

# グルーオン散乱振幅と極小曲面

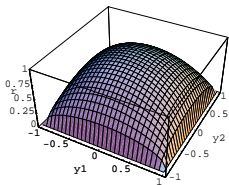
伊藤克司

東京工業大学大学院理工学研究科  
基礎物理学専攻

Nov 13, 2012@数理科学談話会 (信州大学)



LHC



極小曲面



Ising 模型

# グルーオンとは

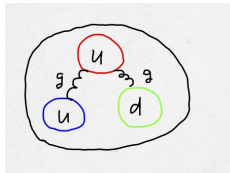
ゲージ理論 (Yang-Mills 理論): 素粒子理論の基礎

ゲージ対称性: (非可換) ゲージ群

- ▶  $SU(3)$  (強い相互作用),  $SU(2) \times U(1)$  (電弱相互作用)

QCD(quantum chromo dynamics):

$SU(3)$  ゲージ場 (グルーオン) とクォークからなる系の力学



p(陽子): uud+グルーオン

相互作用の強さ: ゲージ結合定数  $g$

- ▶ 高エネルギー: 有効結合定数小 摂動論が有効  
LHC 実験 (p-p 散乱) 大部分 (バックグラウンド) は QCD の効果: 精密な評価が必要
- ▶ 低エネルギー: 有効結合定数大 摂動論が使えない (クォークの閉じ込め)

QCD を厳密に解くのは難しい。(クレイ数学研究所ミレニアム懸賞問題)

解ける理論の例:

- ▶ 2次元 共形場理論, ゲージ理論, 重力理論
- ▶ 3次元 Chern-Simons 理論
- ▶ 4次元 位相的場の理論, Seiberg-Witten 理論 ( $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論)

予想:  $\mathcal{N} = 4$  超対称  $SU(N)$  Yang-Mills 理論の (planar large  $N$  極限は) すべての結合定数の領域で厳密に解ける。

ヨーロッパの研究プロジェクト

“Gauge Theory as an Integrable System” [gatis.desy.eu](http://gatis.desy.eu)

# $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論

- ▶ 場
  - ▶ ゲージ場  $A_\mu$  1 個
  - ▶ フェルミ場 (スピン 1/2)  $\lambda^A$  ( $A = 1, \dots, 4$ ) 4 個
  - ▶ スカラー場  $\phi^a$  6 個 ( $a = 1, \dots, 6$ )
- ▶  $\mathcal{N} = 4$  超対称性 (ボソン  $A_\mu \longleftrightarrow$  4 種類のフェルミオン)  
重力を含まない場の理論のもちうる最大の超対称性
- ▶ 共形不変性
  - ▶ 並進+ローレンツ変換  $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$
  - ▶ スケール変換  $x^\mu \rightarrow \alpha x^\mu$
  - ▶ 特殊共形変換  $x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2bx + b^2 x^2}$
- ▶ 紫外発散 (高エネルギー) がない。
- ▶ 有効結合定数  $g_{\text{YM}}(E)$  はエネルギーに応じて変化しない。
- ▶ クォークの閉じ込めなし

$\mathcal{N} = 4$  超対称 Yang-Mills 理論: 高い対称性をもった理論, しかし強結合側の計算は難しい.

Maldacena (1997)

$U(N)$   $\mathcal{N} = 4$  SYM  $\iff AdS_5 \times S^5$  上の IIB 型超弦理論

$AdS_5$ : 5次元 anti de Sitter 時空,  $\mathbf{R}^{2,4}$  時空内の超曲面

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_4^2 = -R^2$$

$S^5$ : 5次元球面

$$Y_1^2 + \cdots + Y_6^2 = R^2$$

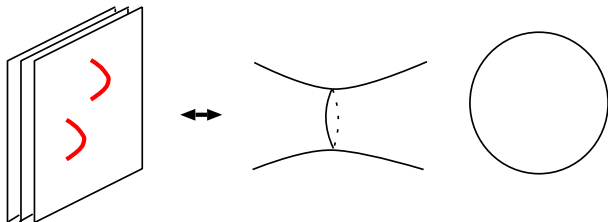


## AdS/CFT 対応 (2)

$N$  枚の平行 D3 ブレーンの低エネルギー有効理論の 2 つの解釈

- ▶ 開弦のスペクトル  $\rightarrow \mathcal{N} = 4$  SYM
- ▶ D ブレーン: 重力の源  $\rightarrow$  時空を曲げる

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + R^2 \frac{dr^2}{r^2} + R^2 d\Omega_5^2$$



- ▶ 対称性  $\mathcal{N} = 4$  SUSY + 共形対称性
  - ▶  $SO(2, 4)$  共形対称性 =  $AdS_5$  の isometry
  - ▶  $SO(6)$  R 対称性 =  $S^5$  の isometry (半径  $R$ )
- ▶ 't Hooft 結合定数  $\lambda = g_{YM}^2 N \sim \frac{R^4}{(\alpha')^2}$ 
  - ▶  $g_{YM}$  大  $\longleftrightarrow$   $R$  大 古典重力近似がよくなる
  - ▶  $g_{YM}$  小 摂動論がよい近似  $\longleftrightarrow$   $R$  小
- ▶ 物理量の間関係
  - 複合場のスケール次元  $\text{tr} \phi D^2 \phi \longleftrightarrow$  弦のスペクトル
  - 弱結合側 (場の理論) の計算と強結合側 (弦理論) の計算が一致
  - グルーオン散乱振幅  $\longleftrightarrow$  極小曲面

# グルーオン散乱振幅と BDS 予想

Planar  $L$ -ループ,  $n$ -点振幅

$$A_n^{(L)}(k_1, \dots, k_n) = A_n^{(0)}(k_1, \dots, k_n) \mathcal{M}_n^{(L)}(\epsilon)$$

- ▶ UV 有限
- ▶ IR(赤外) 発散: 低エネルギーグルーオンの寄与 (次元正則化  $D = 4 - 2\epsilon$ )
- ▶  $\mathcal{M}_n^{(L)}(\epsilon)$ : ループ振幅と tree 振幅の比

**BDS 予想** Bern-Dixon-Smirnov, Anastasiou-Bern-Dixon-Kosower  
1 ループ振幅で表すことができる。(再帰的構造)

$$\mathcal{M}_n(\epsilon) \equiv 1 + \sum_{L=1}^{\infty} a^L \mathcal{M}_n^{(L)}(\epsilon) = \exp \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} a^\ell (f^\ell(\epsilon) M_n^{(1)}(\ell\epsilon) + C^{(\ell)} + O(\epsilon)) \right)$$

$$a = \frac{N_c g^2 \mu^{2\epsilon}}{8\pi^2} (4\pi e^{-\gamma})^\epsilon, \quad f^{(\ell)}(\epsilon) = f_0^{(\ell)} + f_1^{(\ell)} \epsilon + f_2^{(\ell)} \epsilon^2$$

## 4-point amplitude

$$\ln \mathcal{M}_4 = \exp\left\{-\frac{f(\lambda)}{8}\left(\ln^2 \frac{\mu^2}{-s} + \ln^2 \frac{\mu^2}{-t}\right) - \frac{g(\lambda)}{2}\left(\ln \frac{\mu^2}{-s} + \ln \frac{\mu^2}{-t}\right) + \frac{f(\lambda)}{8} \ln^2 \frac{s}{t} + \text{const.}\right\}$$

$f(\lambda)$ : カスプ異常次元

$g(\lambda)$ : colinear 異常次元

# AdS<sub>5</sub> 上の Poincaré 計量

反 de Sitter 時空  $AdS_5$ :

$\mathbf{R}^{2,4}$  の埋め込み座標: isometry  $SO(2, 4)$

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -R^2$$

Poincaré 座標:  $(x^\mu, z)$   $\mu = 0, 1, 2, 3$

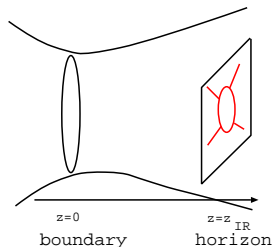
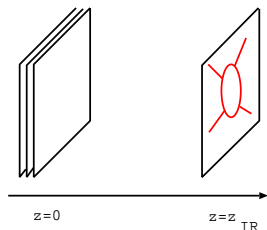
$$X^\mu = \frac{x^\mu}{z}, \quad X_{-1} + X_4 = \frac{1}{z}, \quad X_{-1} - X_4 = \frac{z^2 + x_\mu x^\mu}{z}$$

Poincaré 計量

$$ds^2 = R^2 \frac{dx_\mu dx^\mu + dz^2}{z^2}$$

半径  $R^4 = 4\pi(\alpha')^2 g_{YM}^2 N$

# AdS-CFT 対応とグルーオン散乱振幅

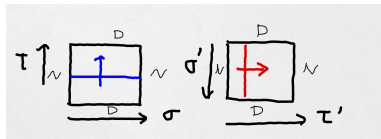


N 枚中, ある 1 枚の D3 ブレーン上のグルーオン散乱を考える.  
N 枚 D3 ブレーンから 1 枚の D3 ブレーン引き離す.  
N - 1 枚の D3 ブレーンを AdS<sub>5</sub> 時空に置き換える.  
グルーオンの固有運動量拡大  $\frac{k_i z_{IR}}{R} \gg 1$  ( $z_{IR} \rightarrow \infty$ )  
古典解が主要な寄与 **Gross-Mende**

# T-双対性

$x^\mu$  方向の T-双対変換  $x^\mu \rightarrow y^\mu$

時間座標  $\tau$ , 空間座標  $\sigma$  の交換  
Neumann b.c.  $\rightarrow$  Dirichlet b.c.

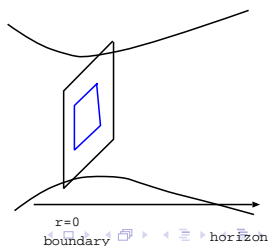
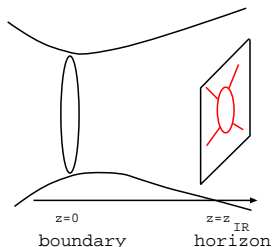


散乱振幅  $\rightarrow$  light-like な境界をもつ Wilson ループ

$$\Delta y^\mu = y_{i+1}^\mu - y_i^\mu = 2\pi k_i^\mu \quad ((\Delta y)^2 = k^2 = 0)$$

$$z \rightarrow r = \frac{R^2}{z}$$

$$ds^2 = R^2 \frac{dy^\mu dy_\mu + dr^2}{r^2}$$



グルーオン散乱振幅 = light-like な境界をもつ Wilson ループ

AdS/CFT 対応

散乱の古典作用 = light-like な境界条件をもつ弦の古典作用

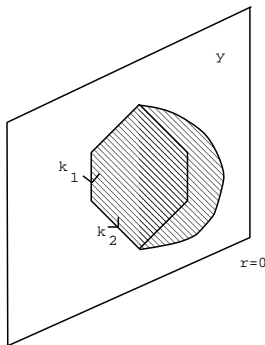
= AdS 時空内の極小曲面の面積

Nambu-Goto 作用  $G_{MN}$ : AdS 計量,  $X^M = (r, y^\mu)$ ,  $\sigma^a = (\tau, \sigma)$

$$S_{NG} = -\frac{R^2}{2\pi} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}, \quad h_{\alpha\beta} = G_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^N}{\partial \sigma^\beta}$$

- ▶  $r$  方向:  $r = \frac{R^2}{z_{IR}} \rightarrow 0$   
( $z_{IR} \rightarrow \infty$ )
- ▶  $y^\mu$  方向: light-like 線分

$$\mathcal{M}_n \sim \exp(-S_{NG}) = \exp(-\text{面積})$$





# 極小曲面方程式

静的ゲージ:  $(\tau, \sigma) = (y_1, y_2)$  で曲面  $y_0(y_1, y_2), r(y_1, y_2)$  をパラメータ付けする。

$$S_{NG} = \frac{R^2}{2\pi} \int dy_1 dy_2 \frac{\sqrt{1 + (\partial_i r)^2 - (\partial_i y_0)^2 - (\partial_1 r \partial_2 y_0 - \partial_2 r \partial_1 y_0)^2}}{r^2}$$

Euler-Lagrange 方程式 (極小曲面方程式)

$$\partial_i \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_i y_0)} \right) = 0, \quad \partial_i \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_i r)} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0,$$

非線形偏微分方程式: 解くのは難しい

## 4点振幅: kinematics

重心座標系

$$k_1 = (k, \mathbf{k})$$

$$k_2 = (-k, -\mathbf{k}')$$

$$k_3 = (k, -\mathbf{k})$$

$$k_4 = (-k, \mathbf{k}')$$

$$k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = k^2 \cos \varphi$$

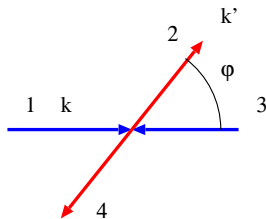
Mandelstam 変数

$$s = -(k_1 + k_2)^2 = -4k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$t = -(k_1 + k_4)^2 = -4k^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$u = -(k_1 + k_3)^2 = 4k^2$$

$$s + t + u = 0, s, t < 0:$$

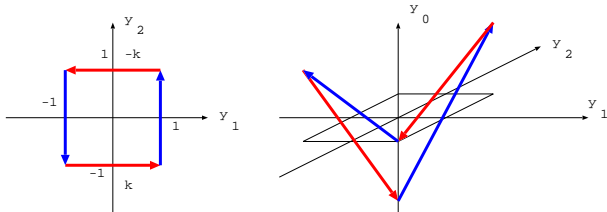


## 4点振幅: 曲面

$\text{AdS}_5$  の部分空間  $\text{AdS}_3$  ( $y_1, y_2$ ),  $y_3 = 0$

運動量  $s = t$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\mathbf{k} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{k}' = (0, 1)$



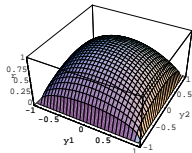
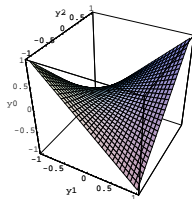
boundary conditions:  $r(\pm 1, y_2) = r(y_1, \pm 1) = 0$ ,

$y_0(\pm 1, y_2) = \pm y_2$ ,  $y_0(y_1, \pm 1) = \pm y_1$

4-point amplitude ( $s = t$ ):  $s = -(k_1 + k_2)^2$ ,  $t = -(k_1 + k_4)^2$

$$y_0 = y_1 y_2,$$

$$r = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_2^2)}$$



一般の  $(s, t)$ -解 ( $SO(2, 4)$  共形変換)  
 特殊共形  $(b)$ +スケール変換  $(a)$

$$r' = \frac{ar}{1 + by_0}, \quad y'_0 = \frac{a\sqrt{1 + b^2}y_0}{1 + by_0}, \quad y'_1 = \frac{ay_1}{1 + by_0}, \quad y'_2 = \frac{ay_2}{1 + by_0}$$

$$-s(2\pi)^2 = \frac{8a^2}{(1-b)^2}, \quad -t(2\pi)^2 = \frac{8a^2}{(1+b)^2}$$

極小曲面の面積は発散する (境界と尖点 (cusp))

▶ 次元正則化

D3-ブレーン  $\implies$  D $p$ -ブレーン  $p = 3 - 2\epsilon$



$$\begin{aligned} S &= -\frac{2^\epsilon \pi^\epsilon \mu^\epsilon \sqrt{\Gamma(2+\epsilon)} \lambda}{2\pi} \left( \frac{\pi \Gamma(-\frac{\epsilon}{2})^2}{\Gamma(\frac{1-\epsilon}{2})^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}; b^2\right) + 1 \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} \left[ 2 \left( \frac{\mu^2}{(-t)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + 2 \left( \frac{\mu^2}{(-s)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon} (1 - \log 2) \left[ \left( \frac{\mu^2}{(-t)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} + \left( \frac{\mu^2}{(-s)} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right] - \left( \frac{1}{2} \log \frac{s}{t} \right)^2 \right\} + \text{定数} \end{aligned}$$

BDS 公式と一致

# BDS 予想と remainder 関数

Alday-Maldacena 解の拡張:

$n$  点振幅の解を求めるのは難しい. 非線形偏微分方程式の解  
振幅の満たすべき性質

- ▶ 外線運動量の共形対称性 (双対共形対称性)  $\iff$  極小曲面  $\subset \text{AdS}_5$  の isometry
- ▶ BDS 公式は双対共形不変性をみたす。
- ▶ 2 点間の距離  $r_{ij} = |x_i - x_j|$ : 並進不変, 回転不変  
距離の比  $r_{ij}/r_{kl}$ : スケール不変  
複比  $r_{ij}r_{kl}/(r_{ik}r_{jl})$ : 共形変換で不変
- ▶ BDS 公式は外線運動量の複比の関数の不定性がある。

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{BDS} + R_n, \quad \text{remainder 関数}$$

remainder 関数  $R_n$ :

- ▶ 隣接点  $x_{i,i+1}^2 = 0$   
 $n = 4, 5$  点振幅 複比は作れない

$$R_n = 0, \quad n = 4, 5$$

- ▶  $n = 6$  2 ループ計算  $R_6$  が存在 (弱結合側)
- ▶  $n \geq 6$  強結合側では?

# AdS<sub>3</sub> 極小曲面と Hitchin 方程式

AdS<sub>3</sub> 時空中の弦の運動

$(z, \bar{z})$ : 世界面の (複素) 座標

埋め込み座標  $\vec{Y}(z, \bar{z}) = (Y_{-1}, Y_0, Y_1, Y_2) \in \mathbf{R}^{2,2}$

$$\vec{Y} \cdot \vec{Y} := -Y_{-1}^2 - Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 = -1$$

作用 ( $\vec{Y}_z = \partial_z \vec{Y}$ ,  $\vec{Y}_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \vec{Y}$ ,  $\lambda$ : Lagrange 未定乗数)

$$S = \int d^2 z \left\{ \vec{Y}_z \cdot \vec{Y}_{\bar{z}} + \lambda (\vec{Y} \cdot \vec{Y} + 1) \right\}$$

運動方程式

$$\vec{Y}_{z\bar{z}} - (\vec{Y}_z \cdot \vec{Y}_{\bar{z}}) \vec{Y} = 0$$

世界面の共形不変性  $\implies$  Virasoro 拘束条件

$$\vec{Y}_z^2 = \vec{Y}_{\bar{z}}^2 = 0$$



[Pohlmeyer CMP 46 (1976) 207; de Vega-Sanchez PRD 47 (1993) 3394]

弦座標  $\vec{Y} \rightarrow \alpha(z, \bar{z})$  (real),  $p(z)$ (holomorphic),  $\bar{p}(\bar{z})$  (anti-hol)

$$e^{2\alpha} = \frac{1}{2} \vec{Y}_z \cdot \vec{Y}_{\bar{z}}$$

$$N_i = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \epsilon_{ijkl} Y^j Y_z^k Y_{\bar{z}}^l, \quad \epsilon_{(-1)012} = +1,$$

$$p = -\frac{1}{2} \vec{N} \cdot \vec{Y}_{zz} \quad \bar{p} = \frac{1}{2} \vec{N} \cdot \vec{Y}_{\bar{z}\bar{z}}$$

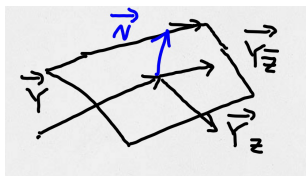
$\vec{N}$ : 法線ベクトル  $\vec{N} \cdot \vec{Y} = \vec{N} \cdot \vec{Y}_z = \vec{N} \cdot \vec{Y}_{\bar{z}} = 0, \quad \vec{N} \cdot \vec{N} = 1$

面積  $A = 2 \int d^2 z e^{2\alpha}$

動標構ベクトル

$$\vec{q}_1 = \vec{Y}, \quad \vec{q}_2 = e^{-\alpha} \vec{Y}_{\bar{z}},$$

$$\vec{q}_3 = e^{-\alpha} \vec{Y}_z, \quad \vec{q}_4 = \vec{N}.$$



## 動標構の発展方程式

$$\partial_z \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vec{q}_3 \\ \vec{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^\alpha & 0 \\ 2e^\alpha & -\alpha_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z & -2pe^{-\alpha} \\ 0 & pe^{-\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vec{q}_3 \\ \vec{q}_4 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{\bar{z}} \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vec{q}_3 \\ \vec{q}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\bar{z}} & 0 & -2\bar{p}e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & -\alpha_{\bar{z}} & 2e^\alpha \\ 0 & 0 & \bar{p}e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vec{q}_3 \\ \vec{q}_4 \end{pmatrix}$$

スピノル表示:  $(a, \dot{a})$ : 時空座標

$$SO(2, 2) \simeq SL(2, R)_L \times SL(2, R)_R$$

$$Y_{a\dot{a}} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{-1} + Y_2 & Y_1 - Y_0 \\ Y_1 + Y_0 & Y_{-1} - Y_2 \end{pmatrix}$$

$$W_{\alpha\dot{\alpha}, a\dot{a}} = \begin{pmatrix} W_{11, a\dot{a}} & W_{12, a\dot{a}} \\ W_{21, a\dot{a}} & W_{22, a\dot{a}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (q_1 + q_4)_{a\dot{a}} & (q_2)_{a\dot{a}} \\ (q_3)_{a\dot{a}} & (q_1 - q_4)_{a\dot{a}} \end{pmatrix},$$

$W_{\alpha\dot{\alpha},a\dot{a}}$  の発展方程式:

$$\partial_z W_{\alpha\dot{\alpha},a\dot{a}} + (B_z^L)_\alpha{}^\beta W_{\beta\dot{\alpha},a\dot{a}} + (B_z^R)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} W_{\alpha\beta,a\dot{a}} = 0,$$

$$\partial_{\bar{z}} W_{\alpha\dot{\alpha},a\dot{a}} + (B_{\bar{z}}^L)_\alpha{}^\beta W_{\beta\dot{\alpha},a\dot{a}} + (B_{\bar{z}}^R)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} W_{\alpha\beta,a\dot{a}} = 0,$$

$$B_z^L = B_z(1), \quad B_z^R = UB_z(i)U^{-1},$$

$$B_{\bar{z}}^L = B_{\bar{z}}(1), \quad B_{\bar{z}}^R = UB_{\bar{z}}(i)U^{-1}$$

$$B_z(\zeta) = \frac{\alpha_z}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha \\ e^{-\alpha p} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{\bar{z}}(\zeta) = -\frac{\alpha_{\bar{z}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \zeta \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha \bar{p}} \\ e^\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} \\ e^{\frac{3\pi i}{4}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\zeta$ : spectral parameter  $\zeta = 1$  (left)  $\zeta = i$  (right)

行列  $W_{\alpha\dot{\alpha},a\dot{a}}$  の各要素は

$$W_{\alpha\dot{\alpha},a\dot{a}} = \psi_{\alpha,a}^L \psi_{\dot{\alpha},\dot{a}}^R$$

と分解される。 $\psi$  の発展方程式

$$\begin{aligned} \partial_z \psi_{\alpha,a}^L + (B_z^L)_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta,a}^L &= 0, & \partial_{\bar{z}} \psi_{\alpha,a}^L + (B_{\bar{z}}^L)_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta,a}^L &= 0, \\ \partial_z \psi_{\dot{\alpha},\dot{a}}^R + (B_z^R)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta},\dot{a}}^R &= 0, & \partial_{\bar{z}} \psi_{\dot{\alpha},\dot{a}}^R + (B_{\bar{z}}^R)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta},\dot{a}}^R &= 0. \end{aligned}$$

可積分条件

$$\partial B_{\bar{z}}^L - \bar{\partial} B_z^L + [B_z^L, B_{\bar{z}}^L] = 0, \quad \partial B_{\bar{z}}^R - \bar{\partial} B_z^R + [B_z^R, B_{\bar{z}}^R] = 0,$$

$\implies$  generalized sinh-Gordon 方程式

$$\bar{\partial} \partial \alpha(z, \bar{z}) - 2e^{2\alpha(z, \bar{z})} + |p(z)|^2 e^{-2\alpha(z, \bar{z})} = 0$$

L,R 2個の方程式系はスペクトラルパラメーター $\zeta$ の導入により  
次の方程式系に帰着

$$\left(\partial_z + B_z(\zeta)\right)\psi(z, \bar{z}; \zeta) = 0, \quad \left(\partial_{\bar{z}} + B_{\bar{z}}(\zeta)\right)\psi(z, \bar{z}; \zeta) = 0,$$

$\zeta = 1$  (left)  $\zeta = i$  (right)

$$B_z(\zeta) = A_z + \frac{1}{\zeta}\Phi_z, \quad B_{\bar{z}}(\zeta) = A_{\bar{z}} + \zeta\Phi_{\bar{z}}$$

$\implies$   $SU(2)$  Hitchin 方程式:

$$D_{\bar{z}}\Phi_z = D_z\Phi_{\bar{z}} = 0, \quad F_{z\bar{z}} + [\Phi_z, \Phi_{\bar{z}}] = 0$$

面積

$$A = 2 \int d^2z \operatorname{Tr} \Phi_z \Phi_{\bar{z}} = 4 \int d^2z e^{2\alpha}$$

座標変換  $w = w(z)$ :  $dw = \sqrt{p(z)}dz$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \frac{1}{4} \log p\bar{p}$$

+ゲージ変換

$$\hat{\psi} = g\psi, \quad g = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma^3} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma^2} e^{\frac{1}{8} \log \frac{p}{\bar{p}} \sigma^3}$$

により, 方程式系は

$$\left(\partial_w + \hat{B}_w\right) \hat{\psi} = 0, \quad \left(\partial_{\bar{w}} + \hat{B}_{\bar{w}}\right) \hat{\psi} = 0,$$

$$\hat{B}_w(\zeta) = \frac{\hat{\alpha}_w}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} \cosh \hat{\alpha} & i \sinh \hat{\alpha} \\ i \sinh \hat{\alpha} & -\cosh \hat{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_{\bar{w}}(\zeta) = -\frac{\hat{\alpha}_{\bar{w}}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \zeta \begin{pmatrix} \cosh \hat{\alpha} & -i \sinh \hat{\alpha} \\ -i \sinh \hat{\alpha} & -\cosh \hat{\alpha} \end{pmatrix}.$$

に帰着。generalized sine-Gordon 方程式は sine-Gordon 方程式になる。

$$\partial_w \partial_{\bar{w}} \hat{\alpha} - e^{2\hat{\alpha}} + e^{-2\hat{\alpha}} = 0$$

# 漸近解

- ▶  $\hat{\alpha} \rightarrow 0$  ( $|w| \rightarrow \infty$ )
- ▶  $p(z)$ :  $n - 2$  次多項式 ( $2n$  点振幅:  $2n$  角形)

$|w|$  大のとき方程式は

$$(\partial_w - \zeta^{-1} \sigma_3) \hat{\psi} = 0, \quad (\partial_{\bar{w}} - \zeta \sigma_3) \hat{\psi} = 0,$$

に帰着。2つの解

$$\hat{\eta}_+ = \begin{pmatrix} e^{\left(\frac{w}{\zeta} + \bar{w}\zeta\right)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\left(\frac{w}{\zeta} + \bar{w}\zeta\right)} \end{pmatrix}.$$

一方は発散 (big 解)、一方は収束 (small 解)。small 解は unique に定まる。  $w = |w|e^{i\theta}$ ,  $\zeta = |\zeta|e^{i\alpha}$ ,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w}{\zeta} + \bar{w}\zeta\right) = |w| \left(\frac{1}{|\zeta|} + |\zeta|\right) \cos(\theta - \alpha)$$

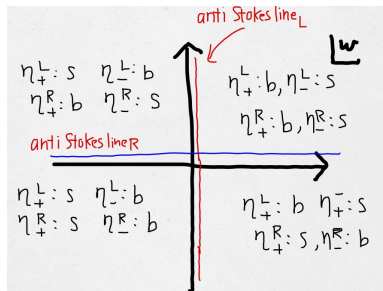
- ▶  $\cos(\theta - \alpha) < 0$   $\hat{\eta}_+$ : small  $\hat{\eta}_-$ : large
- ▶  $\cos(\theta - \alpha) > 0$   $\hat{\eta}_-$ : small  $\hat{\eta}_+$ : large

# 4点振幅解 (Stokes 現象)

$$p(z) = 1, \hat{\alpha} = 0, w = z$$

$$\text{Left } (\zeta = 1) \quad \hat{\eta}_+^L = \begin{pmatrix} e^{w+\bar{w}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta}_-^L = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-(w+\bar{w})} \end{pmatrix}.$$

$$\text{right } (\zeta = i) \quad \hat{\eta}_+^R = \begin{pmatrix} e^{\frac{w-\bar{w}}{i}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\eta}_-^R = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{w-\bar{w}}{i}} \end{pmatrix}.$$



各 Stokes セクター  
Poincaré 座標

$$r = \sqrt{2}e^{-u}, x^+ = e^{-v-u}, x^- = -e^{v-u}$$

$$u = w + \bar{w} + \frac{w-\bar{w}}{i}$$

$$v = -(w + \bar{w}) + \frac{w-\bar{w}}{i},$$

$$x^+ x^- = -r^2: r \rightarrow 0 \text{ ㇿ cusp}$$



# Remainder 関数: $AdS_3$ の $2n$ 点振幅

$2n$  点振幅:  $n$  個の Stokes セクター

$s_i(\zeta)$ :  $i$  番目の Stokes セクターにおける small 解

$s_i, s_{i+1}$ :  $i$  番目の Stokes セクターにおける基本解

small 解  $s_i(\zeta)$  の Wronski 行列式

$$\langle s_i, s_j \rangle(\zeta) = \epsilon_{\alpha\beta} s_i^\alpha s_j^\beta, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \epsilon_{12} = 1$$

運動量の複比 = cusp 点の複比

$$\chi_{ijkl}(\zeta) = \frac{\langle s_i, s_j \rangle \langle s_k, s_l \rangle}{\langle s_i, s_k \rangle \langle s_j, s_l \rangle}$$

$$\chi_{ijkl}(\zeta = 1) = \frac{x_{ij}^+ x_{kl}^+}{x_{ik}^+ x_{jl}^+}, \quad \chi_{ijkl}(\zeta = i) = \frac{x_{ij}^- x_{kl}^-}{x_{ik}^- x_{jl}^-}$$

# 熱力学的ベーテ仮説と remainder 関数

small 解  $s_i(\zeta)$  の Wronski 行列式

$$\langle s_i, s_j \rangle(\zeta) = \epsilon_{\alpha\beta} s_i^\alpha s_j^\beta, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \epsilon_{12} = 1$$

Plücker 恒等式

$$\langle s_i, s_j \rangle \langle s_k, s_l \rangle + \langle s_i, s_l \rangle \langle s_j, s_k \rangle + \langle s_i, s_k \rangle \langle s_l, s_j \rangle = 0$$

特に  $(i, j, k, l) = (k+1, -k, k, -k-1)$  とし

$$T_{2k+1}(\zeta) = \langle s_{-k-1}, s_{k+1} \rangle(\zeta), \quad T_{2k}(\zeta) = \langle s_{-k-1}, s_k \rangle^+$$

$(f^\pm(\zeta) = f(e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\zeta))$  の場合, Plücker 恒等式は

$$T_s^+ T_s^- = T_{s-1} T_{s+1} + 1$$

の形 (T-系) に表すことができる。

Y-関数

$$Y_s(\theta) = T_{s+1}T_{s-1}, \quad \zeta = e^\theta$$

のみたす関数関係式 (Y-系)

$$Y_s^+ Y_s^- = (1 + Y_{s+1})(1 + Y_{s-1})$$

Y-関数の性質 (Zamolodchikov)

- ▶  $Y_s(\theta)$  は  $|\operatorname{Im}\theta| \leq \frac{\pi}{2}$  で解析的
- ▶  $Y_s(\theta) \rightarrow -m_s \cosh \theta$  ( $\theta \rightarrow \pm\infty$ )
- ▶  $Y_s(\theta) = Y_s(-\theta)$

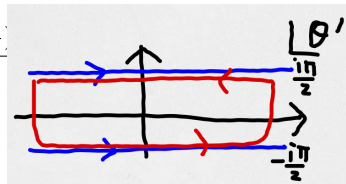
# TBA 方程式

$$l_s = \log \left( \frac{Y_s}{e^{-m_s \cosh \theta}} \right)$$

$$\begin{aligned} l_s^+ + l_s^- &= \log Y_s^+ + \log Y_s^- + m_s \cosh(\theta + i\frac{\pi}{2}) + m_s \cosh(\theta - i\frac{\pi}{2}) \\ &= \log(1 + Y_{s+1})(1 + Y_{s-1}) \end{aligned}$$

積分核  $K(\theta) = \frac{1}{2\pi \cosh \theta}$ , 畳み込み  $f * g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} f(\theta - \theta')g(\theta')$

$$\begin{aligned} K * (l_s^+ + l_s^-) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{l_s(\theta' + i\frac{\pi}{2}) + l_s(\theta' - i\frac{\pi}{2})}{\cosh(\theta - \theta')} \\ &= \int_{\gamma} \frac{dy}{2\pi i} \frac{l_s(y)}{\sinh(\theta - y)} = l_s(\theta) \end{aligned}$$



→ TBA 方程式

$$\log Y_s(\theta) = -m_s \cosh \theta + K * \log(1 + Y_{s+1})(1 + Y_{s-1})$$

# Remainder 関数 (強結合)

面積

$$\text{Area}_{2n} = 2 \int d^2 z e^{2\alpha} = A_{\text{free}} + A_{\text{period}} + A_{\text{BDS-like}} + A_{\text{div}}$$

remainder 関数 ( $\text{Area}_{2n} = M_{\text{BDS}} + R_{2n}$ )

$$R_{2n} = A_{\text{free}} + A_{\text{period}} + \Delta A_{\text{BDS}}$$

- ▶ TBA 自由エネルギー

$$A_{\text{free}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sum_{s=1}^{n-3} |m_s| \cosh \theta \log(1 + Y_s(\theta))$$

- ▶ period term  $y^2 = p(z)$  の周期積分

$$A_{\text{period}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \sum_{j=k}^{(n-3)/2} (-1)^{j+k} (m_{2j} \bar{m}_{2k-1} + \bar{m}_{2j} m_{2k-1})$$

- ▶  $\Delta A_{\text{BDS}}$  : 複比の関数

$$\Delta A_{\text{BDS}} = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \log \frac{c_{i,j}^+}{c_{i,j+1}^+} \log \frac{c_{i,j-1}^-}{c_{i,j}^-}, \quad c_{i,j}^{\pm} = \frac{x_{i+2,i+1}^{\pm} x_{i+4,i+3}^{\pm} \cdots x_{j,i}^{\pm}}{x_{i+1,i}^{\pm} x_{i+3,i+2}^{\pm} \cdots x_{j,j-1}^{\pm}}$$

## [Hatsuda-KI-Satoh]

$$\begin{aligned}
 R_{2n} &= \frac{7\pi}{12}(n-2) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \sum_{s=1}^{n-3} |m_s| \cosh \theta \log(1 + \tilde{Y}_s(\theta)) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \sum_{j=k}^{(n-3)/2} (-1)^{j+k} (m_{2j} \tilde{m}_{2k-1} + \tilde{m}_{2j} m_{2k-1}) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{(n-3)/2} \sum_{k=1}^{2n} \log \frac{T_s^{[k-1]}}{T_{s-1}^{[k]}} \log \frac{T_s^{[k]}}{T_{s-1}^{[k-1]}} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \log \frac{T_{(n-3)/2}^{[k-1]}}{T_{(n-3)/2}^{[k+n]}} \log \frac{T_{(n-3)/2}^{[k]}}{T_{(n-3)/2}^{[k+n-1]}}
 \end{aligned}$$

- ▶ 数値計算
- ▶ 2次元 CFT の可積分摂動 (8点振幅: Ising 模型の可積分摂動)

2-loop remainder 関数 [Heslop-Khoze,  
Gaiotto-Maldacena-Sever-Vieira]

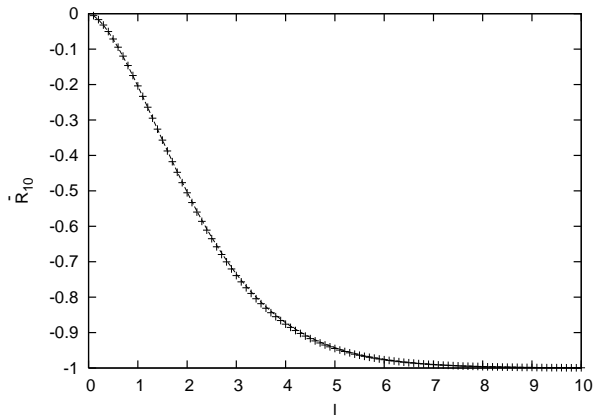
$$R_{10}^{2\text{-loop}} = -\frac{\pi^4}{12} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \log(u_k) \log(u_{k+1}) \log(u_{k+2}) \log(u_{k+3})$$

rescaled remainder 関数

$$\bar{R}_{2n} = \frac{R_{2n} - R_{2n,\text{UV}}}{R_{2n,\text{UV}} - R_{2n,\text{IR}}}$$

$\bar{R}_{2n} \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow 0$ ) (UV)  $\bar{R}_{2n} \rightarrow -1$  ( $l \rightarrow \infty$ ) (IR) と規格化

# 極小曲面 vs 2-loop



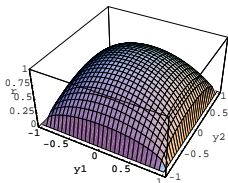
- ▶ +: 強結合, 破線: 2-loop
- ▶ CFT による計算  $\bar{R}_{10} = \bar{C}_{\frac{5}{8}} |Y^{(2)}|^2 l^{8/5} + \dots$

$$\text{CFT } \bar{C}_{\frac{5}{8}} = -0.0441916, \bar{C}_{\frac{5}{8}}^{2-loop} = -0.0449039$$





LHC



極小曲面



Ising 模型

グルーオン散乱振幅  $\iff$  極小曲面  $\iff$  TBA 方程式

- ▶ AdS/CFT 対応
- ▶ 古典-量子可積分系対応