; 2\pi i\, \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2ib} \;=\; \frac{\pi}{b}\, \mathrm{e}^{-ab}
$$

すなわち，

$$
\int_{-R}^{R} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin ax}{x^2 + b^2}\, \mathrm{d}x + \int_{\varGamma} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2}\, \mathrm{d}z \;=\; \frac{\pi}{b}\, \mathrm{e}^{-ab}
$$

である。左辺の第 2 項は実軸上の積分であり，被積分関数は奇関数であるから，$-R$ から R までの積分は明らかに 0 になる。第 3 項は $R \to \infty$ のとき 0 に収束する：

$$
\int_{\varGamma} \frac{\mathrm{e}^{iaz}}{z^2 + b^2}\, \mathrm{d}z \quad \to \quad 0 \qquad (\, R \to \infty \,)
$$

よって，求める結果が得られる。

12.4　定積分の計算に用いられる有用な定理

直前の例のような計算の場合，上半円（図 12.3 の Γ）に沿った積分が 0 に収束することを示す必要がしばしばある。

定理 12.1　Jordan の不等式
$R>0$ のとき次の不等式が成り立つ。

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \frac{\pi}{2R}$$

証明　$0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲で，$\sin\theta$ は単調増加であり，

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\,\theta$$

が成り立つ。すなわち，両辺に $-R$ をかけて

$$-R\sin\theta \leq -\frac{2R}{\pi}\,\theta$$

である。よって，

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-(2R/\pi)\,\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2R}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right) < \frac{\pi}{2R}$$

が得られる。

定理 12.2　M は定数で，$z = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$ に対して

$$|\,F(z)\,| \leq \frac{M}{R^k}, \qquad k>1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z = 0$$
$$|\,F(z)\,| \leq \frac{M}{R^k}, \qquad k>0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \mathrm{e}^{imz}F(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

である。ここで，Γ は実軸上の $-R$ と R を直径とする x 軸の上方にある半円である。また，m は正数とする。

証明

$k>1$ の場合　半円 Γ の長さは πR であることと，仮定より，

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{M}{R^k}\,\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

が成り立つ。よって，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

が得られる。

$k>0$ の場合　$z=R\,\mathrm{e}^{i\theta}$ とすれば

$$\int_{\Gamma}\mathrm{e}^{im\pi}F(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{imR\,\mathrm{e}^{i\theta}}F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\,iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

より，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{imR\,\mathrm{e}^{i\theta}}F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| &\le \int_0^{\pi}\left|\mathrm{e}^{imR\,\mathrm{e}^{i\theta}}F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\right|\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\left|\mathrm{e}^{imR\cos\theta-mR\sin\theta}F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})iR\,\mathrm{e}^{i\theta}\right|\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\left|F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\right|R\,\mathrm{d}\theta\\ &\le \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

ここで，Jordan の不等式により

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-mR\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta<\frac{\pi M}{mR^k}$$

であることがわかる。m と k は正であるから，$R\to\infty$ とすればこれは 0 に収束する。よって，求める結果が得られる。

12.5　実軸上に特異点がある場合の定積分

実関数の定積分における Cauchy の主値

$F(x)$ が $a < x_0 < b$ である 1 点 x_0 を除けば，$a \leq x \leq b$ で連続であるとき，ε_1 及び ε_2 を正数として

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon_1} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon_2}^b F(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

と定義する。この極限値が，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ならば存在しないが，$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ならば存在するという場合がある。このような場合に

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^b F(x)\,\mathrm{d}x \right]$$

の右辺で定義される値を，積分の **Cauchy 主値** という。

例　$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2}}$$

この実関数の定積分を求めるのに，複素関数

$$f(z) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$$

の積分を考える。この関数は実軸上の $z = 0$ に 1 位の極をもつ。特異点を通って積分はできないので，図 12.4 に示すように積分路 C をとることにする。ここで $\mathit{\Gamma}'$ は半径 ε の上半円，$\mathit{\Gamma}$ は半径 R の上半円である。

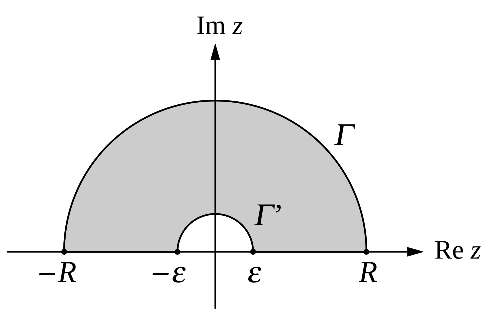

図 12.4: 定積分を計算する際の積分路（4）：積分路に特異点をもつ関数

このようにすると，特異点 $z = 0$ は積分路の外部にあるので，

$$0 = \oint_C \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathit{\Gamma}'} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^R \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathit{\Gamma}} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

である。

右辺の第1項の積分において x を $-x$ に置き換えて，第3項の積分と組み合わせると

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma'} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z \;=\; 0$$

すなわち，実軸に沿った ε から R までの積分は

$$2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\int_{\Gamma'} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z$$

となる。小さな半円 Γ' に沿った積分は，$z = \varepsilon\,\mathrm{e}^{i\theta}$ とすれば

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{\mathrm{e}^{i\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta}}}{\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta}}\, i\varepsilon\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \;=\; -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} i\,\mathrm{e}^{i\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \;=\; \pi i$$

大きな半円 Γ に沿った積分は $R \to \infty$ のとき 0 に収束する。よって，

$$\lim_{R\to\infty,\,\varepsilon\to 0} 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi i \qquad \text{すなわち} \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

が得られる。