第 6 章　等角写像

6.1　変換・写像

変換・写像　次の１組の方程式によって，xy 平面上の点と uv 平面上の点の対応を定める **変換** または **写像** を定義する。

$$\begin{cases} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{cases} \tag{6.1}$$

１対１変換　xy 平面上の各点に uv 平面上の点がただ１つ対応し，逆も成り立つとき，**１対１変換** または **１対１写像** という。このとき，xy 平面上の点集合（曲線，領域など）は uv 平面上の点集合（曲線，領域など）に **写され**，また逆も成り立つ。２つの平面上の対応する点集合は互いに他の集合の **像** であるという。

Jacobian　変換 (6.1) に対して，行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.2}$$

を **Jacobian**（**関数行列式**）という。Jacobian は簡単に

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

と表すこともある。

逆変換　変換 (6.1) を x, y について解き u, v で表すと，変換

$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{cases} \tag{6.3}$$

が得られる。これを変換 (6.1) の **逆変換** という。このときの Jacobian は

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{6.4}$$

である。

２組の２つの実変数のあいだに次の定理が成り立つ。

定理 6.1　　逆変換（逆写像）の定理
２組の実変数 (x, y) と (u, v) の間の次の変数変換は xy 平面のある領域 D から uv 平面の領域 D' への写像 f である：

$$f \ : \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

この変換の Jacobian が 0 でないならば，写像 f は１対１である。このとき，逆変換（逆変換） $f^{-1} : D' \to D$ が定まり，x, y は領域 D' で u, v の微分可能な関数として

$$f^{-1} \ : \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

と表される。
f と f^{-1} の関数行列は互いに逆行列である：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

よって，互いに逆変換の関係にある２つの変換に対して，*Jacobian* は逆数の関係にある：

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}. \tag{6.6}$$

(6.5) の証明

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ から

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ から

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

が成り立つ。よって，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v \end{aligned}$$

から

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

同様に,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v \end{aligned}$$

から

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

が得られる。

(6.5) から，(6.6) が得られる：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

この関係式から，一方の変換の Jacobian が領域の各点で 0 にならなければ，他方の Jacobian も 0 にならない。

複素写像変換　$u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ が複素変数 $z = x + iy$ の正則関数 $f(z)$ の実部及び虚部になっているとき,

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y),$$

変換の Jacobian は，Cauchy-Riemann の方程式を用いて,

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|^2$$

と表せる。ここで，正則関数 $f(z)$ に対して

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

であることを用いた。導関数が 0 になる点を **臨界点** という。

定理 6.2　逆関数定理
正則関数 $w = f(z)$ について,

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \neq 0 \quad \text{である適当な領域 } D \text{ をとり，その像を } D' \text{ とすれば,}$$

領域 D と D' は１対１に対応し，逆関数 $z = f^{-1}(w)$ が存在する。
$f^{-1}(w)$ は D' で正則であり,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}}$$

が成り立つ。

証明　$z = x + iy$ に対して，正則関数を $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ と表す。

このとき，逆写像定理の (6.5) より，

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{として} \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。すなわち，

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}$$

である。ここで，正則関数 $f(z)$ の実部と虚部の偏導関数に Cauchy-Riemann の方程式が成り立つので，

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

が得られる。これは，$x(u,v)$, $y(u,v)$ に対する Cauchy-Riemann の方程式に他ならない。よって，

$$z = x(u,v) + iy(u,v)$$

とおけば，z は領域 D' で w の正則な関数である。それを $z = f^{-1}(w)$ と表せば，これは D' で 1 価関数であり

$$f^{-1}\Big(f(z)\Big) = z \qquad f\Big(f^{-1}(w)\Big) = w$$

という性質をもつ。すなわち，$f^{-1}(w)$ は $f(z)$ の逆関数である。

このとき，$z = f^{-1}(w)$ の導関数は，上で求めた偏導関数の関係式，及び Cauchy-Riemann の方程式を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z(w)}{\mathrm{d}w} &= \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} + i\frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + i\frac{1}{J}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{1}{J}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - i\frac{1}{J}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}} \end{aligned}$$

で与えられる。

変換の不動点

z 平面と w 平面を，座標軸が一致するように重ねて考えると，本質的に 1 つの平面になる。このとき，変換 $w = f(z)$ は，この平面上の点を，平面上の他の点に移すものと考えることができる。しかし，$z = f(z)$ を満たす点は変換によって不動である。このような点を **変換の不動点** という。

定理 6.3　　等角写像の原理
複素関数 $w = f(z)$ が点 z_0 で正則であり，その点で $\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \neq 0$ とする。点 z_0 を通る任意の 2 つの曲線 C_1, C_2 をとり，$w = f(z)$ による写像を Γ_1, Γ_2 とする。そのとき，点 z_0 における C_1, C_2 の接線のなす角と，点 Γ_1, Γ_2 の接線のなす角とは，その回転の向きを含めて等しい。

証明　関数 $f(z)$ が点 z_0 で正則で，$\dfrac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} \neq 0$ とする。z 平面上で，点 z_0 を通る 2 つの曲線 C_1, C_2 をとり，$f(z)$ によるそれらの像を Γ_1, Γ_2 とする。Γ_1, Γ_2 は w 平面上の点 $w_0 = f(z_0)$ を通る 2 つの曲線である。z 平面上で z_0 に近い点 z_1, z_2 をそれぞれ C_1, C_2 の上にとり，それらの像を $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ とする。ここで，

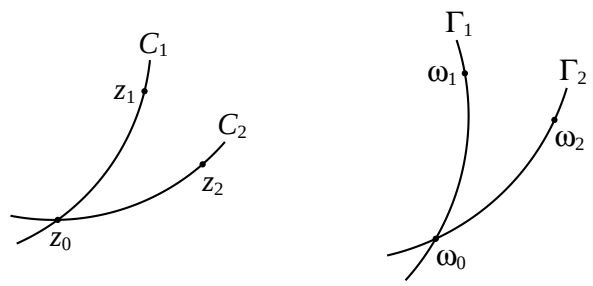

図 6.1: 等角写像の原理

$$\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} + \varepsilon_1 \qquad \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} + \varepsilon_2$$

とおいて，z_1, z_2 を z_0 に近づけると，どのような近づき方に対しても，左辺は同じ極限値に近づく。

$$\lim_{z_1 \to z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \to z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$$

よって，

$$\varepsilon_1 \to 0 \quad (z_1 \to z_0) \qquad \varepsilon_2 \to 0 \quad (z_2 \to z_0)$$

である。また，偏導関数は 0 でないので，$z_1 \to z_0, z_2 \to z_0$ のとき，

$$\frac{w_1 - w_0}{w_2 - w_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \frac{\dfrac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} + \varepsilon_1}{\dfrac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z} + \varepsilon_2} \to \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$$

である。これは，z_1, z_2 が曲線 C_1, C_2 上で点 z_0 に近づくとき，$\triangle z_0 z_1 z_2$ とその像 $\triangle w_0 w_1 w_2$ とは，角の回転の向きを含めて近似的に相似であることを示している。従って，その極限として定理が成り立つことがわかる。

6.2　初等関数の写像

6.2.1　１次分数変換

第２章で述べた４つの基本的な変換，すなわち，平行移動，回転，相似拡大，反転は等角写像である。１次分数変換は，これら４つの基本的な変換の合成関数として表すことができるので等角写像である。

6.2.2　$\omega = z^2$

領域の対応

z と ω の絶対値と偏角の関係は $|\omega| = |z|^2$，$\arg\omega = 2\arg z$ であるので，領域 $0 \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}$ と領域 $0 \leq \arg\omega \leq \pi$ は１対１に変換する。

双曲線から直線への写像

$z = i + iy$，$\omega = u + iv$ とおくと，

$$\omega = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

より

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \qquad v(x,y) = 2xy.$$

(1)　z 平面上の双曲線 $x^2 - y^2 = c_1$（c_1 は正の実定数）は，$x > 0$ の分枝と $x < 0$ の分枝とからなる。２つの分枝は，それぞれ，ω 平面上の直線 $u = c_1$ に１対１に写像される（図 6.2）。

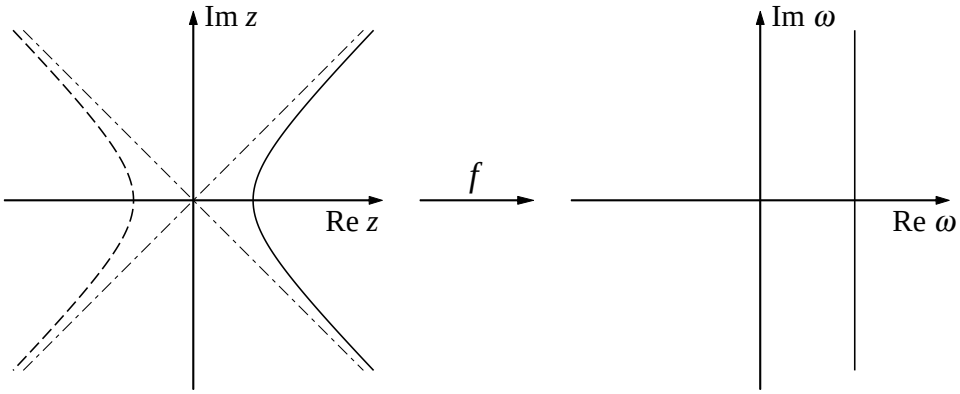

図 6.2: $\omega = z^2$ の写像（１）

(2)　z 平面上の双曲線 $2xy = c_2$（c_2 は正の実定数）は，xy 平面の第１象限の分枝と第３象限の分枝からなる。２つの分枝は，それぞれ，ω 平面上の直線 $v = c_2$ に写像される（図 6.3）。

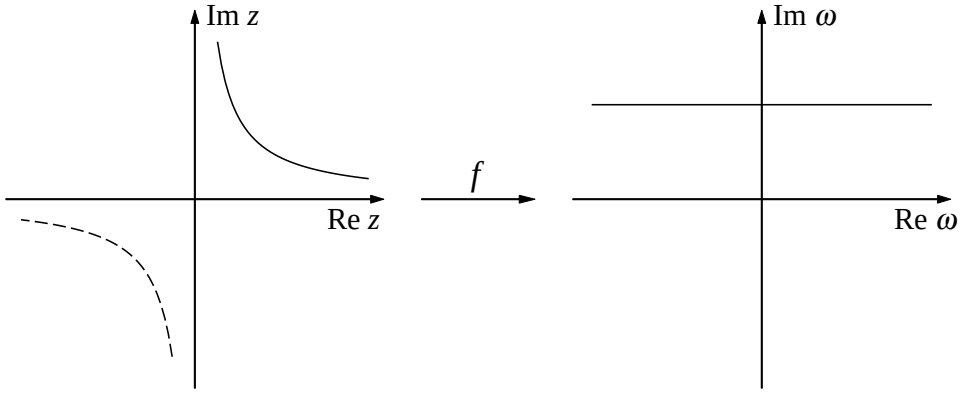

図 6.3: $\omega = z^2$ の写像（２）

z 平面上の２つの双曲線

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2xy = c_2$$

は互いに直交しており（図 6.4 左図），これらの像である ω 平面上の２つの直線

$$u = c_1, \qquad v = c_2$$

は互いに直交している（図 6.4 右図）。

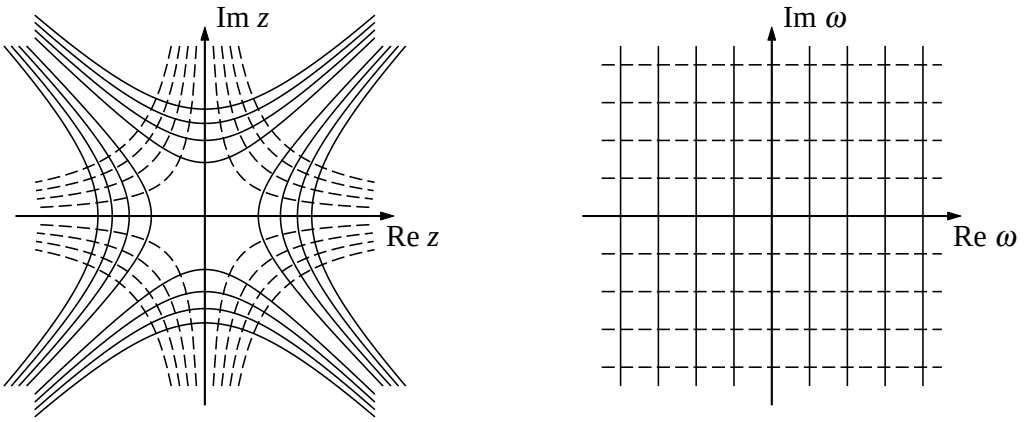

図 6.4: 互いに直交する曲線群

6.2.3　$\omega = z^{1/2}$

z を極形式で

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \qquad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

と表すと，ω は２つの値を取る（２価関数）：

$$\omega \;=\; z^{1/2} \;=\; \begin{cases} \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/2} & |\,\omega\,| = \sqrt{r}, \quad \arg\omega = \dfrac{\theta}{2} \\ -\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/2} & |\,\omega\,| = \sqrt{r}, \quad \arg\omega = \dfrac{\theta}{2} + \pi \end{cases} .$$

z 平面における半径 r の上半円は，それぞれ，ω 平面における半径 $\sqrt{r}$ の右半円と左半円に写像される（図 6.5)。変換はいずれも１対１である。

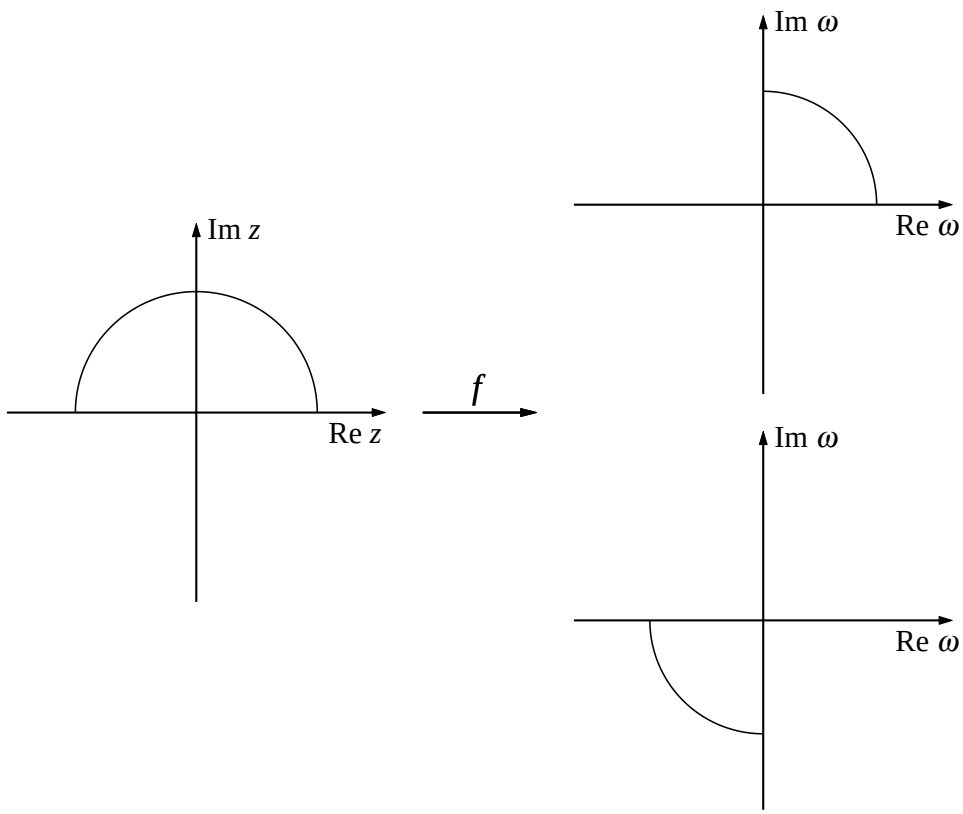

図 6.5: $\omega = z^{1/2}$ の写像

z 平面上の円の半径 r を 0 から ∞ まで連続的に増加させると，円は z 平面の上半面をおおう。このとき，$\omega = z^{1/2}$ の像は，ω 平面の右半面，及び左半面をおおう。従って，z 平面の上半面が，それぞれ，ω 平面の右半面と左半面に写されることがわかる。

6.2.4　指数関数：$\omega = \mathrm{e}^z$

$z = x + iy$ とすると，

$$\omega \;=\; \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} \qquad \text{すなわち} \qquad |\,\omega\,| \;=\; e^x, \quad \arg\omega \;=\; y$$

である。以下に，簡単な変換の例をあげる（図 5.2 も参照）。

(1)　z 平面上の直線 $x = c_1$ の像は ω 平面上の半径 e^{c_1} の円である。点 z が直線上を y が増加する向きに動くと，像は円周上を反時計まわりに動く。

一方，ω 平面上の円周上の各点には，z 平面上の直線 $x = c_1$ の上に 2π おきに並んだ無限個の点が対応する。

(2)　z 平面上の直線 $y = c_2$ の像は ω 平面上の偏角 $\varphi = y$ の半直線である。点 z が直線上を x が増加する向きに動くと，像は半直線上を原点から遠ざかる向きに動く。

(3)　z 平面上の帯状領域 $0 < y < \pi$ （$-\infty < x < \infty$）の像は ω 平面上の上半平面（$|\,\omega\,| > 0,\ 0 < \varphi < \pi$）である。境界上の点 $z = 0$ の像は $\omega = 1$，$z = \pi$ の像は $\omega = -1$ である。

(4)　z 平面上の帯状領域 $\varphi_0 < y \leq \varphi_0 + 2\pi$ は，原点を除く ω 平面全体と 1 対 1 に対応する。

z 平面上の点 $x = \mathrm{Log}\,\rho,\ y = \varphi$ が，$\omega = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ に対応する。

6.2.5　対数関数：$\omega = \log z$

指数関数 $w = \mathrm{e}^z$ で z と ω を入れ換え，z 平面の点 $z = \rho\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ を点 ω に戻す変換は

$$\omega \;=\; \log z \qquad (\,|\,z\,| > 0,\ \alpha < \arg z \leq \alpha + 2\pi\,)$$

である。特に，$\alpha = -\pi$ の場合，主枝 $\omega = \mathrm{Log}\,z$ を表す。

対数関数 $\omega = \log z$ の 1 つの分枝

$$w = \log z \qquad (\,|\,z\,| > 0,\ \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi\,)$$

は，分枝せっ線 $\varphi = \alpha$ の入った z 平面を，ω 平面の帯状領域 $\alpha < v < \alpha + 2\pi$ に 1 対 1 に写す。これは，指数関数の変換 (4) で z と ω が入れ替った関係である。

6.3　等角写像の応用

物理学では，次の条件を満たす関数 $H(x,y)$ を求める問題がよく現れる。

(1)　Laplace の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0$$

を満たす。 すなわち，$H(x,y)$ は調和関数である。

(2)　ある特定の境界条件を満たす。

このような **境界値問題** を解くときに，複素関数は次のように利用される。

(i)　ある正則関数

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

の実部 $u(x,y)$，あるいは，虚部 $v(x,y)$ が上の 2 つの条件を満たす。

(ii)　もとの問題の形のままでなく，写像によって，より簡単な形に変形して (i) を適用する。（定理 6.4 参照）

(iii)　境界条件によっては，その境界値が不変であるような等角写像を利用できることがある。（定理 6.5 参照）

定理 6.4　　正則関数

$$\omega\ =\ f(z)\ =\ u(x,y)+iv(x,y)$$

が，z 平面の領域 D を ω 平面の領域 D' に写すとする。このとき，D' 上で定義された調和関数 $h(u,v)$ に対して，

$$H(x,y)=h(u(x,y),v(x,y))$$

は D における調和関数である。

証明　正則関数 $f(z)$ は Cauchy-Riemann の方程式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

また，$h(u,v)$ は調和関数であるから，2 階の偏導関数が存在し，連続である。従って，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\\ &+ \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\\ &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=0\end{aligned}$$

となり（$h(u,v)$ は調和関数），$H(x,y)$ は調和関数であることがわかる。

定理 6.5　z 平面のなめらかな曲線 C 上で

$$\omega \;=\; f(z) \;=\; u(x,y) + iv(x,y)$$

が等角写像であり，C の像を $\varGamma$ とする。関数 $h(u,v)$ が条件

$$\varGamma \text{ 上で} \qquad h = h_0 \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} = 0$$

を満たすとき，関数 $H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$ は，これらに対応する条件

$$C \text{ 上で} \qquad H = h_0 \qquad \text{または} \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}N} = 0$$

を満たす。ここで，h_0 は実定数，$\mathrm{d}h/\mathrm{d}n$, $\mathrm{d}H/\mathrm{d}N$ は法線方向の導関数を表す。

電磁気学への応用

静電ポテンシャル ϕ を考える。電場 $\boldsymbol{E}$ は静電ポテンシャルの偏微分

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{6.7}$$

で与えられる。電荷がない空間では，電場 $\boldsymbol{E}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} \;=\; \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \;=\; 0 \tag{6.8}$$

であるので，静電ポテンシャルは３次元の Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \;=\; 0 \tag{6.9}$$

を満たすことがわかる。このような問題で，対称性などから，静電ポテンシャル ϕ が z 座標に依存しない場合，２次元の Laplace の方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{6.10}$$

を満たす。すなわち，静電ポテンシャルは調和関数である。この方程式を，与えられた境界条件のもとで解いて静電ポテンシャルが求められ，それを偏微分することによって電場が得られる。

ここで，複素変数 $z = x + iy$ の正則関数 $\omega = f(z)$ を考える。その実部を $\phi(x,y)$，虚部を $\psi(x,y)$ と表すと，

$$f(z) \;=\; \phi(x,y) + i\,\psi(x,y), \tag{6.11}$$

どちらも x と y の関数として２次元の Laplace の方程式を満たす調和関数（共役調和関数）である：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \;=\; 0, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \;=\; 0. \tag{6.12}$$

$\phi(x,y)$ が与えられているとき，$f(z)$ の正則性より，関数 $\psi(x,y)$ は定数項を除いて一意的に定まる。電場は静電ポテンシャルから，

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{6.13}$$

で与えられる。また，関数 $\psi(x,y)$ と電場の関係は，Cauchy-Riemann の方程式より

$$E_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad E_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

となる。$\phi(x,y) =$ 一定 が等ポテンシャル線を表すのに対して，$\psi(x,y) =$ 一定 は電気力線を表す。電気力線は，電場（ベクトル場）を曲線群で表したもので，曲線の接線ベクトルの方向が電場の方向に一致する。

静電ポテンシャル ϕ の勾配ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \operatorname{grad}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{6.14}$$

であり，もう一つの実関数 ψ の勾配ベクトル $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N} = \operatorname{grad}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \tag{6.15}$$

である。２つの勾配ベクトルの内積は，Cauchy-Riemann の方程式より 0 になる：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{N} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \tag{6.16}$$

よって，等ポテンシャル線と電気力線は互いに直交する。すなわち，$\phi(x,y) =$ 一定 と $\psi(x,y) =$ 一定 は互いに直交する曲線群を表している。