物理学のフロンティア (第 7 回) レポート問題

2018 年 7 月 3 日 (火)
担当: 伊藤克司

問題 1　同一質量 m の粒子 1,2 が散乱し, 同じ質量 m の粒子 3,4 になる過程を考える。粒子 $i(i=1,2,3,4)$ の 4 元運動量を $p_i^\mu = (E_i/c, \mathbf{p}_i)$ とする。$s=-(p_1+p_2)^2$, $t=-(p_1-p_3)^2$, $u=-(p_1-p_4)^2$ とするとき $s+t+u$ を計算し m で表せ。

問題 2　ガンマ関数の積分表示

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{u-1}, \quad \mathrm{Re} u > 0 \tag{1}$$

に基づいて以下の問いに答えよ。

1. $\Gamma(u)$ を複素平面 u へ解析接続する．このとき $\Gamma(u)$ は $u=-n$ $(n=0,1,2,\dots)$ に極をもつ。$u=-n$ における留数を求めよ。
2. u が大きいとき,
$$\Gamma(u) \sim \sqrt{2\pi} u^{u-\frac{1}{2}} e^{-u} \tag{2}$$
となることを鞍点法を用いて示せ。
3. Veneziano 振幅 $A(s,t) = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}$, $\alpha(x) := \alpha_0 + \alpha' x$ の
   (a) $\alpha(s) \to n$ $(n=0,1,2,\dots)$
   (b) $s \to \infty$

   における振舞いについて議論せよ。ただし t は固定する。

問題 3　Riemann の zeta 関数の積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \mathrm{Re} s > 1 \tag{3}$$

に基づいて, $\zeta(s)$ を複素平面に解析接続し,

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \tag{4}$$

となることを示せ。

注意　提出に当たっては以下の点に注意せよ。

- 学籍番号 氏名とともに" 第 7 回 伊藤先生レポート" と明記すること
- 提出先: 教養科目物理学演習事務室 (西 3 号館 3 階 312 号室) 前レポートボックス (番号 3)
- 提出〆切 7/23(月)13:20