

# T-双対性について

今村 洋介

平成 24 年 6 月 11 日

## 概要

ゲージ理論のブレーン構成を考えるときに便利な NS5-ブレーンを含む T-双対性についてまとめたものです。かなりいい加減なところもあります。

## 目次

<b>1</b>	<b>超重力理論および弦理論の T-双対性</b>	<b>2</b>
1.1	基本的事項	2
1.2	Buscher 則	4
1.3	超重力理論の T-双対性	6
1.4	D-ブレーンの作用とその T-双対性	8
<b>2</b>	<b>Taub-NUT 空間</b>	<b>10</b>
2.1	Kaluza-Klein monopole	11
2.2	特異点	13
2.3	複素構造	15
2.4	複素座標	17
2.5	ブローアップ	20
2.6	零モード	22
2.7	BPS 曲面	23
<b>3</b>	<b>NS5-branes の T-双対性</b>	<b>25</b>
3.1	NS5-brane 解	25
3.2	巻きついた NS5-brane	27
3.3	巻きついていない NS5-brane	27
3.4	中心電荷	29
3.5	NS5-brane 上の場	32
<b>4</b>	<b>Geometric engineering</b>	<b>35</b>
4.1	NS5-D4 system	36
4.2	Glueball superpotential	42
4.3	曲がった NS5-ブレーンと Calabi-Yau	43
4.4	Gukov-Vafa-Witten ポテンシャル	47
4.5	ケーラーポテンシャル	49
4.6	ワープ因子	50
4.7	Elliptic model	53

5	トーリック Calabi-Yau	57
5.1	トーリック図形	57
5.2	web 図形	59
5.3	シンプレクティック座標	61
5.4	トーリック多様体の例	63
5.5	正則関数とチャージ	67
6	ブレンタイリング	69
6.1	NS5-系との双対性	69
6.2	bipartite グラフ	71
6.3	Brane tiling 上のゲージ理論	73
6.4	Zig-zag paths	76
6.5	Elliptic model との双対性	76
6.6	メソン演算子とサイクル	78
6.7	$U(1)$ 対称性とフロー	80
6.8	アノマリーのない $U(1)$ 対称性	81
6.9	パーフェクトマッチングとアイソメトリー	83
6.10	メソン演算子とモジュライ空間	84

## 1 超重力理論および弦理論の T-双対性

このノートで考えるブレン系と Calabi-Yau の間の関係は T-双対性を通じた関係である。そこでこの節では後の節での議論における準備として古典的な超重力理論のレベルでの T-双対性の公式を与えておく。

### 1.1 基本的事項

T-双対性は二つのコンパクト化された弦理論の間の双対性である。最も簡単な  $S^1$  コンパクト化の場合について、いくつかのオブジェクトの間の関係をまとめておこう。

もっとも古くから知られているのは Kaluza-Klein モードと弦の巻き付きモードの関係である。

$$\text{Kaluza-Klein modes} \leftrightarrow \text{Winding strings} \quad (1)$$

Kaluza-Klein モードは、内部空間方向の運動量を持つモードの事である。周期が  $R$  の  $S^1$  でコンパクト化されたとき、粒子の波動関数  $\psi(x)$  には境界条件  $\psi(x + 2\pi R) = \psi(x)$  が課される。この境界条件により、並進演算子  $\hat{p} = -i\partial_x$  の固有値は次のように離散的な値をとる。

$$p = \frac{1}{R}m, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

運動量がこの値をとるということは、エネルギーが少なくとも

$$E = \frac{|m|}{R} \quad (3)$$

になることを意味している。

弦理論の場合に特徴的なのは、カルツァクラインモードだけではなく、弦の巻きつきモードも離散的なスペクトルを生成する点である。弦の張力を

$$T_{\text{str}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \quad (4)$$

としよう。半径が  $R$  の  $S^1$  に  $w$  回巻きつくと、そのエネルギーは最低でも

$$E = \frac{1}{2\pi l_s^2} \times 2\pi |w|R = \frac{|w|R}{l_s^2} \quad (5)$$

となる。

第一量子化された弦の質量スペクトルはカルツァクライン運動量の寄与 (3) 巻きつきの寄与 (5) そして弦の振動の寄与を組み合わせることによって次のように与えられる。

$$M = \left[ \left( \frac{m}{R} \right)^2 + \left( \frac{Rw}{l_s^2} \right)^2 + \frac{2}{l_s^2} N \right]^{1/2} \quad (6)$$

$N$  は弦の励起を表す個数演算子であり非負整数の固有値を与える。(ボゾンの弦のようにタキオン状態を含む場合には負にもなりえるが、ここではそのような場合は考えない。) (1) にあるように、T-duality 変換は、巻き付きモードと Kaluza-Klein モードを入れ替える。このとき (3) と (5) が与えるスペクトルが入れ替わるためには、半径  $R$  を次の式によって与えられる  $R'$  に置き換えればよい。

$$RR' = l_s^2 \quad (7)$$

内部空間のサイズがこのような関係にある二つの  $S^1$  コンパクト化された弦理論の等価性は、第一量子化された弦のスペクトル (6) だけではなく、弦の相互作用や、そのほかのブレーンを含めた場合でも成り立つと考えられている。

弦の世界面上の理論の立場では、コンパクト化された方向を表す世界面上のボゾン場を  $X(\sigma, \tau)$  とすると、T-双対性は次の変換として表される。

$$\partial_+ X \rightarrow \partial_+ X, \quad \partial_- X \rightarrow -\partial_- X. \quad (8)$$

ただし、光錐座標  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$  を導入した。これは閉弦の右回りモードのみパリティ変換を行うことを表しており、超弦の場合は対応する超対称電荷のカイラリティが反転する。このため、T-duality 変換は IIA 型と IIB 型を入れ替える。 $\tau$  微分および  $\sigma$  微分を用いれば、(8) は次のように  $\tau$  微分と  $\sigma$  微分の入れ替えとして表される。

$$\partial_\tau X \rightarrow \partial_\sigma X, \quad \partial_\sigma X \rightarrow \partial_\tau X. \quad (9)$$

この変換は、開弦の端点における二種類の境界条件、Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を入れかえるので、D-brane は T-duality 変換のもとで次のように変換される。

$$\text{Wrapped D}p\text{-branes} \leftrightarrow \text{Unwrapped D}(p-1)\text{-branes} \quad (10)$$

D-brane のほかに、II 型弦理論には NS5-brane と呼ばれるブレーンが存在する。これは巻きついている場合と巻きついていない場合に以下のように変換される。

$$\text{Wrapped NS5-branes} \leftrightarrow \text{Unwrapped NS5-branes} \quad (11)$$

$$\text{Unrapped NS5-branes} \leftrightarrow \text{Kaluza-Klein monopole} \quad (12)$$

これらの変換は  $N=1$  ゲージ理論を実現するブレーン系と Calabi-Yau の関係を議論するうえで重要であるので、あとで詳しく説明する。

この節を終わる前に、単位系について触れておく。このノートでは弦の張力が定数であるような計量を用いる。すなわち、弦の作用のボゾン部分が次のように与えられ、 $l_s$  が定数であるような計量を取る。これは弦計量 (string metric) と呼ばれる。

$$S_{\text{str}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det G} \quad (13)$$

さらに長さの単位を次のように決める。

$$2\pi l_s = 1. \quad (14)$$

この単位系の利点は、ブレーンの張力が以下のように簡単な形になることである。

$$T_{\text{str}} = \frac{1}{2\pi l_s^2} = 2\pi, \quad T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1} g_{\text{str}}} = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}}, \quad T_{\text{NS5}} = \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^6 g_{\text{str}}^2} = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^2}. \quad (15)$$

(14) の単位系では T-双対性の半径の関係式 (7) に  $RR' = 1/(2\pi)^2$  のように余計な  $2\pi$  が現れてしまうが、半径の代わりに周の長さ  $L = 2\pi R$  および  $L' = 2\pi R'$  を用いることにしておけば次のようにきれいな形になる。

$$LL' = 1. \quad (16)$$

そこで、コンパクト化のサイズを表す際には、主に半径ではなく周期を用いることにする。

## 1.2 Buscher 則

T-duality のもとでの世界面上の場の変換 (9) は、世界面上の電磁双対変換

$$\partial_\alpha X \rightarrow \eta_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} \partial_\gamma X \quad (17)$$

と解釈することができる。ただし

$$-\eta_{\tau\tau} = \eta_{\sigma\sigma} = \epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon^{\tau\sigma} = 1 \quad (18)$$

のように世界面上の計量、反対称テンソルを定義する。弦を量子化することが難しいような曲がった背景に対しても、(17) のような双対変換として背景の場に対する T-duality 変換の公式を導くことができる [1]。

10 次元時空の座標を  $X^M = (X^i, X^9 \equiv Y)$  とする。この時空を運動する弦の作用は non-linear sigma model (NLSM) で記述することができ、そのボゾン部分は次のように与えられる。

$$S[X^i, \partial_\alpha X^i, \partial_\alpha Y] = \int d^2\sigma \left( -\frac{T_{\text{str}}}{2} G_{MN} \partial_\alpha X^M \partial^\alpha X^N + \frac{2\pi}{2} B_{MN} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \right) \quad (19)$$

$G_{MN}$  および  $B_{MN}$  は  $X^i$  の関数であり、背景時空の計量及び反対称テンソル場を表す。 $S$  の引数にも示されているようにこの作用は  $Y$  を微分の形だけで含み、微分の無い  $Y$  は現れないと仮定しよう。これは  $G_{MN}$  および  $B_{MN}$  が  $Y$  に依存しないことを意味する。さらに、 $Y$  方向が周期 1 でコンパクト化されている場合を考える。このとき、弦の巻きつき数  $w_y$  は次のように与えられる。

$$w_y = \oint \partial_\sigma Y d\sigma \in \mathbf{Z}. \quad (20)$$

積分は、閉弦を一周するように行う。

世界面上の場  $Y$  に対する双対変換を行うために、まず作用 (19) を次のように書き換える。

$$S' = S[X^i, \partial_\alpha X^i, F_\alpha] + \int d^2\sigma 2\pi \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha Z F_\beta. \quad (21)$$

右辺第 1 項は (19) に含まれる  $\partial_\alpha Y$  を補助場  $F_\alpha$  で置き換えたものである。第 2 項に含まれる場  $Z$  が  $Y$  に対する双対場であり、周期 1 でコンパクト化されているとする。

(21) が実際に (19) と等価であることを示しておこう。 $Z$  に対する運動方程式は  $\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha F_\beta = 0$  を与えるから、これを解くことによって  $F_\alpha = \partial_\alpha Y$  が得られ、(21) にこの解を代入すればもとの作用 (19) が得られる。ただし、上記の運動方程式は局所的な条件しか与えないから、 $Y$  の境界条件 (周期性) はこれだけ

では決まらない。\$Y\$ の境界条件は、\$Z\$ 方向のカルツァクライン運動量の量子化条件によって与えられる。実際 (20) で定義される \$Y\$ 空間での巻き付き数は \$Z\$ のゼロモードに対する正準運動量 \$p\_z\$ にほかならない。

$$p_z = \int d\sigma \frac{\delta S}{\delta \partial_\tau Z} = 2\pi \int d^2\sigma \partial_\sigma Y = 2\pi w_y \quad (22)$$

カルツァクライン運動量の量子化条件は \$p\_z = 2\pi m\_z\$ (\$m\_z \in \mathbb{Z}\$) を与えるが、これは (20) で定義される巻き付き数が整数であること、そして \$Y\$ 空間のコンパクト化の周期が 1 であることを意味している。

双対場 \$Z\$ を用いたラグランジアンを得るために、\$F\_\alpha\$ に対する運動方程式を解いて \$S'\$ に代入すれば次の作用を得る。

$$\tilde{S}[X^i, \partial_\alpha X^i, \partial_\alpha Z] = \int d^2\sigma \left( -\frac{T_{\text{str}}}{2} G'_{MN} \partial_\alpha X'^M \partial^\alpha X'^N + \frac{2\pi}{2} B'_{MN} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X'^M \partial_\beta X'^N \right) \quad (23)$$

ただし、\$X'^M\$ は、始め 9 成分は \$X^M\$ と同じで、\$X^9 = Y\$ が \$X'^9 = Z\$ に置き換えられたものを表す。また、\$G'\_{MN}\$ と \$B'\_{MN}\$ は以下のように与えられる。

$$G'_{ij} = G_{ij} - \frac{G_{i9}G_{j9}}{G_{99}} + \frac{B_{i9}B_{j9}}{G_{99}}, \quad G'_{i9} = \frac{B_{i9}}{G_{99}}, \quad G'_{99} = \frac{1}{G_{99}}, \quad (24)$$

$$B'_{ij} = B_{ij} - \frac{B_{i9}G_{j9} - G_{i9}B_{j9}}{G_{99}}, \quad B'_{i9} = \frac{G_{i9}}{G_{99}}. \quad (25)$$

これが計量と反対称テンソル場に対する T-dual 変換の変換公式であり、Buscher 則と呼ばれる [1]。\$G\_{99}\$ に対する変換則は、\$S^1\$ のサイズに対する関係式 (16) を再現している。

計量と反対称テンソル場を加えたテンソル場

$$C_{MN} = G_{MN} + B_{MN} \quad (26)$$

を定義しておくと、上記の変換則は次のようにまとめることができる。

$$C'_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} - \frac{C_{\mu 9}C_{9\nu}}{C_{99}}, \quad C'_{9\nu} = -\frac{C_{9\nu}}{C_{99}}, \quad C'_{\mu 9} = \frac{C_{\mu 9}}{C_{99}}, \quad C'_{99} = \frac{1}{C_{99}}. \quad (27)$$

この変換は二回繰り返すと元に戻る。従って (27) の逆変換は単に \$C\_{MN}\$ と \$C'\_{MN}\$ を入れ替えることによって得ることができる。

計量と反対称テンソル場を次のような形で書いておくのも便利である。

$$ds^2 = ds_9^2 + G_{99}(dy + V)^2, \quad B_2 = b_2 + W \wedge (dy + V). \quad (28)$$

T-dual 変換後の計量および反対称テンソル場は次のように与えられる。

$$ds'^2 = ds_9^2 + \frac{1}{G_{99}}(dz + W)^2, \quad B'_2 = b_2 + V \wedge dz. \quad (29)$$

これら二つの式を比較すると \$B\$ 場の形が一見異なることに注意しよう。(28) では \$B\$ 場の中で \$dy\$ が \$V\$ を伴って現れているのに対して (29) では \$dz\$ は \$W\$ を伴っていない。しかしこの非対称性は見かけのもので、\$b\_2\$ を \$b\_2 + V \wedge W\$ で置き換えれば、(28) の \$B\$ 場の中の \$dy + V\$ が \$dy\$ になり、(29) の \$B\$ 場に含まれる \$dz\$ が \$dz + W\$ になる。

さらに [1] では worldsheet 上の量子効果 (つまり、\$\alpha'\$ 展開の sub-leading) についても議論することにより dilaton field が次のように変換されるべきことを導いている。

$$\frac{1}{e^{2\phi'}} = \frac{G_{99}}{e^{2\phi}}. \quad (30)$$

ここでは、NLSM を用いて背景時空の場の変換則を求めたため、R-R 場に対する変換則は NS-NS 場と同様には得られなかった。R-R 場に対する T-dual 変換則を世界面上の双対変換から得るためには Green-Schwarz 形式 [2, 3, 4] または pure spinor 形式 [5] を用いればよいが、ここでは解説しない。§1.3 では超重力理論を用いた別の方法で NS-NS 場と R-R 場に対する T-dual 変換則を導く。

### 1.3 超重力理論の T-双対性

§1.2 で得たものと同じ結果を、超重力理論のコンパクト化を行うことによっても得ることができる [6]。IIA および IIB 型超重力理論のボゾン部分は NS-NS セクターと R-R セクターに分けられる。IIA 型と IIB 型の違いは R-R セクターにあり NS-NS セクターは全く同じ構造をしている。

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{\text{IIA}} = \frac{2\pi e^A}{e^{2\phi^A}} \left[ R^A + 4(\partial_\mu \phi^A)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} (H_{\mu\nu\rho}^A)^2 \right], \quad (31)$$

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{\text{IIB}} = \frac{2\pi e^B}{e^{2\phi^B}} \left[ R^B + 4(\partial_\mu \phi^B)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} (H_{\mu\nu\rho}^B)^2 \right]. \quad (32)$$

IIA 型理論の場合であるのか、IIB 型理論の場合であるのかを区別するために  $A$  と  $B$  という添え字をつけた。 $e^A$  および  $e^B$  は IIA および IIB それぞれでの多脚場の行列式  $\det e_\mu^m$  を表している。反対称テンソル場  $H_3$  はビアンキ恒等式  $dH_3 = 0$  を満足し、ポテンシャル  $B_2$  を用いて次のように与えられる。

$$H_3 = dB_2 \quad (33)$$

ここでは、 $H_3$  の積分として定義されるチャージが整数に量子化されるような規格化を採用した。

さて、IIA 型の超重力理論と IIB 型の超重力理論を  $S^1$  でコンパクト化して比較してみよう。まず IIA 型超重力理論の  $S^1$  コンパクト化を考える。ここでは  $y \equiv x^9$  方向を周期 1 でコンパクト化することにし、コンパクト化のサイズは  $g_{99}^A$  が担っているとす。さらに、全ての場は  $y$  に依存しないとす。(のちに IIB 型理論のコンパクト化を考える際には、コンパクト化される座標に  $z = x^9$  を用いることにす。) この仮定は前節で用いた仮定と同じである。(28) に倣って計量は次のようにおこす。

$$ds_A^2 = g_{\mu\nu}^{(9)} dx^\mu dx^\nu + e^{2\sigma} (\widetilde{dy})^2, \quad \widetilde{dy} = dy + V_1. \quad (34)$$

ここで、 $S^1$  のサイズを表すスカラー場  $\sigma$  を  $e^{2\sigma} = g_{99}^A$  によって導入した。 $y$  座標の周期が 1 であるから、プロパーなコンパクト化の周期は  $L_A = (2\pi l_s) e^\sigma$  と与えられる。 $V_1$  は  $y$  座標の原点の取替えの自由度に対応する  $U(1)$  ゲージ場であり、座標変換  $y \rightarrow y' = y + a(x^\mu)$  のもとで次のようにゲージ変換される。

$$V_1' = V_1 - da. \quad (35)$$

(34) で定義されている 1-形式  $\widetilde{dy}$  はこのゲージ変換のもとで不変である。1-形式  $\widetilde{dy}$  は  $dy$  とは異なり、その外微分が 0 では無いことに注意すること。

$$d(\widetilde{dy}) = dV_1 = f_2. \quad (36)$$

反対称テンソル場についても (28) に倣って次のように分解しよう。

$$H_3^A = h_3 + h_2 \wedge \widetilde{dy}, \quad B_2^A = b_2 + W_1 \wedge \widetilde{dy}. \quad (37)$$

ここで  $\widetilde{dy}$  の代わりに  $dy$  を用いることもできるが、 $\widetilde{dy}$  を用いることによって (37) の中の場はゲージ変換 (35) のもとで不変になる。ポテンシャル  $b_2$  と  $W_1$  および場の強さ  $h_3$  および  $h_2$  の関係は (37) を (33) に代入し、(36) を用いることにより得ることができる。

$$h_3 = db_2 - W_1 \wedge dV_1, \quad h_2 = dW_1 \quad (38)$$

9 次元の有効ラグランジアンを書く前に、ディラトン場  $\phi^A$  の代わりに 9 次元でのディラトン場  $\varphi$  を次のように定義しておくのがよい。

$$\phi^A = \varphi + \frac{1}{2}\sigma \quad (39)$$

これらを (31) に代入すると、9次元での有効ラグランジアンは次のように得られる。

$$\mathcal{L}_{\text{NS}}^{\text{9dim}} = \frac{2\pi e^{(9)}}{e^{2\varphi}} \left[ R^{(9)} + 4(\partial\varphi)^2 - (\partial\sigma)^2 - \frac{e^{2\sigma}}{4} f_{\mu\nu}^2 - \frac{e^{-2\sigma}}{4} h_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} h_{\mu\nu\rho}^2 \right] \quad (40)$$

実は、これと全く同じ9次元の理論の作用が、IIB型超重力理論のNS-NS場の作用(32)を次のようにコンパクト化することによっても得ることができる。

$$ds_B^2 = g_{\mu\nu}^{(9)} dx^\mu dx^\nu + e^{-2\sigma} (\widetilde{dz})^2, \quad \widetilde{dz} = dx^9 + W_1. \quad (41)$$

$$H_3^B = h_3 + f_2 \wedge \widetilde{dz}, \quad B_2^B = b_2 + V_1 \wedge dz. \quad (42)$$

$$\phi^B = \varphi - \frac{1}{2}\sigma. \quad (43)$$

計量と反対称テンソル場の形は以前に世界面上の双対変換によって得られた結果(29)と一致している。また、ディラトン場については(39)と(43)を組み合わせることで(30)に対応する次の式が得られる。

$$\frac{1}{e^{2\phi^B}} = \frac{g_{99}^A}{e^{2\phi^A}} \quad (44)$$

次に、R-R場の間の関係について考えよう。IIB型超重力理論のR-R場には自己双対条件に従う5形式場 $G_5^B$ が含まれるために、作用を用いた議論を厳密に行うことは難しい。そこで運動方程式を用いて議論しよう。

IIA型超重力理論に含まれるR-R場の場の強さは、ランクが偶数である反対称テンソル場である。またIIB型超重力理論のR-R場の場の強さはランクが奇数である。これらを外微分形式で表してそれらの形式的な和を $G_{\text{even}}^A$ および $G_{\text{odd}}^B$ とおく。

$$G_{\text{even}}^A = G_0^A + G_2^A + G_4^A + G_6^A + G_8^A + G_{10}^A, \quad G_{\text{odd}}^B = G_1^B + G_3^B + G_5^B + G_7^B + G_9^B. \quad (45)$$

これらはどちらも互いに双対関係にある場を含んでいる。従ってそれぞれが次の自己双対条件を満足する。

$$*^{10}G_{\text{even}}^A + \mathcal{T}G_{\text{even}}^A = 0, \quad *^{10}G_{\text{odd}}^B + \mathcal{T}G_{\text{odd}}^B = 0. \quad (46)$$

ただし $\mathcal{T}$ は外微分形式の転置を表す記号であり、

$$\mathcal{T}(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}) = dx^{i_n} \wedge \cdots \wedge dx^{i_1} \quad (47)$$

によって定義される。R-R場の運動方程式とビアンキ恒等式は次のようにIIA型IIB型ともに一つの式にまとめることができる。

$$dG_{\text{even}}^A = H_3^A \wedge G_{\text{even}}^A, \quad dG_{\text{odd}}^B = H_3^B \wedge G_{\text{odd}}^B. \quad (48)$$

これら二つの運動方程式がコンパクト化の結果9次元の同じ運動方程式を与えることを示そう。まずIIA型超重力理論の $S^1$ コンパクト化を考える。 $y \equiv x^9$ 方向でコンパクト化を行うにあたり、R-R場の強さを次のように分解しよう。

$$G_{\text{even}}^A = g_{\text{even}} + g_{\text{odd}} \wedge \widetilde{dy}. \quad (49)$$

$\widetilde{dy}$ は(34)で定義されている。

IIA型理論における自己双対条件(46)と運動方程式(48)を $g_{\text{even}}$ と $g_{\text{odd}}$ で書き換えてみよう。 $G_{\text{even}}^A$ に対する10次元でのHodge双対は9次元において次のように分解される。

$$*^{10}G_{\text{even}}^A = e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} + e^{\sigma} *^9 g_{\text{even}} \wedge \widetilde{dy}. \quad (50)$$

$\sigma$  は (34) で定義されている、 $y$  方向の計量を与えるスカラー場である。これを用いて  $G_{\text{even}}^A$  に対する自己双対条件 (46) を 9 次元の場に対する関係式に読みかえると、次の式を得る。

$$e^{-\sigma} *^9 g_{\text{odd}} = -\mathcal{T} g_{\text{even}}, \quad e^{\sigma} *^9 g_{\text{even}} = \mathcal{T} g_{\text{odd}}. \quad (51)$$

9 次元で 2 回 Hodge 双対を取ればマイナス符号が現れることに注意すれば、これら二つの式が同じものであることがわかる。

次に (48) に与えられた  $G_{\text{even}}^A$  に対する運動方程式に展開式 (49) を代入し、 $\widetilde{dy}$  を含む部分と含まない部分とに分けると、独立な二つの式を得ることができる。

$$dg_{\text{even}} = h_3 \wedge g_{\text{even}} + f_2 \wedge g_{\text{odd}}, \quad dg_{\text{odd}} = h_3 \wedge g_{\text{odd}} + h_2 \wedge g_{\text{even}}. \quad (52)$$

以上は IIA 型超重力理論のコンパクト化の話であったが、実は IIB 型の R-R field  $G_{\text{odd}}^B$  を

$$G_{\text{odd}}^B = -g_{\text{odd}} + g_{\text{even}} \wedge \widetilde{dz}. \quad (53)$$

と与えられると仮定して IIB 型理論の運動方程式 (48) および自己双対条件 (46) 代入しても同じ関係式 (51) と (52) を得ることができる。すなわち、RR-セクターについても  $S^1$  コンパクト化された二つの理論は等価であり、場  $G_{\text{even}}^A$  と  $G_{\text{odd}}^B$  の関係は 9 次元の場  $g_{\text{even}}$  と  $g_{\text{odd}}$  を通して (49) と (53) によって与えられる。

R-R ポテンシャルについても見ておこう。(48) を満足する場の強さは、ポテンシャルを用いて次のように書くことができる。

$$G_{\text{even}}^A = e^{B_2^A} \wedge dC_{\text{odd}}^A, \quad G_{\text{odd}}^B = e^{B_2^B} \wedge dC_{\text{even}}^B. \quad (54)$$

このように定義される IIA 理論の  $C_{\text{odd}}^A$  と IIB 理論の  $C_{\text{even}}^B$  は 9 次元のポテンシャル  $c_{\text{odd}}$  と  $c_{\text{even}}$  を通して次のように関係している。

$$C_{\text{odd}}^A = c_{\text{odd}} + c_{\text{even}} \wedge dy, \quad C_{\text{even}}^B = -c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dz. \quad (55)$$

ここでは  $\widetilde{dy}$  や  $\widetilde{dz}$  ではなく  $dy$  と  $dz$  を用いていることに注意。(54) に対して  $B$  場の展開式 (37) と (42) および (55) を代入すると、場の強さがどちらも (49) や (53) のように分解されることが分かる。ただし、9 次元での場の強さは次のように与えられる。

$$g_{\text{even}} = e^{b_2} \wedge (dc_{\text{odd}} - dc_{\text{even}} \wedge V_1), \quad g_{\text{odd}} = e^{b_2 - V_1 \wedge W_1} \wedge (dc_{\text{even}} + dc_{\text{odd}} \wedge W_1). \quad (56)$$

以上で、NS-NS 場、R-R 場両方について T-dual 変換則を得ることができた。ここまでの議論は NS-NS field の運動方程式に現れる R-R 場を考慮していないので完全ではないが、それらを考慮しても理論の等価性を実際に示すことができる。これについてはここでは省略する。

## 1.4 D-ブレーンの作用とその T-双対性

§1.3 において、超重力理論に含まれるボゾン場に対する T-duality 変換則を与えた。ここではその変換則に従って変換されるような背景におかれた D-brane がどのように変換されるかを、D-brane の低エネルギー有効作用を用いて議論する。

IIA 型弦理論の  $D(2n-2)$ -ブレーンと IIB 型弦理論の  $D(2n-1)$ -ブレーンの関係について考えることにしよう。超重力理論が NS-NS 場の部分と R-R 場の部分に分けられたように、D-ブレーンの作用も二つの部分に分けておくのが便利である。まず一つ目は NS-NS 場との結合を表す Born-Infeld 作用である。

$$\frac{S_{\text{BI}}^A}{2\pi} = - \int d^{2n-1} \sigma \frac{1}{e^{\phi^A}} \sqrt{-\det[C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A]}, \quad \frac{S_{\text{BI}}^B}{2\pi} = - \int d^{2n} \sigma \frac{1}{e^{\phi^B}} \sqrt{-\det[C_{ij}^{B*} + F_{ij}^B]} \quad (57)$$



ただし  $C_{MN} = g_{MN} + B_{MN}$  は (26) で定義されたものである。  $C_{ij}^*$  は  $C_{MN}$  のブレーン上への引き戻しを表す。超重力理論の NS-NS セクターが IIA 型と IIB 型で同じ形をしていたのに対応して Born-Infeld 作用は IIA 型超重力理論においても IIB 型超重力理論においても形が変わらない。

一方、R-R 場との結合を表す Chern-Simons 項は次のように与えられる。

$$S_{\text{CS}}^{\text{IIA}} = 2\pi \int_{2n-1} C_{\text{odd}}^A e^{-F_2^{\text{IIA}}}, \quad S_{\text{CS}}^{\text{IIB}} = 2\pi \int_{2n} C_{\text{even}}^B e^{-F_2^{\text{IIB}}}. \quad (58)$$

こちらも形はほとんど同じであるが、反対称テンソル  $C$  のランクが IIA 型では奇数、IIB 型では偶数である。

以下でこれらが実際に T-双対変換と矛盾しないことを示そう。(10) に与えたように、T-duality 変換はコンパクト化された方向にまきついた D-ブレーンと巻きついていない D-ブレーンを入れ替える。ここでは IIA 型理論側で巻きついていないブレーンが IIB 型理論側の巻きついたブレーンに変換される場合を考える。

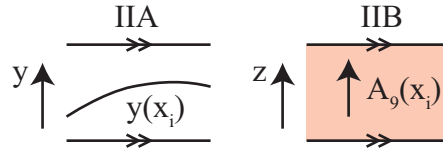


図 1: IIA 型理論の巻きついていない D-brane は T-duality によって IIB 型理論の巻きついた D-brane へと移される。それに伴い  $S^1$  方向の位置を表すスカラー場は Wilson line へと移される。

IIA 理論側でのコンパクト化された座標を  $y = x^9$  としよう。この方向にまきついていないブレーンの  $S^1$  上の位置は、この  $y$  座標をブレーン上の座標の関数として与えることで決まる。すなわち、IIA 理論側では、 $y$  座標をブレーン上のスカラー場とみなすことができる。

IIB 側のまきついたブレーンにおいて、対応する自由度はコンパクト化された方向の Wilson line、すなわちゲージポテンシャル  $A_9$  の値である。つまり、ブレーン上の場の T-双対性による変換は次のように与えられる。

$$A_\mu^B = A_\mu^A, \quad A_9^B = y. \quad (59)$$

あるいはこの式は次のように書くこともできる。

$$A_1^B = A_1^A + y dz. \quad (60)$$

ここで、IIB 理論側の  $S^1$  座標として  $z$  を用いた。このような対応関係のもとで作用が等価になることを以下で示す。

まず Born-Infeld 作用 (57) からはじめよう。IIA 型超重力理論において  $y$  方向に巻きついていない  $Dp$ -ブレーンを考える。 $Dp$ -ブレーン上のスカラー場のうち  $x^9$  方向の座標に対応するスカラー場を  $y$  とする。この場合、 $C_{MN}$  のブレーン上への引き戻し  $C_{ij}^*$  は次のように与えられる。

$$C_{ij}^* = C_{ij} + C_{i9} \frac{\partial y}{\partial x^j} + C_{9j} \frac{\partial y}{\partial x^i} + C_{99} \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial y}{\partial x^j}. \quad (61)$$

背景の場  $C_{MN} = G_{MN} + B_{MN}$  に対して  $y$  方向への T-双対性変換はすでに (27) に与えられている。ここでは (27) の逆変換を用いるほうが便利であるが、逆変換はもとの変換と全く同じ形をしている。(61) と (27) を組み合わせれば、(57) の行列式の中身を次のように書きかえることができる。

$$C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A = C_{ij}^B + F_{ij}^A - \frac{1}{C_{99}^B} (C_{i9}^B + \partial_i y)(C_{9j}^B - \partial_j y) \quad (62)$$

ただし、 $C_{\mu\nu}^*$  は  $C_{MN}$  のブレーン上への引き戻しである。この式の両辺はサイズが  $p+1$  の正方行列である。この式の両辺の行列式を取ろう。すると、右辺の行列式は次のようにサイズが  $p+2$  の行列の行列式として表すことができる。

$$\det(C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A) = \frac{1}{C_{99}^B} \det \begin{pmatrix} C_{ij}^B + F_{ij}^A & C_{i9}^B + \partial_i y \\ C_{9j}^B - \partial_j y & C_{99}^B \end{pmatrix}. \quad (63)$$

さらに (59) または (60) より IIB 型理論における巻きついた  $p+1$  ブレーン上のゲージ場の強さが次のように与えられることを用いる。

$$F_2^B = F_2^A + dy \wedge dz. \quad (64)$$

あるいは、成分で書けば、

$$F_{ij}^B = F_{ij}^A, \quad F_{i9}^B = -F_{9i}^B = \partial_i y. \quad (65)$$

このゲージ場の関係式と、(44) に与えられているディラトン場の間関係式を用いると (63) の関係式が次のように書ける。

$$\frac{1}{e^{\phi^A}} \sqrt{-\det(C_{ij}^{A*} + F_{ij}^A)} = \frac{1}{e^{\phi^B}} \sqrt{-\det(C_{\mu\nu}^B + F_{\mu\nu}^B)} \quad (66)$$

これにより IIA 型 D-ブレーンの Born-Infeld 作用と IIB 型 D-ブレーンの Born-Infeld 作用が、 $x^9$  座標に依存する Kaluza-Klein モードを無視する限りにおいて互いに T-dual 変換を通して等価であることが示された。

次に、Chern-Simons 項について考えよう。今度は IIB 理論の作用から出発して (55) および (64) を代入すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{CS}}^{\text{IIB}}}{2\pi} &= \int_{2n} (-c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge dz) \wedge e^{-F_2^A - dy \wedge dz} \\ &= \int_{2n} (c_{\text{even}} \wedge dy + c_{\text{odd}}) \wedge dz \wedge e^{-F_2^A} \end{aligned} \quad (67)$$

二行目を得るのに、IIB 側のブレーンが  $z$  方向にまきついており、 $dz$  を含まない項は積分に寄与しないことを用いた。 $dz$  方向の積分を実行すれば次のように IIA 理論の D-brane の Chern-Simons 項を得る。

$$\int_{2n-1} (c_{\text{even}} \wedge dy + c_{\text{odd}}) \wedge e^{-F_2^A} = \int_{2n-1} C_{\text{odd}}^A \wedge e^{-F_2^A} = \frac{S_{\text{CS}}^{\text{IIA}}}{2\pi} \quad (68)$$

従って、Chern-Simons 項についても、二つの作用は T-dual 変換で結びついている。

最後に、あとで用いるために D-brane 上のゲージ不変な場の強さ  $\mathcal{F}_2 = F_2 + B_2^*$  についても変換公式を与えておこう。NS-NS 2-form 場の変換公式は、(37) と (42) を組み合わせれば、

$$B_2^B = B_2^A - W_1 \wedge \widetilde{dy} + V_1 \wedge dz. \quad (69)$$

である。これと (64) を加えれば、次の式が得られる。

$$\mathcal{F}_2^B = \mathcal{F}_2^A + \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz}. \quad (70)$$

ここには (64) とは異なり、 $dy$  や  $dz$  がゲージ不変な形で現れている。

## 2 Taub-NUT 空間

この節では、Taub-NUT 空間の幾つかの基本的な性質について述べる。Taub-NUT 空間は 4 次元のハイパーケーラー空間であるが、NS5-brane の T-dual として自然に現れ、弦理論の双対性を議論するうえで重要な役割を果たす。この T-dual の関係についてはこの節での結果を踏まえて次節で解説する。

## 2.1 Kaluza-Klein monopole

一般に、重力を含む  $D$  次元理論 (弦理論とは限らない) を  $S^1$  コンパクト化すると、 $D-1$  次元の理論には  $U(1)$  のベクトル場が一つ現れる。このベクトル場を  $W$  とすると、計量の中に次のように含まれる。

$$ds_D^2 = ds_{D-1}^2 + g_{zz} \widetilde{dz}^2, \quad \widetilde{dz} = dz + W. \quad (71)$$

ここでは IIB 型理論の  $S^1$  コンパクト化で用いた記号を用いることにし、 $S^1$  方向の座標を  $z$ 、 $U(1)$  ベクトル場を  $W$  と表すことにする。このゲージ場は (35) でも述べたように、 $S^1$  方向への並進対称性に対応するものである。

ゲージ場  $W$  に対する電荷を持つ場が何であるかを見るために、コンパクト化する前の時空にスカラー場が存在したとして、そのラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (72)$$

によって与えられると仮定しよう。ここでは特にコンパクト化される理論は特定せず、 $\phi$  も任意の場であるとする。ここではスカラー場として扱うが、テンソル場やフェルミオン場であっても同様の議論ができる。  $y$  方向に周期 1 でコンパクト化し、スカラー場を

$$\phi = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \phi_n e^{2\pi i n y} \quad (73)$$

とフーリエ展開しよう。それぞれのモードの係数  $\phi_n$  は  $y$  依存性を含まない  $D-1$  次元の場であると解釈される。展開式 (73) を (72) に代入し、内部空間の座標  $z$  について積分すると、 $D-1$  次元理論のラグランジアンが次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{zz}} \sqrt{-g'} \sum_n \left[ g'^{ij} D_i \phi_n D_j \phi_{-n} + \frac{1}{g_{zz}} q_n^2 \phi_n \phi_{-n} \right] \quad (74)$$

ただし  $g'^{ij}$  は (71) で定義される  $D-1$  次元計量  $ds_{D-1}^2$  の成分  $g'_{ij}$  の逆行列、 $g'$  は  $g'_{ij}$  の行列式である。 $D_i$  は次のように定義される共変微分である。

$$D_i \phi_n = \partial_i \phi_n - i W_i q_n \phi_n \quad (75)$$

$q_n$  は Kaluza-Klein 運動量  $p_z$  の値であり、次のように与えられる。

$$q_n = 2\pi n \quad (76)$$

共変微分 (75) の形から、Kaluza-Klein モード  $\phi_n$  がゲージ場  $W_i$  と結合しており  $q_n$  がその電荷を与えていることがわかる。

次に、 $W_1$  に磁氣的に結合するオブジェクト、すなわちモノポールについて考えてみよう。 $W_1$  のようにコンパクト化によって現れた  $U(1)$  ゲージ場に対するモノポールは特に Kaluza-Klein モノポールと呼ばれる。モノポールの磁荷は次のようにゲージ場の強さの積分として定義することができる。

$$Q = \oint_{S^2} h_2. \quad (77)$$

ただし、 $h_2$  は

$$h_2 = dW_1 \quad (78)$$

によって定義される  $U(1)$  ゲージ場の強さであり、 $S^2$  はモノポールを取り囲む球面を表す。 $S^2$  でモノポールが取り囲まれるということは、モノポールは余次元 3 のオブジェクトであることを意味している。たと

えば、10次元時空を  $S^1$  コンパクト化して得られる9次元理論の Kaluza-Klein モノポールは 5-brane である。

モノポールを  $D-1$  次元のゲージ場の配位として表したとき、そのゲージ場は  $D$  次元においては計量の成分であるから、何か幾何学的な構造を表しているはずである。そこで以下では、 $D-1$  次元のモノポールと、それに対応する  $D$  次元時空の構造について考える。余次元方向に対して直交座標  $x^6, x^7, x^8$  を導入する。内部空間方向の座標としては  $z \equiv x^9$  を用いる。(ここでは時空の次元は特定していないが、のちに10次元時空を考えることを想定して座標を設定している。) さらに極座標  $(r, \theta, \phi)$  を次のように定義する。

$$(x^6, x^7, x^8) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \quad (79)$$

Kaluza-Klein モノポールは、コンパクト化した内部空間を見ない限りにおいてはディラックモノポールに他ならない。すなわち、次のゲージポテンシャルによって与えることができる。

$$W = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \theta) d\phi. \quad (80)$$

モノポールは原点  $r = 0$  にあるとした。

モノポール配位 (80) は  $\theta = \pi$  において特異性を持っている。すなわち、678 空間の原点から南極方向にディラック弦が伸びている。この特異性を除去するためには、南極点の近傍で適当なゲージ変換を行う必要がある。

$$W' = W - \frac{Q}{2\pi} d\phi \quad (81)$$

これは (35) にあるように内部空間の座標の変換

$$z \rightarrow z' = z + \frac{Q}{2\pi} \phi \quad (82)$$

に対応している。( (35) では IIA 型理論の記号を用いているので、ここで考えている IIB 型理論のものに読み替えた。)  $z$  座標の周期はここでは 1 に取っており、 $\phi$  座標の周期は  $2\pi$  である。(82) の座標変換がこれらの周期性に矛盾しないためには  $Q$  が整数でなければならない。

$$Q \in \mathbf{Z}. \quad (83)$$

この量子化条件と Kaluza-Klein モードの電荷の量子化 (76) を比較すると、電荷と磁荷の積が常に  $2\pi$  の倍数になっており、ディラックの量子化条件が満足されていることがわかる。

磁荷密度  $\rho$  によって与えられる一般のモノポール解について考えてみよう。(もちろん、ディラックの量子化条件により  $\rho$  が連続的に広がることは許されず、あとで与えるようにデルタ関数の和の形になる。) ゲージ場の強さ  $h_2$  は次の式を満足しなければならない。

$$dh_2 = \widehat{*}_3 \rho \quad (84)$$

これは Maxwell 方程式  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho$  に相当する式である。この式中の Hodge 双対  $\widehat{*}_3$  は平坦な 3 次元計量  $ds^2 = dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2$  を用いて定義されたものである。単位磁荷を持つモノポールが座標  $\mathbf{r}_I$  にある場合には  $\rho$  は次のように与えられる。

$$\rho = \sum_I \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I) \quad (85)$$

(678 空間のベクトルを表すのに  $\mathbf{r}$  を用いることにする。) 電荷  $Q$  を持つモノポールの場合は  $Q$  個の  $\mathbf{r}_I$  の値が重なっているとして表すものとする。(もし正と負の磁荷を持つモノポールが混在すると、通常その系は不安定になるので以下では電荷  $Q$  は常に正であると仮定する。)

カルツァクラインモノポールにおいて  $D$  次元計量 (71) の  $W_1$  以外の成分を決めるためには  $D$  次元の理論を何か仮定して運動方程式を用いる必要がある。ここでは右辺が 0 のアインシュタイン方程式  $R_{MN} = 0$  が成り立つとしよう。このアインシュタイン方程式を満足する計量は次のように与えられる。

$$ds_D^2 = ds_{D-4}^2 + ds_{\text{TN}}^2 \quad (86)$$

$ds_{D-4}^2$  は  $D-4$  次元の平坦なミンコフスキー空間であり、Kaluza-Klein モノポールに平行な方向を表している。 $ds_{\text{TN}}^2$  は Kaluza-Klein モノポールの余次元の 3 つの方向とコンパクト化された  $S^1$  方向を含む 4 次元多様体の計量である。実はこの部分は Taub-NUT 空間と呼ばれる 4 次元空間の計量になっており次のように与えられる。

$$ds_{\text{TN}}^2 = H d\mathbf{r}^2 + H^{-1} \widetilde{dz}^2, \quad \widetilde{dz} = dz + W. \quad (87)$$

ただし、関数  $H$  は次の 3 次元ラプラス方程式

$$\widehat{\Delta}_3 H = -\rho \quad (88)$$

の解である。ここで用いられるラプラシアンは  $\widehat{*}_3$  同様平坦な計量を用いて定義されるものである。磁荷密度が (85) によって与えられる場合には解は次のように与えられる。

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{L_{\text{TN}}^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (89)$$

$L_{\text{TN}}$  は任意定数である。(84) と (88) を比較すれば、調和関数  $H$  はゲージ場の強さ  $h_2$  とは次の関係にあることがわかる。

$$h_2 = -\widehat{*}_3 dH. \quad (90)$$

## 2.2 特異点

計量が (87) によって与えられる Taub-NUT 多様体の構造について詳しく見てみよう。動径座標  $r$  が非常に大きく、調和関数  $H$  が定数とみなせるようなところでは  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  になっており、 $S^1$  の周期は  $L_{\text{TN}}$  である。

逆に、調和関数が発散する点  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_I$  の近傍での振る舞いを見てみよう。このような点は center と呼ばれる。ここではまず center が重なっていない場合、すなわち全ての  $\mathbf{r}_I$  が異なる場合を考える。ある一つの center に注目し、それが原点に来るように 678 座標を取ろう。また、(79) に従って極座標  $(r, \theta, \phi)$  も導入しておく。原点近傍での調和関数は次のように与えられる。

$$H = \frac{1}{4\pi r} \quad (91)$$

$r$  が非常に小さいとして (89) から発散項だけを抜き出した。(90) を満足するモノポールゲージポテンシャルを次のように取る。

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi} \cos \theta d\phi. \quad (92)$$

さらに、 $S^1$  方向の座標  $z$  の代わりに、次のように定義される  $\psi$  を導入しておくのが便利である。

$$\psi = 4\pi z \quad (93)$$

この座標の周期は  $4\pi$  である。これらを代入すると、計量 (87) は次のようになる。

$$4\pi ds_{\text{TN}}^2 = \frac{1}{r} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + r(d\psi - \cos \theta d\phi)^2 \quad (94)$$

さらに座標変換  $r = \rho^2/2$  を行うと (94) は次のように書き換えられる。

$$4\pi ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \quad (95)$$

$d\Omega_3^2$  は次のように定義される半径が 1 の  $S^3$  の計量である。

$$d\Omega_3^2 = \frac{1}{4}[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + (d\psi - \cos\theta d\phi)^2]. \quad (96)$$

したがって (95) は平坦な  $\mathbf{R}^4$  の計量であり、原点に如何なる特異性も持たない。このように、center が全て異なる場合 (87) で与えられる Taub-NUT 空間はそれぞれの center も含め任意の点で滑らかな 4 次元の多様体を表している。

center が重なった場合を考える前に、(96) が実際に半径 1 の  $S^3$  になっていることを示しておこう。次のように 3 つの角度変数でパラメトライズされた複素 2 次元ベクトル  $u \in \mathbf{C}^2$  を定義しよう。

$$u = \exp\left(\frac{i\phi}{2}\tau_z\right) \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\tau_y\right) \exp\left(\frac{i\psi}{2}\tau_z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

ただし、 $\tau_m$  はパウリ行列である。この定義より、ベクトル  $u$  は

$$u^\dagger u = 1 \quad (98)$$

を満足するから、半径 1 の  $S^3$  上の点を与える。そして角度変数の範囲を次のように取っておけば  $S^3$  全体を張ることがわかる。

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi < 4\pi. \quad (99)$$

$S^3$  上の計量を計算してみると、次のように (96) が得られる。

$$ds^2 = du^\dagger du = d\Omega_3^2. \quad (100)$$

(97) によって定義される座標は、 $S^3$  を  $S^2$  上の  $S^1$  ファイバー束として表しているものであると解釈できる。実際  $S^3$  から  $S^2$  への写像を次のように定義することができる。

$$f: u \rightarrow \vec{n} = u^\dagger \vec{\tau} u = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta). \quad (101)$$

ただし、 $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$  である。座標  $\psi$  が  $u$  に対する位相変換  $u \rightarrow e^{i\alpha}u$  の自由度に対応しており、 $S^1$  ファイバー上の座標を与えている。このファイバー束は Hopf ファイバー束と呼ばれる。

さて、いくつかの center が重なった場合に何が起るかを見てみよう。678 空間の原点に  $N$  個の center が重なった場合、調和関数  $H$  とモノポールポテンシャル  $W_1$  がともに  $N$  倍される。角度変数  $\psi$  の定義 (93) も次のように変更しておこう。

$$\psi = \frac{4\pi}{N}z \quad (102)$$

このようにしておく、計量の  $N$  依存性をくくりだすことができ、定数因子を除き (94) と同じ形の計量が得られる。

$$\frac{4\pi}{N}ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_3^2. \quad (103)$$

動径座標  $\rho$  は前と同様に  $r = \rho^2/2$  によって定義した。この式は左辺に  $1/N$  の因子が存在することを除いて (94) に一致し、平坦な 4 次元の計量を表している。しかし角度変数の定義 (102) のために、 $\psi$  の周期が  $4\pi$  ではなく  $4\pi/N$  であるという重要な違いがある。このことは、この計量が表す空間が  $\mathbf{R}^4$  ではなく、その orbifold  $\mathbf{R}^4/\mathbf{Z}_N$  であることを表している。

このことをよりはっきり見るために、 $\mathbf{R}^4$  上に複素座標  $(z_1, z_2) = (\rho u_1, \rho u_2^*)$  を導入しよう。 $u_i$  の片方を複素共役とした理由は最後に述べる。 $u = (u_1, u_2)$  は (97) で定義された  $\mathbf{C}^2$  上の単位ベクトルであり、

$\rho$  は動径座標である。こうして定義された  $z_i$  を用いれば計量は  $ds^2 = (N/4\pi)dz_idz_i^*$  となる。 $\psi$  の周期が  $4\pi/N$  であるということは、 $\psi \sim \psi + 4\pi k/N$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) のような同一視がなされることを意味する。これは、座標  $z_i$  に対する次の同一視を与える。

$$(z_1, z_2) \sim (e^{2\pi ik/N} z_1, e^{-2\pi ik/N} z_2), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (104)$$

つまり、Taub-NUT 空間上で  $N$  個の center が重なった点の近傍は  $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}_N$  型の orbifold 特異点として記述される。このような特異点はしばしば  $A_{N-1}$  型特異点と呼ばれる。

orbifold 上の holomorphic 2-form は次のように与えることができる。

$$\omega_{(2,0)} \propto dz_1 \wedge dz_2 \quad (105)$$

これは (104) のもとで不変になっているので、orbifold 上でも定義されている。 $z_i$  と  $u_i$  の関係に複素共役を持ち込んだのは、このように  $\mathbf{Z}_N$  不変な holomorphic 2-form を定義できるようにするためである。

### 2.3 複素構造

Taub-NUT 空間は hyper Kähler 空間であり、3 つの複素構造が存在する。計量 (87) から、対応する Kähler form を次のように推測することができる。

$$\begin{aligned} k_6 &= dx^6 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r})dx^7 \wedge dx^8, \\ k_7 &= dx^7 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r})dx^8 \wedge dx^6, \\ k_8 &= dx^8 \wedge \widetilde{dx}^9 - H(\mathbf{r})dx^6 \wedge dx^7. \end{aligned} \quad (106)$$

ここでは座標  $z$  ではなく  $x^9$  を用いる。 $\widetilde{dx}^9 = dx^9 + W_1$  である。実際、これらを局所直交系を用いて  $4 \times 4$  の行列として表せば、四元数の代数を満足することがわかる。また、volume form  $\Omega$  と次の関係にある。

$$\Omega = -\frac{1}{2}k_6 \wedge k_6 = -\frac{1}{2}k_7 \wedge k_7 = -\frac{1}{2}k_8 \wedge k_8 = H(\mathbf{r})dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \wedge dx^9 \quad (107)$$

$k_m$  が closed であることは (90) を用いて示すことができる。たとえば、

$$dk_6 = (-h_{78} + \partial_6 H)dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \quad (108)$$

( $h_{78}$  は場の強さ  $h_2$  の成分) であるが、括弧の中は (90) のために 0 になる。

Taub-NUT 空間上の計量 (87) を用いたときの Hodge dual は、ベース空間上の  $k$ -form  $A_k$  に対して次のように作用する。

$$*_4 A_k = (-)^k H^{1-k} \widehat{*_3 A_k} \wedge \widetilde{dx}^9, \quad *_4 A_k \wedge \widetilde{dx}^9 = H^{2-k} \widehat{*_3 A_k}. \quad (109)$$

これを用いると、

$$*_4 k_m = -k_m \quad (110)$$

が示される。すなわち  $k_m$  はどれも反自己双対である。 $k_m$  が closed form であつ反自己双対であるということは、これらが調和形式であることを意味している。

これらのケーラー形式は、Taub-NUT 空間の構造を決める情報を担っており、たとえば、2-サイクルで積分することによって center の位置を得ることができる。

$$x_I^m - x_0^m = \int_{S_I} k_2^m \quad (111)$$

ただし、 $S_I$  は図 2 にあるように  $I$  番目の center に「引っかった」ディスクの位相を持つ 2-サイクルである。これは、ベース空間上ではある基準点  $x_0^m$  から center の位置  $x_I^m$  まで伸びる曲線として与えられる。基準点  $x_0^m$  は全ての  $S_I$  に対して共通に取っておく。すると、二つの center に引っかった  $S^2$  のサイクルは  $S_I$  の差として  $S_{IJ} = S_I - S_J$  のように与えることができる。 $S_{IJ}$  の上でケーラー形式を積分すれば二つの center の相対座標が得られる。

$$x_I^m - x_J^m = \int_{S_{IJ}} k_2^m \quad (112)$$

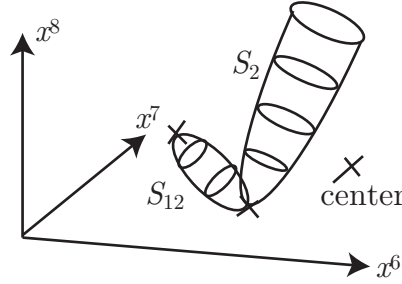


図 2: Taub-NUT 空間上の 2-サイクル

あとで超対称性について議論する際に必要なので (106) に与えられた 3 つのケーラー形式を、スピノルの二次形式として用いて与えておこう。

4 次元ハイパーケーラー空間はそのホロノミーが  $SU(2)$  である空間として定義することができる。局所回転群  $\text{Spin}(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$  に含まれる二つの  $SU(2)$  のうち、 $SU(2)_L$  が  $\gamma^5$  の正固有値の空間に、 $SU(2)_R$  が  $\gamma^5$  の負固有値の空間に作用するものとする。ホロノミーの  $SU(2)$  がこれらのうちのどちらであるかは、複素構造が自己双対か、反自己双対かによって決まる。ここでは (110) にあるように反自己双対である場合を考えよう。カイラリティ行列  $\gamma_5$  と  $\epsilon$  テンソルの関係が次のように与えられていると仮定する。

$$\gamma_{mnpq} = \epsilon_{mnpq} \gamma_5. \quad (113)$$

この場合反自己双対テンソルは  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  の  $(3, 1)$  に属する。 $(3, 1)$  表現に属するケーラー形式が共变的に定数であり、これらにホロノミーが作用しないということから、ホロノミーは  $SU(2)_R$  であることが結論される。

ホロノミーが  $SU(2)_R$  である多様体上には、正のカイラリティを持つ共变的に定数であるスピノルが二つ存在する。これらのうちの一つを  $\eta_1^a$  とし、 $(\eta_1^a)^* \eta_1^a = 1$  によって規格化しよう。 $\eta$  はボゾンのとして扱う。このとき、もう一つの定数スピノルは  $\eta_2^a = -\epsilon^{ab} (\eta_1^b)^*$  によって与えることができる。これら二つの定数スピノルは次の関係式を満足する。

$$\eta_m^a = \epsilon_{mn} \epsilon^{ab} (\eta_n^b)^*, \quad \eta_m^a \epsilon_{ab} \eta_n^b = \epsilon_{mn}, \quad (\eta_m^a)^* \eta_n^a = \delta_n^m, \quad \eta_m^a (\eta_m^b)^* = \delta_b^a. \quad (114)$$

$\eta$  の二次形式として、次の 3 つの定数テンソルを定義することができる。

$$k_{\mu\nu}^A (\sigma_A)^m{}_n = i \bar{\eta}^m \gamma_{\mu\nu} \eta_n \quad (115)$$

ただし、 $\sigma_A$  はパウリ行列である。 $\eta$  のカイラリティが正であることと、(113) を用いると、このように定義される反対称テンソルが反自己双対であることを示すことができる。また、フィルツ変換を用いることで次のような四元数代数を示すことができる。

$$k_\mu^{1\kappa} k_{\kappa\nu}^1 = -g_{\mu\nu}, \quad k_\mu^{1\kappa} k_{\kappa\nu}^2 = -k_\mu^{2\kappa} k_{\kappa\nu}^1 = k_{\mu\nu}^3, \quad \text{etc.} \quad (116)$$



従って、適当に  $\eta_1$  と  $\eta_2$  を選ぶことによって (115) に与えられた  $k^A$  が (106) に与えた 3 つの複素構造を与える。

## 2.4 複素座標

Taub-NUT manifold を代数多様体として表そう。そのためにまず、次の複素座標を導入する。

$$w = x^6 + ix^7. \quad (117)$$

これに対応して、center の  $w$  座標を  $w_I = x_I^6 + ix_I^7$  によって定義しておく。

$w$  をある値に固定することで定義される 2 次元の部分空間について見てみよう。この空間は、 $x^8$  で座標付けされた  $\mathbb{R}$  上の各点に座標  $x^9$  を持ち  $x^8$  に依存する半径を持つ  $S^1$  のファイバーが載っているような空間を表している。固定した  $w$  がどの  $w_I$  とも等しくなければ  $S^1$  のファイバーはつぶれることが無いから、この空間の位相はシリンダー、つまり  $S^1 \times \mathbb{R}$  である。これは  $x, y \in \mathbb{C}$  で張られる  $\mathbb{C}^2$  の部分空間として次のように与えることができる。

$$xy = c \quad (118)$$

ただし、 $c$  は 0 でない定数である。(118) より、 $x$  と  $y$  はどちらも 0 で無いことが要請される。 $x$  を与えれば、それが 0 でない限り  $y$  は一意的に決まる。したがって (118) は原点を除いた複素平面であり、それは位相的にシリンダーに一致する。

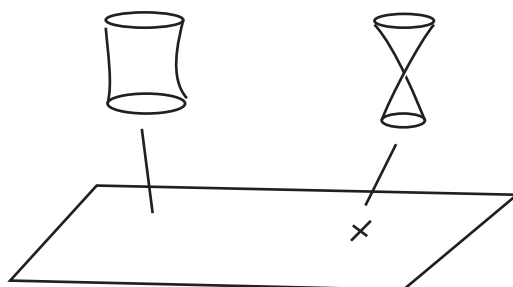


図 3:  $xy = c \neq 0$  によって与えられる複素 1 次元の空間はシリンダーの位相を持つ。 $xy = 0$  は原点を共有する二枚の複素平面を与える。

もし  $w$  が  $w_I$  のうちのどれか一つと等しければ、 $S^1$  のファイバーがどこか一点でつぶれる。(ここでは  $w_I$  は全て異なると仮定しておこう。) この場合は二次元部分空間は次の式によって表すことができる。

$$xy = 0 \quad (119)$$

この解は、 $x = 0$  または  $y = 0$  である。 $x = 0$  のとき  $y$  は任意であるから、 $y$  平面とみなすことができる。また  $y = 0$  の時には  $x$  は任意であるから、 $x$  平面とみなすことができる。さらに、 $x = y = 0$  という点は  $x$  平面上の原点でありかつ  $y$  平面上の原点である。したがって (119) は原点が同一視された二枚の複素平面とみなすことができ、位相的に一箇所がくびれたシリンダーに等しい。

以上のことを組み合わせることによって Taub-NUT 空間を次のように与えることができる。

$$xy = \prod_I (w - w_I). \quad (120)$$

ここで導入した  $x$  および  $y$  という複素座標は条件 (120) のために独立な座標ではなく、どちらも  $x^8$  および  $x^9$  座標の関数として書かれている。この節の残りの部分でこの関係を求めよう。

複素座標を定めるには、上記 3 つの Kähler form のうちの一つを選ぶ必要がある。すでに一つの複素座標として (117) を定義したが、これはケーラー形式として  $k_8$  を選ぶことに対応する。この場合、残り二つのケーラー構造の線形結合として正則 2-form が与えられる。

$$\omega_{(2,0)} = k_6 + ik_7 = -idw \wedge (-Hdx^8 + \widetilde{ix}^9) \quad (121)$$

ここで確かに  $dw$  が現れており、この 2-form が  $(2,0)$ -form であることをうかがわせている。Taub-NUT 空間は複素 2 次元であるから、もう一つの複素座標を定義できれば十分である。この座標を  $\rho$  として、(121) が次のように書けることを要請しよう。

$$\omega_{(2,0)} = -idw \wedge d\rho \quad (122)$$

このためには、 $F$  を何らかの関数として次の式が成り立つ必要がある。

$$-Hdx^8 + \widetilde{ix}^9 = d\rho + Fdw \quad (123)$$

これを (121) に代入すると、関数  $F$  を含む部分は消えて、確かに (122) が得られる。関数  $F$  を決めるには、積分可能性を要請する。すなわち、(123) の両辺の外微分をとった式

$$-dH \wedge dx^8 + ih_2 = dF \wedge dw \quad (124)$$

が成り立つことを要請する。この解を得るために、(90) を座標  $w$  を用いて書いてみると、

$$\partial_w^* H = -ih_{8w^*}, \quad \partial_w H = ih_{8w}, \quad \partial_8 H = 2ih_{ww^*}. \quad (125)$$

となるが、これらを用いれば (124) の  $dw^* \wedge dx^8$  成分が成り立つことはすぐに分かる。 $dw \wedge dx^8$  成分と  $dw \wedge dw^*$  成分は次の関係式が成り立つことを要求する。

$$\partial_8 F = 2ih_{8w}, \quad \partial_w^* F = ih_{w^*w}. \quad (126)$$

ここで、 $h_2 = dV$  によって定義される 1-form ポテンシャル  $V$  として、次のような形で与えられるようなゲージを取る。

$$W = \sum_I f_I(|w - w_I|, x^8) \frac{d\phi_I}{2\pi} \quad (127)$$

ただし  $\phi_I$  は  $w - w_I$  の偏角であり、

$$d\phi_I = \frac{1}{2i} \left( \frac{dw}{w - w_I} - \frac{dw^*}{w^* - w_I^*} \right) \quad (128)$$

が成り立つ。関数  $f_I$  の具体的形を決めるのは簡単であるが、ここでは必要ない。ゲージ場を (127) のような形に取ったとしても、 $f_I$  にはゲージの取り方に対応する不定性があることを注意しておこう。例として原点 ( $w = x^8 = 0$ ) にモノポールが一つある場合を考えてみよう。この場合、ゲージ場は次のように取ることができる。

$$W = \frac{c - \cos \theta}{4\pi} d\phi. \quad (129)$$

$c$  がゲージに依存する定数であり、北極方向と南極方向へ伸びるディラック弦の上のフラックスの量を決定する。一般の場合には (127) の右辺の  $f_I$  の定数部分が  $I$  番目のモノポールのディラック弦の北極、南極方向への割り振りを決定する。

(126) の一つ目の式は  $Fdw = 2iW_w dw$  と取ること成り立つことはすぐにわかる。さらにこれは二つ目の式も満足する。なぜなら (127) のゲージにおいては  $\partial_w W_{w^*} = -\partial_w^* W_w$  だからである。従って次の式を積分することによって座標  $\rho$  を定義することができる。

$$\begin{aligned} d\rho &= -Hdx^8 + idx^9 + iW_{w^*} dw^* - iW_w dw \\ &= -Hdx^8 + \widetilde{ix}^9 - 2iW_w dw. \end{aligned} \quad (130)$$

この積分は初等的であるから直ちに実行することができる。その結果は、例えば [7] などに与えられている。(87) の計量や (106) 中のケーラー形式  $k^8$  は (130) を用いて次のように書き換えられる。

$$ds_{\text{TN}}^2 = \frac{1}{H} \widetilde{d\rho} \widetilde{d\rho}^* + H dw dw^*. \quad (131)$$

$$k_8 = \frac{1}{2Hi} \widetilde{d\rho} \wedge \widetilde{d\rho}^* + \frac{H}{2i} dw \wedge dw^* \quad (132)$$

ただし、(1,0)-形式  $\widetilde{d\rho}$  を次のように定義した。

$$\widetilde{d\rho} = d\rho + 2iW_w dw = -H dx^8 + i \widetilde{dx}^9. \quad (133)$$

座標  $\rho$  を定義するための式 (130) にはゲージ場のポテンシャル  $W$  が用いられている。 $W$  はモノポールゲージ場であるから多様体全体で定義することができず、どうしてもディラック弦が現れる。ゲージ (127) のもとでは、ディラック弦はモノポールから  $x^8$  軸に沿って伸びる。それぞれの center から上に伸びる場合と下に伸びる場合を考えることができるので、ディラック弦の向きが異なる幾つものゲージが存在する。(さらに一般には上下に半端なフラックスを持つディラック弦が伸びるような場合もありえるがここでは考えない。)

ディラック弦がモノポールから  $x^8$  座標の負の方向に伸び、 $x^8$  の正の側でうまく定義されるポテンシャル  $W^+$  と、ディラック弦が  $x^8$  座標の正の方向に伸び、 $x^8$  の負の側でうまく定義されるポテンシャル  $W^-$  の間のゲージ変換は

$$\Delta W = W_+ - W_- = -\frac{d\phi}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi i} \sum_i \left( \frac{dw}{w - w_i} - \frac{dw^*}{w^* - w_i^*} \right) \quad (134)$$

と与えられる。(130) の二行目の表式で  $\widetilde{dx}^9$  はゲージ不変であり、最後の項だけがゲージ変換の影響を受

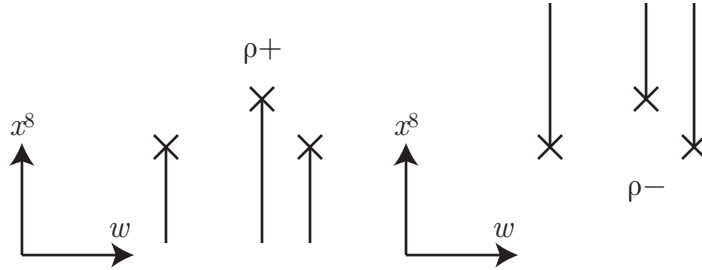


図 4: 二つの座標  $\rho_+$  と  $\rho_-$  はディラック弦の異なる配置に対応している。

けることを考慮すれば、 $W^\pm$  に対応する複素座標  $\rho^\pm$  の間の関係が次のように与えられる。

$$\rho_+ - \rho_- = \frac{1}{2\pi} \sum_I \log(w - w_I) \quad (135)$$

$x^9$  が周期 1 の  $S^1$  上の座標であったことに対応して、複素座標  $\rho_\pm$  は周期が  $i$  である。このような多価性をなくすために次のように  $x$  と  $y$  を定義するのがよい。

$$x = e^{2\pi\rho_+}, \quad y = e^{-2\pi\rho_-} \quad (136)$$

$x$  座標は  $x^8 \rightarrow \infty$  が  $|x| \rightarrow \infty$  に対応するように、 $y$  座標は  $x^8 \rightarrow -\infty$  が  $|y| \rightarrow \infty$  に対応するように定義した。また、どちらの座標も対応するゲージ場  $W$  のディラック弦の上で 0 になる。 $\rho_+$  と  $\rho_-$  が (135) で関係しているため、 $x$  と  $y$  は独立ではない。実はこれら二つの座標の間に成り立つ関係式が成り立つ関係式が Taub-NUT 空間を代数多様体として与える式 (120) に他ならない。

これまででは、全てのディラック弦が同じ方向を向いているようなゲージのみを考えて二つの座標  $\rho^\pm$  を定義したが、center ごとにディラック弦の向きが異なるようなゲージを用いて座標を定義することもできる。たとえば、下向きのディラック弦を持つ center の集合を  $X$  とすれば、対応する  $\rho$  座標  $\rho_X$  は次のように与えられる。

$$\rho_X = \rho_- + \frac{1}{2\pi} \sum_{I \in X} \log(w - w_I) = \rho_+ - \frac{1}{2\pi} \sum_{I \notin X} \log(w - w_I) \quad (137)$$

このような座標は、のちに特異点のブローアップを考える際に重要な役割を果たす。

Taub-NUT 空間の構造は、遠方でのサイクルの大きさと center の位置  $x_I^i$  を与えることで決まる。Taub-NUT 空間を表す代数方程式 (120) および正則 2 形式 (138) には、それらのパラメータのうち  $w_I$  だけが含まれている。このことは、パラメータのうち  $w_I$  は複素構造を与えるパラメータであり、これら以外のパラメータ  $x_I^s$  およびサイクルの漸近的な大きさ  $L_{\text{TN}}$  はケーラー構造を決めるものであるということの意味している。

あとで用いるために正則 (2, 0) 形式 (122) のいくつかの表式を与えておこう。

$$\omega_{(2,0)} = -idw \wedge d\rho = \frac{1}{2\pi i} dw \wedge \frac{dx}{x} = \frac{i}{2\pi} \frac{dx \wedge dy}{\partial_w \prod_I (w - w_I)} \quad (138)$$

## 2.5 ブローアップ

§2.4 では Taub-NUT 空間が代数多様体として次のように与えられることを示した。

$$F(x, y, w) \equiv xy - \prod (w - w_I) = 0. \quad (139)$$

§2.2 で述べたように、この多様体は複数個の center が重なったときに singular になる。その際、center が重なるというのは、3 次元ベクトル  $(w_I, x_I^s)$  が一致することを意味する。しかし (139) にはこれらのパラメータのうち  $w_I$  のみしか現れていない。したがって、 $x_I^s$  が異なり、実際には manifold が singular では無い場合でも  $w_I$  が重なると、代数方程式 (139) は singular になる。この特異性は見かけ上のもので、 $x^s$  方向についての center のずれを表すことができるような新たな座標を導入することで除去することができる。この手続きはブローアップと呼ばれる。

まず (139) によって定義される複素代数多様体が singular になるのはどういう場合かを見てみよう。もし、ある点の近傍で多様体が  $\mathbb{C}^2$  の構造をしており、 $x, y, w$  のうちの二つがその良い座標になっていればその点では regular、そうでなければ singular であるという。たとえば、 $(x, y)$  という座標の組が regular であるための条件は、 $x$  と  $y$  を指定したときに近傍内部で (139) が  $w$  について一意的に解けること、すなわち  $\partial F / \partial w \neq 0$  であることである。他の 2 つの座標の組についても同様なことがいえるので、singular であるという条件は次のように与えることができる。

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial w} = 0. \quad (140)$$

ここでは (139) で定義される多様体上の点について議論しているので、 $F = 0$  という条件は常に課される。(140) に  $F$  の具体形を代入すれば、次の式を得る。

$$x = y = \prod (w - w_I) = \frac{d}{dw} \prod (w - w_I) = 0. \quad (141)$$

$w$  を含む二つの多項式に対する条件式は、 $w_I$  が全て異なれば解を持たない。すなわちその場合はいたるところ regular である。それに対して  $w_I$  のうちのいくつかが重なると、 $w$  がその値になる点で singular になる。

$w_I$  のうちの  $N$  個が重なっている場合を考え、その値が  $w_I = 0$  になるように  $w$  座標を定義しよう。そのとき、 $w = 0$  近傍では適当な変数のリスケールを行うことで (139) が次のように書ける。

$$xy = w^N. \quad (142)$$

$w = 0$  近傍を考えているので  $\mathcal{O}(w^{N+1})$  の項は無視した。§2.2において  $N$  個の center が現れると  $A_{N-1}$  型の特異点が現れることを述べたが、この代数方程式が実際に (104) で定義される  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  オービフールドを記述していることは以下のようにわかる。 $z_1$  と  $z_2$  を orbifold  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  の covering space  $\mathbb{C}^2$  上の複素座標であるとしよう。orbifold は  $(z_1, z_2)$  に対して同一視 (104) を行うことで定義できる。座標  $(z_1, z_2)$  が異なる値であっても、それらが  $\mathbb{Z}_N$  変換で移りあうならば  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N$  上では同一の点とみなされるから、 $(z_1, z_2)$  は orbifold 上の点と一対一対応しておらず、良い座標ではない。orbifold 上での良い座標として (104) のもとで不変である次の単項式を定義する。

$$x = z_1^N, \quad y = z_2^N, \quad w = z_1 z_2. \quad (143)$$

すると、(142) はこれらの不変多項式の間関係式であるとみなすことができる。

ここでは、代数多様体として  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$  の構造を持つことを述べたが、計量まで含めてそのような構造を持つかは別の問題であることを注意しておこう。上でも述べたように、代数方程式 (120) は 67 方向、すなわち  $w$  方向の構造のみを与えているから、この式が singular になったとしても center が  $x^8$  方向に離れていれば多様体は singular ではない。この場合、定義方程式 (142) が singular になるのは、 $x = y = w = 0$  という部分空間が多様体上の一点を与えないためである。

このことをもう少し詳しく見てみよう。3 次元ベース空間中の直線  $w = 0$  上にいくつかの center が重ならず並んでいる場合を考え、それらのうち  $x^8$  が最大のものから順に  $I = 1, \dots, N$  とラベルしよう。(図 5) 座標  $\rho_+$  は全てのディラック弦が下向きになるゲージ場  $W_+$  を用いて定義される。従って  $w = 0$  の直

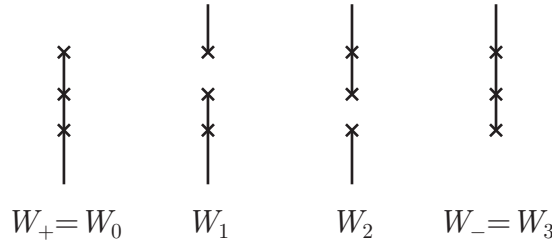


図 5: ブローアップはディラック弦の異なる配置に対応した座標を導入することによって実現される。

線上で  $x^8 \leq x_1^8$  の部分にディラック弦が伸びており、そこでは  $\rho_+$  が発散し  $x$  座標は 0 になっている。同様に、 $w = 0$  の直線上の  $x^8 \geq x_N^8$  の範囲では  $\rho_-$  が発散し、 $y = 0$  になっている。従って  $x_N^8 \leq x^8 \leq x_1^8$  の区間では全ての点で  $x = y = 0$ 、 $w = 0$  であって、 $x, y, w$  の全てを用いたとしてもこの二次元部分空間上の点を区別することができない。

この二次元部分空間上の点を区別するためには、新たな座標を導入する必要がある。これは、 $w = 0$  直線上の center に挟まれたそれぞれの区間においてディラック弦が存在しないようなゲージ場を用いて座標を定義することにより実現される。 $N$  個の center で  $N + 1$  の部分に分割された  $x^8$  軸のそれぞれの部分を  $x^8$  が大きいほうから  $S_0, S_1, \dots, S_N$  としよう。つまり、 $S_k$  はベース空間上の直線  $w = 0$  上の  $x_k^8 \leq x^8 \leq x_{k-1}^8$  の区間である。形式的に  $x_0^8 = \infty$ 、 $x_{N+1}^8 = -\infty$  と定義しておく。 $S^1$  のファイバーまであわせて考えれば、 $S_0$  と  $S_N$  の位相はディスクであり、それ以外は  $S^2$  である。

ディラック弦の向きを変えるゲージ変換に対応した座標変換の式 (137) を用いて区間  $S_k$  にディラック弦がないようなゲージ場  $W_k$  を与えれば、それに対応する座標  $\rho_k$  を用いて  $S_k$  上の点を区別することが

できる。ゲージ変換の式 (137) を用いれば座標  $t_k = e^{2\pi\rho_k}$  および  $t'_k = e^{-2\pi\rho_k}$  が次のように与えられることがわかる。

$$t_k = w^{-k}x, \quad t'_k = w^{k-N}y. \quad (144)$$

座標  $t_k$  は区間  $S_k$  より上側では発散し、下側では 0 になる。定義より  $t_k t'_k = 1$  が成り立ち、互いに逆数の関係になっているが、このことは (144) と (142) から確認できる。 $(t_k, t'_k)$  は  $S_k$  上の stereographic coordinates になっている。(144) のそれぞれの式は (142) を用いて次のように書き換えられる。

$$y t_k = w^{N-k}, \quad x t'_k = w^k. \quad (145)$$

これらはそれぞれ  $A_{N-k-1}$  型および  $A_{k-1}$  型の特異点を表している。つまり、新しい座標を導入することにより、一つに縮退していた  $N$  個の center よりなる  $A_{N-1}$  型の特異点が  $S_k$  をはさむ  $A_{k-1}$  特異点と  $A_{N-k-1}$  特異点に分解されたのである。このように、新たな座標の導入によってある特異点をよりゆるい特異点に分解していくことをブローアップと呼ぶ。全ての球面  $S_k$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ) の構造を見るためには、 $N-1$  個のそれぞれの球面に対して (144) のような座標を導入する必要がある。それらの座標の導入により、 $A_{N-1}$  型特異点を  $N-1$  個の  $A_0$  型の特異点 (これは実は特異点ではない。) に分解することができる。

もとの特異点の構造は、ブローアップしたときに何個の  $S^2$  が現れるか、そしてそれらがどのように交差しているかという情報として残されている。実は  $A_{N-1}$  型特異点をブローアップして得られる  $N-1$  個の  $S^2$  の交差数を行列の形に表すと、 $A_{N-1}$  リー代数のカルタン行列の形になることがわかる。言い方を変えると、特異点近傍のコンパクト 2-サイクルで生成されるホモロジー群  $H_2$  は  $A_{N-1}$  のルート格子をなす。これが  $A_{N-1}$  型特異点という名の由来である。

## 2.6 零モード

Taub-NUT 空間には non-compact 2-cycle の Poincare dual として center 付近に局在化した 2-form の zero-mode が一つ存在している [8, 9]。その zero mode を具体的に与えておこう。

まずは計算を簡単にするために center が一つだけの場合を考える。その背景上で、2-形式場の規格化可能なゼロモード、すなわち規格化可能な調和 2-形式の個数が一つだけであると仮定しよう。すると、そのゼロモードは Taub-NUT 空間の対称性  $SU(2) \times U(1)$  のもとで不変でなければならない。このことから、2-form の形が次のように推測できる。

$$\eta = f h_2 + df \wedge \widetilde{dx}^9 \quad (146)$$

これが (少なくとも center 以外では) closed であることは実際に微分してみることによってすぐに示される。ゼロモードが一つだけであるということは、そのゼロモードが自己双対、または反自己双対であることも要求する。 $*_4 f h_2 = -f H^{-1} dH \wedge \widetilde{dx}^9$  を用いれば self-dual または anti-self dual であるための条件は  $dH/H = \pm df/f$  である。右辺の符号が正であれば anti-self-dual ( $*_4 \eta = -\eta$ )、負であれば自己双対 ( $*_4 \eta = \eta$ ) となる。この式は、 $f = cH^{\pm 1}$  と解くことができる。center で正則であるためには、center で  $f = 0$  になる必要がある。したがって  $f = cH^{-1}$  ととらなければならない、このとき  $\eta$  は自己双対である。 $\eta$  の具体的な表式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{L_B^2} (H^{-1} h_2 + dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9) \\ &= \frac{-i}{8\pi r^3 L_B^2} \left[ \frac{1}{H^2} (w^* dw \wedge \widetilde{d\rho}^* - w dw^* \wedge \widetilde{d\rho}) + \frac{x^8}{H} dw \wedge dw^* - \frac{x^8}{H^3} \widetilde{d\rho} \wedge \widetilde{d\rho}^* \right]. \end{aligned} \quad (147)$$

二行目の表式より、 $\eta$  が (1,1)-form であることがわかる。あとで都合のいいように積分定数はコンパクト化の周期を用いて  $c = L_A^2 = 1/L_B^2$  とおいた。実際この規格化においては  $\eta$  のノルムが 1 になる。このこ

とは以下のようにして示すことができる。まず、 $\eta$  が自己双対であることを用いて次のように書き換える。

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{g} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \int \eta \wedge \eta = \frac{2}{L_B^4} \int H^{-1} h_2 \wedge dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9 = \frac{1}{L_B^4} \int h_2 \wedge dH^{-2} \wedge \widetilde{dx}^9 \quad (148)$$

さらに、 $x^9$  座標の周期が 1 であることや、 $h_2$  を  $S^2$  上で積分すると 1 になることを用いれば

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{g} \eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{L_B^4} \int_{r=0}^{r=\infty} dH^{-2} = 1. \quad (149)$$

となる。さらにもう一つ重要な性質として、非コンパクト 2-サイクル  $S_1$  上での  $\eta$  の積分が 1 になる。

$$\int_{S_1} \eta = -\frac{1}{L_B^2} \int_{S_1} dH^{-1} \wedge \widetilde{dx}^9 = -\frac{1}{L_B^2} \int_{r=\infty}^{r=0} dH^{-1} = 1. \quad (150)$$

この零モードは、ケーラー構造の変形に対応している。ここでは中心が一つだけの Taub-NUT を考えており、これまでその中心を原点に取っていたが、中心の位置を任意の点  $\mathbf{r}_1 = (x_1^6, x_1^7, x_1^8)$  においてみよう。すると、ケーラー形式  $k_8$  のパラメータ  $x_1^8$  による微分は次のように零モードを与える。

$$\left( \frac{\partial k_8}{\partial x_1^8} \right)_{\rho, w} = \eta. \quad (151)$$

ただし、実際に偏微分を計算してこの式を得る際には以下のような注意が必要である。まず、成分の微分を行う場合に正則座標の表式 (132) を用いる必要がある。成分は座標  $x^8$  と  $w$  に依存しているので、それらの変数を固定して偏微分すると、

$$\left( \frac{\partial k_{ik}^8}{\partial x_1^8} \right)_{x^8, w} dz^i \wedge dz^{*j} = L_B^2 H \eta. \quad (152)$$

が得られる。さらに  $(\rho, w)$  座標を固定するために (130) を通して  $x^8$  座標が  $x_1^8$  に依存することを考慮する必要がある。ここで考えている center が一つの場合にはケーラー形式が  $x^8$  と  $x_1^8$  を同時に動かしたときに不変であることを用いれば、 $\rho$  を固定した偏微分は

$$\left( \frac{\partial k_8}{\partial x_1^8} \right)_{\rho, w} = \frac{1}{L_B^2 H} \left( \frac{\partial k_8}{\partial x_1^8} \right)_{x^8, w} = \eta \quad (153)$$

となり、(151) が得られる。

同様に、複素構造の変化も  $\omega_{(2,0)} \rightarrow \omega_{(2,0)} + \delta w_1 \eta$  のような正則 2 形式の変化として表すことができる。もちろんこの変形を行った場合にはもとの正則座標はもはや正則座標ではなくなるので、再び (2, 0) 形式に戻すためには適当な座標変換が必要である。

center が複数個ある場合にも、それぞれの center の近傍に局在化した harmonic 2-form  $\eta_I$  を定義することができて、次の性質を満足する。

$$\int_{S_I} \eta_J = \int \eta_I \wedge \eta_J = \delta_{IJ}, \quad *_4 \eta_I = \eta_I. \quad (154)$$

$\eta_I$  の具体形を求めるには (151) と同様にケーラー形式を center 座標  $x_I^8$  で微分すればよい。

## 2.7 BPS 曲面

Taub-NUT 空間上のある 2-サイクルに巻きついたブレーンはしばしば重要な役割を果たす。ブレーンの運動方程式は、その上のゲージ場などの励起を考えなければ、単にブレーンが極小曲面であることを要請する。すなわち、次の式によって与えられる面積  $A$  を最小にするような形状が実現される。

$$A = \int dA = \int \sqrt{\det G_{\alpha\beta}} d^2\sigma \quad (155)$$

$G_{\alpha\beta}$  は  $\Sigma$  上の誘導計量であり、次のように定義される。

$$G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n g_{mn} \quad (156)$$

体積要素に現れる  $G_{\alpha\beta}$  の行列式は次のように書き換えることができる。

$$\det G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\delta} G_{\alpha\beta} G_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} S'^{mn} S'^{pq} g_{mp} g_{nq} \quad (157)$$

ただし、 $S'^{mn}$  は次のように定義される反対称テンソルである。

$$S'^{mn} = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^m \partial_\beta x^n \quad (158)$$

(157) と (158) に現れる  $\epsilon^{\alpha\beta}$  は計量に依存しないテンソル密度として定義されていることに注意しよう。テンソル密度のかわりにテンソルである反対称テンソル  $\epsilon^{\alpha\beta}/\sqrt{G}$  を用いて  $S^{mn}$  を定義する。これは  $S'^{mn}$  と次の関係にある。

$$S^{mn} = \frac{S'^{mn}}{\sqrt{G}} \quad (159)$$

$S^{mn}$  は次のように規格化されている。

$$|S|^2 \equiv \frac{1}{2} S^{mn} S^{pq} g_{mp} g_{nq} = 1. \quad (160)$$

一般の反対称テンソル  $X^{mn}$  に対してもノルム  $|X|^2$  は同様に定義されるものとする。 $S^{mn}$  は次のように定義することもできる。

$$S^{mn} dA = \int_{dA} dx^m \wedge dx^n \quad (161)$$

ただし  $dA$  は曲面上の微小面積要素である。 $K$  を次の関係式を満足する反対称テンソルであるとする。

$$K_{mp} K^p_n = -g_{mn} \quad (162)$$

すなわち、 $K$  を複素構造とする。このとき、 $S^{mn}$  のランクが 2 であることから、次の式が成り立つ。これは Wirtinger's inequality と呼ばれるものの一種である。

$$\frac{1}{2} K_{mn} S^{mn} \leq 1 \quad (163)$$

従って、面積について次の不等式を示すことができる。

$$A = \int dA \geq \frac{1}{2} \int K_{mn} S^{mn} dA = \frac{1}{2} \int K_{mn} dx^m \wedge dx^n = \int K_2 \quad (164)$$

ここまでは、 $K$  が (162) を満足することしか用いていない。

背景がケーラー多様体であり、 $K$  がケーラー形式  $k$  であるとしてみよう。 $k$  は閉形式であるから (164) の右辺の積分は曲面のホモロジークラスを決めるだけで決まってしまう。このように、曲面の最小面積を定めるような外微分形式 (この場合  $k$ ) は Calibration form と呼ばれる。曲面のホモロジークラスだけに依存する (164) の右辺をここでは中心電荷と呼び、 $Z$  で表すことにしよう。すなわち、曲面  $\Sigma$  の中心電荷を次のように定義する。

$$Z = \int k_2 \quad (165)$$

この量は実数である。なぜ  $Z$  を中心電荷と呼ぶのかについては §3.4 で詳しく説明する。不等式 (164) は  $K$  として  $k$  をとった場合にも  $-k$  をとった場合にも成り立つので中心電荷  $Z$  と面積  $A$  の間には次の不等式が成立する。

$$A \geq |Z|. \quad (166)$$



もし (166) の等号が成り立つとすれば、その曲面は極小曲面であることが保障される。そのような manifold は calibrated submanifold と呼ばれる。(164) の等号が成り立つためには、曲面上の全ての点で (163) の等号が成り立つ必要がある。すなわち次の式が成り立つ必要がある。

$$\frac{1}{2}k_{mn}S^{mn} = \pm 1 \quad (167)$$

これはケーラー形式  $k_2$  の曲面  $\Sigma$  への引き戻しが符号を除き  $\Sigma$  上の体積形式であることを意味している。すなわち

$$k_2|_{\Sigma} = \pm \omega_2. \quad (168)$$

$\Sigma$  上に複素座標  $z$  を定義し、背景空間についても複素座標  $x^i$  と  $x^{\bar{i}}$  を用いると、(168) は次のように書くことができる。

$$i\partial x^i \bar{\partial} x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} - i\bar{\partial} x^i \partial x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} = \sqrt{\det G} = \pm i G_{zz^*} \quad (169)$$

正符号を取れば、この式は  $\bar{\partial} x^i \partial x^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} = 0$  を与えるが、計量が非退化であることを用いればこの条件は  $\bar{\partial} x^i = 0$  であること、すなわち  $x^i$  が  $z$  の正則関数であることを意味する。

Taub-NUT 空間や平坦な 4 次元空間を含む、4 次元ハイパーケーラー空間の場合、

$$k^{(m)}k^{(n)} = \epsilon_{mnp}k^{(p)} - \delta_{mn}k^{(m)}. \quad (170)$$

を満足する 3 つのケーラー形式  $k^{(m)}$  が存在するので、それぞれに対して中心電荷を定義できる。

$$Z_m = \int k_2^m \quad (171)$$

任意の 3 次元単位ベクトル  $n_m$  に対し、 $n_m k_2^m$  をケーラー形式として用いることができ、そのケーラー形式に対して (166) が成り立つ。これは次の式が成り立つことを意味する。

$$A \geq \sqrt{\sum_m Z_m^2} \quad (172)$$

Taub-NUT 多様体の場合には、(111) が示しているようにサイクル  $S_I$  の中心電荷は対応する center の座標を与える、つまり、

$$Z_m[S_I] = x_I^m - x_0^m = \int_{S_I} k^m. \quad (173)$$

また、 $|Z_m| = A$  を満足するような極小曲面は 678 空間上では直線として表される。(ただしこれは  $S^1$  のファイバーに巻きついた 2-サイクルの場合である。678 空間への射影が二次元的に広がっているような極小曲面も存在する。)

### 3 NS5-branes の T-双対性

この節では、NS5-brane と Kaluza-Klein モノポールの間の T-dual 関係について詳しく述べる。特に、NS5-brane の位置を Taub-NUT 空間上の 2-form の積分として与える公式は後の節の議論において重要な役割を果たす。

#### 3.1 NS5-brane 解

NS-NS 2-form 場  $B_2$  に対して磁氣的に結合したオブジェクトを考えよう。その磁荷  $Q$  は次のように場の強さ  $H_3 = dB_2$  の積分として定義される。

$$Q = \oint_{S^3} H_3 \quad (174)$$

ただし積分はある 3 次元球面（一般には他の 3 次元閉曲面でもよい。）上で実行され、 $Q$  はその  $S^3$  の中を通り抜けるオブジェクトのチャージである。あるオブジェクトが「 $S^3$  の中を通り抜ける」ということが定義できるためには、そのオブジェクトが  $S^3$  で取り囲めるようなもの、すなわち余次元が 4 のものでなければならない。10 次元時空中では、そのようなオブジェクトは 5-ブレーンである。NS-NS 2-form 場  $B_2$  に磁氣的に結合した 5-ブレーンは NS5-ブレーンと呼ばれる。

磁氣的なカレントをゲージ場  $H_3$  のソースとして

$$J_4 = dH_3 \quad (175)$$

で定義すれば、電荷 (174) は次のように  $J_4$  の積分として与えることができる。

$$Q[M] = \int_{\mathcal{M}} J_4 \quad (176)$$

積分領域  $\mathcal{M}$  は (174) で用いた  $S^3$  を端とする 4 次元の空間である。

ブレーンの world volume が余次元 4 の部分多様体  $\mathcal{C}$  として与えられたとしよう。このとき、(176) の電荷は二つの多様体  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{C}$  の交差数を与えている。カレント  $J_4$  は  $\mathcal{C}$  の上でのみ 0 でない  $\delta$  関数的な 4-form である。これを  $\delta_4(\mathcal{C})$  と書くことにしよう。次の式が成り立つ。

$$\int_{\mathcal{M}} \delta(\mathcal{C}) = \langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle. \quad (177)$$

右辺は  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{C}$  の交差数を表している。この式が任意の  $\mathcal{M}$  に対して成り立つことを要請することにより  $\delta(\mathcal{C})$  が定義されると考えることもできる。

式 (177) においてはブレーンを厚さのない膜のようなものとして扱っているが、ブレーンは電荷を持っているため、その周囲のゲージ場を誘起し、さらにそのゲージ場のエネルギーは時空を曲げる。この様子を超重力理論の運動方程式の解として表すことができ、ブレーンの古典解と呼ばれる。

漸近的に平坦な 10 次元時空の 012345 方向に広がる NS5-brane を考えよう。これは、ブレーンのカレントが次のように与えられることを意味している。

$$J_4 = \rho(x^i) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8 \wedge dx^9. \quad (178)$$

さらに、ブレーンを一枚ごとに  $I$  でラベルし、その 6789 空間での位置を  $x_I^i$  とすれば、 $\rho(x^i)$  は次のように与えられる。

$$\rho(x^i) = \sum_I \delta^4(x^i - x_I^i). \quad (179)$$

ブレーンが重なっている場合には  $x_I^i$  のうちのいくつかが同じ値をとるものとする。

古典解を与えるためにはまず、ブレーンの密度  $\rho(x^i)$  が与えられたときに次の方程式を解くことによって 6789 空間上の調和関数  $H$  を求める。

$$\hat{\Delta}_4 H = -\rho(\mathbf{r}). \quad (180)$$

ただし (180) 中のラプラシアン  $\hat{\Delta}$  は 6789 空間に平坦な計量が導入されているとしたときのラプラシアンであり、 $\hat{\Delta}_4 = \partial_6^2 + \partial_7^2 + \partial_8^2 + \partial_9^2$  によって定義される。遠方で定数  $c$  に漸近すると仮定すれば、解は次のように与えられる。

$$H = c + \sum_I \frac{1}{4\pi^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2} \quad (181)$$

調和関数が得られれば、アインシュタイン方程式やディラトン場の運動方程式の解は次のように与えられる。

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (182)$$

$$e^\phi = g_{\text{str}} H^{1/2} \quad (183)$$

$g_{\text{str}}$  は無限遠方でのディラトンの期待値を決める定数である。ここでは必ずしも調和関数  $H$  は無限遠方で 1 になるように取るわけではないので、一般には  $g_{\text{str}}$  と  $e^\phi$  の無限遠方での値は異なる場合もあることを注意しておく。

ゲージ場  $H_3$  を決定するには (175) を解かなければならない。これはガウスの定理を用いれば簡単であるが、すでに調和関数  $H$  が得られている場合には (180) が  $d\widehat{*}_4 dH = \widehat{*}_4 \rho(\mathbf{r})$  と書き換えられ、 $J_4 = \widehat{*}_4 \rho$  であることから、次のように与えることができる。

$$H_3 = \widehat{*}_4 dH. \quad (184)$$

ただし、 $\widehat{*}_4$  は 6789 空間で計量がクロネッカーの  $\delta$  で与えられるとしたときのホッジ双対を表す。

### 3.2 巻きついた NS5-brane

NS5-brane が巻きついた  $S^1$  方向についての T-duality 変換を行うことを考えよう。まずは IIA 型超重力理論を考え、その古典解 (182) (183) (184) から出発する。NS5-brane に平行な方向のうち  $x^5$  が周期  $L_A$  の  $S^1$  にコンパクト化されているとしよう。§1 で与えた Buscher's rule を用いるために、 $x^5$  座標をリスケールして周期性が  $x^5 \sim x^5 + 1$ 、計量が  $g_{55} = L_A^2$  になるように取っておく。すなわち、IIA 側の計量は

$$ds^2 = ds_5^2 + L_A^2 (dx^5)^2 + H \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (185)$$

と与えられるとする。計量および  $B$  場の展開式 (34) (37) と見比べると、9 次元での  $U(1)$  ゲージ場  $V$  と  $W$  がともに 0 であることがわかる。そのため、計量と  $B$  場はそれぞれ独立に変換される。IIB 側の計量は

$$ds^2 = ds_5^2 + \frac{1}{L_A^2} (dx^5)^2 + H \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (186)$$

となり、 $B$  場の式は変化せず、(184) がそのまま成り立つ。ディラトンについては、(44) に従って変換すれば良いが、それはディラトンについての解 (183) の中の結合定数パラメータを次のものに置き換える。

$$g_{\text{str}}^B = \frac{g_{\text{str}}^A}{L_A} \quad (187)$$

以上のことから、 $S^1$  に巻きついた NS5-brane 解に対して T-dual 変換を施したものは、dual な  $S^1$  に巻きついた NS5-brane 解になることがわかる。

このことは以上のように具体的な古典解を扱わなくても、T-duality 変換が 9 次元のゲージ場  $h_3$  に作用しないことから明らかである。巻きついた NS5-brane はこのゲージ場に対して磁気的なチャージを持つものとして特徴付けられるから、T-dual 変換のあともやはり巻きついた NS5-brane になるはずである。

### 3.3 巻きついていない NS5-brane

次に、巻きついていない NS5-brane について見てみよう。再び §1 で与えた Buscher's rule を用いる。そのために前節で与えた古典解をその垂直方向のうちの一つ、 $x^9$  方向についてコンパクト化する。§1 で与えた公式はコンパクト化の周期が 1 であるように取った場合に適用できるものである。そこでここでは  $x^9$  方向の周期は 1 とする。その代わりに  $S^1$  のサイズを調和関数  $H$  の漸近的な値、すなわち定数項によって表すことにする。計量 (182) より、 $g_{99}$  の値は調和関数  $H$  の値に一致するから、その値を  $L^2$  にしておけば、計量まで考慮したコンパクト化のプロパーな周期は  $L$  となる。

Buscher's rule を用いる際に問題なのは、このルールは  $x^9$  依存性がないような場合にだけ適用できるという点である。ここで考えているような  $x^9$  方向を垂直方向として持つような NS5-brane 解は明らかにこの条件を満足していない。そこでここでは、 $x^9$  依存性を持つモードは全て無視して、零モード部分だけに注目しよう。このような古典解は NS5-brane の密度を  $x^9$  方向に均す (smear する) ことで得ることができる。つまり、(179) にある電荷密度の代わりに  $x^9$  方向に平均化した次のものを用いる。

$$\rho = \sum_I \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_I) \quad (188)$$

これは Taub-NUT 解を記述する際に用いた (85) の形に一致している。 $\mathbf{r}_I$  は  $I$  によってラベルされるそれぞれの NS5-brane の 678 空間上の位置である。

また、4 次元空間上の微分方程式 (180) は 3 次元空間上の微分方程式 (88) に落ち、その解は (89) によって与えられる。ここでは次のように書いておこう。

$$H(\mathbf{r}) = L_A^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_I \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|} \quad (189)$$

定数項  $L_A^2$  は上で述べたように IIA 側のコンパクト化の方向の  $S^1$  の周期が漸近的に  $L_A$  になるように選んだ。

(34) と上記の計量を比較すれば

$$ds_9^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H dx^2, \quad e^{2\sigma} = H, \quad v_1 = 0. \quad (190)$$

$v_1 = 0$  であるということは  $\widetilde{dx}^9 = dx^9$  であることを意味している。

NS5-brane は  $x^9$  方向にまきついていないので、ゲージ場  $H_3$  については、必ず  $dx^9$  を含む。(37) に従って次のように分解する。

$$H_3^A = h_2 \wedge dx^9, \quad B_2^A = b_1 \wedge dx^9. \quad (191)$$

これを (175) に代入すれば、 $h_2$  が次の式を満足すべきことがわかる。

$$dh_2 = \rho(\mathbf{r}) dx^6 \wedge dx^7 \wedge dx^8. \quad (192)$$

この式は、 $h_2$  が密度  $\rho(\mathbf{r})$  で与えられる 3 次元空間中のディラックモノポールによって生じる  $U(1)$  ゲージ場の場の強さに他ならないことを表している。また、(90) に与えた関係式  $h_2 = -\widehat{*}_3 dH$  は (184) より従う。

さてここで Buscher's rule を適用して T-dual 変換を行おう。計量は (41) によって与えられる。すなわち

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_9^2 + e^{-2\sigma} (dx^9 + b_1)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + ds_{\text{TN}}^2. \end{aligned} \quad (193)$$

二行目へ移る際に (190) を代入した。 $ds_{\text{TN}}^2$  は (87) に与えられている Taub-NUT 計量である。つまり、NS-brane は T-dual 変換によって Taub-NUT の center に変換される。

(190) に与えられているように  $v_1 = 0$  であることは、T-dual 変換を行った後には  $B_2 = 0$  となることを意味する。さらに、ディラトン場については、

$$\phi' = \phi - \sigma = g_{\text{str}} \quad (194)$$

のように定数になる。

このように、NS5-brane の古典解に対して T-dual 変換を行って得られる古典解において、非自明な振る舞いをする場合は計量のみである。つまり、NS5-brane が完全に幾何学的なものに書き換えられた。ただし、ここでは NS5-brane の  $x^9$  方向の位置の情報は平均化によって失われてしまっている。この情報は実は T-duality 変換を行った後には  $B_2$  の情報に写されることが 3.4 で示される。

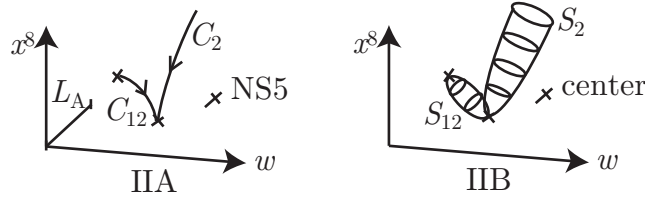


図 6:  $S^1$  方向にまきついていない NS5-brane は T-duality 変換によって Taub-NUT 空間の center (Kaluza-Klein monopole) へ移される。ある基準点から  $I$  番目の NS5-brane へ伸びる曲線を  $C_I$ 、 $J$  番目の NS5-brane から  $I$  番目の NS5-brane へ伸びる曲線を  $C_{IJ} = C_I - C_J$  とする。それに対応して、Taub-NUT 上の 2-サイクル  $S_I$  および  $S_{IJ}$  を定義することができる。  $S_I$  の位相はディスク、  $S_{IJ}$  の位相は  $S^2$  である。

### 3.4 中心電荷

§2.7 において示されたように、ハイパーケーラー空間上の 2-cycle  $\Sigma$  が与えられたとき、その上でケーラー形式  $k^A$  を積分することで面積の下限を与える量  $Z^A$  が得られた。この量は、 $\Sigma$  に巻きついたブレーンの中心電荷という物理的意味を持つ。

超対称変換の交換関係は常に運動量演算子を含むが、一般にはそれ以外に中心電荷を含む。超重力理論において、この電荷は重力多重項に含まれるゲージ場 (グラビフォトン) に結合している。ここで考えている IIB 型超重力理論の場合には、 $B_2$  や  $C_{\text{even}}$  がそのゲージ場に当たる。従って、中心電荷をこれらのゲージ場とブレーンとの結合によって定義することができる。実際に、反対称テンソル場の上で  $\xi_I$  および  $\xi'_I$  をパラメータとする超対称変換  $\delta$  と  $\delta'$  の交換関係を計算してみると、次のように (33) に与えられている  $H_2$  や (54) に与えられている  $G_{\text{odd}}$  を不変にするゲージ変換の形になる。

$$[\delta', \delta]B_2 = d\Lambda_1^{\text{NS}}, \quad [\delta', \delta]C_{\text{even}} = e^{-B_2} \wedge d\Lambda_{\text{odd}}. \quad (195)$$

計算を簡単にするために場の強さ  $H_3$  および  $G_{\text{odd}}$  が 0 である場合を考えたが、ポテンシャルは 0 であることは仮定していない。ゲージ変換パラメータ  $\Lambda$  は超対称変換パラメータ  $\xi_I$  と  $\xi'_I$  を用いて以下のように定義されている。

$$\Lambda_1^{\text{NS}} = \frac{1}{4}(\sigma_z)_{IJ}(\xi'_I \gamma_{[1]} \xi_J), \quad \Lambda_{2n-1} = \frac{1}{4e^\phi}(\sigma_x \sigma_z^{n+1})_{IJ}(\xi'_I \gamma_{[2n-1]} \xi_J). \quad (196)$$

ただし、 $\gamma_{[n]}$  は次のように定義される  $n$  形式である。

$$\gamma_{[n]} = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}. \quad (197)$$

ハイパーケーラー空間上のサイクル  $\Sigma$  に巻きついた基本的弦を考えてみよう。基本的弦は  $B$  場と結合するから、次のように中心電荷を定義することができる。

$$Z_{\text{F1}} \sim \frac{\partial S_{\text{brane}}}{\partial B} \quad (198)$$

ここで、右辺の微分の意味について補則が必要であろう。右辺の微分を、ある特定の座標における場  $B_2(x)$  による微分と解釈すると、右辺は電荷密度を与える。従って、それを空間全体で積分した電荷を得るためには、右辺の微分を  $B$  の定数モードによる微分と解釈しなければならない。  $B$  はテンソル場であり、一般には定数モードが定義できないが、そのような背景上では超対称性が破れていて中心電荷が定義できないことを意味している。もし超対称性が破れていない背景上では、いくつかの定数モードが存在してそれらによる微分として中心電荷を定義することができる。

たとえば、3つのケーラー構造  $k^A$  が存在するようなハイパーケーラー空間上ではこのモードによる変分  $\delta B_2 = \epsilon_A k^A$  を考えることにより、3つの中心電荷が次のように定義できる。

$$Z_{F1}^A = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon^A} S_{\text{brane}}[C_{\text{even}}, B_2 + \epsilon_A k^A] \Big|_{\epsilon_A=0} \quad (199)$$

実際これが (171) と一致することは、弦の作用が次のように与えられることから示される。

$$S_{F1} = S_{\text{NG}} + 2\pi \int B_2. \quad (200)$$

ただし、 $S_{\text{NG}}$  は南部-後藤作用であり、 $B$  場に依存しない。

特に背景時空として Taub-NUT を考え、サイクルが  $S_I$  である場合には、

$$Z_{F1}^m[\text{F1 wrapped on } S_I] = x_I^m - x_0^m. \quad (201)$$

が得られる。これは (173) に与えた式と全く同じであるが、ここではサイクル  $S_I$  に基本的弦の世界面という物理的解釈が与えられ、得られる電荷も物理的な中心電荷である。

実は全く同様な式が D1-brane を用いることによっても得られる。D-ブレーンの電荷に相当する中心電荷は D-ブレーン作用を RR-ポテンシャルの定数モードで微分することによって定義できる。ただしその際にはこれまで用いてきた  $C$  ではなく、次のように定義される  $\hat{C}$  を用いる必要がある。

$$\hat{C}_{\text{odd}}^A = e^{B_2^A} \wedge C_{\text{odd}}^A, \quad \hat{C}_{\text{even}}^B = e^{B_2^B} \wedge C_{\text{even}}^B. \quad (202)$$

この理由は反対称テンソル場のゲージ変換 (195) を見ることにより明らかになる。 $B$  場に対するゲージ変換のパラメータ  $\Lambda_1^{\text{NS}}$  は先ほど定義した基本的弦の中心電荷  $Z_{F1}$  によって生成される変換のパラメータとみなすことができる。同様に、D-ブレーンの電荷に相当する中心電荷による変換のパラメータは  $\Lambda_{\text{odd}}$  である。(195) に与えられている  $C$  のゲージ変換は  $B$  場を含んでいる。従って、中心電荷に直接結合するゲージ場とみなすことはできない。中心電荷に結合するのは (202) によって定義される  $\hat{C}$  の方である。背景がハイパーケーラー空間である場合を考えると、 $\hat{C}_2$  に結合する中心電荷  $Z_{D1}^A$  は次のように与えられる。

$$Z_{D1}^A = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon^A} S_{\text{brane}}[\hat{C}_2 + \epsilon_A k^A, B_2] \Big|_{\epsilon_A=0} \quad (203)$$

実際 2-サイクルに巻きついた D1-brane の場合にこれが (171) と一致することは、D-ブレーンの Chern-Simons 作用 (58) を  $\hat{C}$  を用いて書き換えた次の作用を用いて示すことができる。

$$S_{\text{CS}}^{\text{IIA}} = 2\pi \int_{2n-1} \hat{C}_{\text{odd}}^A e^{-\mathcal{F}_2^{\text{IIA}}}, \quad S_{\text{CS}}^{\text{IIB}} = 2\pi \int_{2n} \hat{C}_{\text{even}}^B e^{-\mathcal{F}_2^{\text{IIB}}}. \quad (204)$$

ここで注意すべき点は、作用 (204) は幾つもの  $C$  場を含むので、 $Z_{D1}$  電荷を持つのが必ずしも D1-ブレーンだけではないという点である。そのほかのブレーンに対しても (203) によって  $Z_{D1}$  電荷を定義することができ、その値は一般に 0 ではない。 $Z_{F1}$  についても同様であり、基本的弦だけではなく D-ブレーンも一般にはこの電荷を持つ。D-brane について  $Z_{F1}$  を得るには定義式 (199) の  $S_{\text{brane}}$  として D-brane の作用を代入すればよい。ただしそのとき RR-場は (199) に書かれているように  $C$  を用いておかなければならない。すなわち  $B$  で変分する際には  $\hat{C}$  ではなく、 $C$  を固定しなければならない。これはパラメータ  $\Lambda_1^{\text{NS}}$  によるゲージ変換は  $C$  を不変に保つが  $\hat{C}$  は変換してしまうからである。

特に背景時空として Taub-NUT を考え、サイクルが  $S_I$  である場合には、(203) で定義される中心電荷に対して

$$Z_{D1}^m[\text{D1 wrapped on } S_I] = x_I^m - x_0^m. \quad (205)$$

が得られる。これは (173) に与えた式と全く同じであるが、(201) の場合と同様にサイクル、電荷ともに物理的な意味が与えられている。このように、電荷が物理的に解釈できるということは、双対性のもとでどのように変換されるかを明らかにする上で重要である。

D1-brane の中心電荷  $Z_{D1}$  を定義するためのゲージ場  $\widehat{C}_2$  の変分に対してケーラー形式の具体系 (106) を代入すると、

$$\delta\widehat{C}_2^B = \epsilon_m k_2^m = \epsilon_m dx^m \wedge \widetilde{dx}^9 - \frac{H}{2} \epsilon_{mnp} \phi_m dx^n \wedge dx^p \quad (206)$$

が得られる。ただし、 $m, n, p = 6, 7, 8$  である。さらに、サイクル  $\Sigma$  として  $x^9$  方向に巻きついている  $S_I$  を考える場合には (206) の第 2 項は不要であり、変分  $\delta\widehat{C}_{m9}^B = \epsilon_m$  を考えれば十分である。すなわち、中心電荷が次のように与えられる。

$$Z_{D1}^m = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D1}}{\partial \widehat{C}_{m9}^B}. \quad (207)$$

T-dual 変換を行うと、(207) を type IIA のブレーンの言葉で表すことができる。 $\widehat{C}$  の T-dual 変換のもとでの変換則は次のように与えられる。

$$\widehat{C}_{\text{odd}}^A = \widehat{c}_{\text{odd}} + \widehat{c}_{\text{even}} \wedge \widetilde{dy}, \quad \widehat{C}_{\text{even}}^B = -\widehat{c}_{\text{even}} + \widehat{c}_{\text{odd}} \wedge \widetilde{dz} \quad (208)$$

ただし、以前に与えた 9 次元の場とは次のように関係している。

$$\widehat{c}_{\text{odd}} = e^{b_2} \wedge (c_{\text{odd}} - c_{\text{even}} \wedge V), \quad \widehat{c}_{\text{even}} = e^{b_2 - V \wedge W} \wedge (c_{\text{even}} + c_{\text{odd}} \wedge W). \quad (209)$$

特に、 $\widehat{C}_m^A = \widehat{C}_{mz}^B$  であるから、(207) は次のように書き換えることができる。

$$Z_{D1}^m = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D1}^B}{\partial \widehat{C}_{m9}^B} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D0}^A}{\partial \widehat{C}_m^A} = Z_{D0}^m \quad (210)$$

この式の左辺は 2-サイクルに巻きついた D1-brane の中心電荷と解釈されるべきものである。一方右辺はある曲線を世界線として持つ D0-ブレーンの中心電荷と解釈されるべきものである。たとえば、D1-brane が  $S_I$  に巻きついているとき、対応する D0-brane の世界線は図 6 の  $C_I$  によって与えられる。そしてその中心電荷は対応する NS5-brane の座標を与える。

$$Z_{D0}^m[\text{D0 along } C_I] = x_I^m - x_0^m. \quad (211)$$

すなわち、(210) は、NS5-brane の 678 方向の相対位置が T-dual 変換によってどのように Taub-NUT 空間の center の位置と関係しているかを表している式であると解釈することができる。

同様の関係式を用いることで、NS5-brane の  $x^9$  方向の相対位置についても情報を得ることができる。NS5-brane の  $x^9$  方向の相対位置は、D0-brane の  $Z_{D0}^9$  チャージによって与えることができる。このチャージに結合するゲージ場は  $\widehat{C}_9^A$  であり、T-dual 変換によって  $\widehat{C}_9^A = -\widehat{C}_9^B$  のように変換される。従って、次の式が成り立つ。

$$Z_{D0}^9 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D0}^A}{\partial \widehat{C}_9^A} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial S_{D(-1)}^B}{\partial \widehat{C}_9^B} = Z_{D(-1)}^m \quad (212)$$

特にサイクル  $S_I$  に巻きついた D1-brane に対して次のように与えられることがわかる。

$$x_I^9 - x_0^9 = Z_{D0}^9[\text{D0 along } C_I] = Z_{D(-1)}^m[\text{D1 wrapped on } S_I] \quad (213)$$

ここで、D1-ブレーン作用 (204) を用いれば、

$$x_I^9 - x_0^9 = \int_{S_I} \mathcal{F}_2 = \int_{S_I} B_2 - \int_{-\partial S_I} A_1. \quad (214)$$

が得られる。

関係式 (214) は、中心電荷を用いずとも、直接ブレーン上のゲージ場の T-dual 変換 (70) を用いることによっても示すことができる。すなわち、

$$\int_{S_I} \mathcal{F}_2^B = \int_{S_I} (\mathcal{F}_2^A + \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz}) = \int_{S_I} \widetilde{dy} \wedge \widetilde{dz} = \int_{C_I} \widetilde{dy} \quad (215)$$

最後の積分の意味は、直交座標系における  $C_I$  の両端での  $y$  座標の差であり、(214) の左辺に一致する。

(214) の右辺第 2 項は  $S_I$  の境界上での積分であるが、全ての  $I$  に対してこの境界は共通であり、また、その点での  $A_9$  の値は T-dual 変換により  $x_0^9$  座標と対応している。従って、 $x^9$  座標の基準点  $x_0^9$  を適当に選ぶことにより、境界上での積分を無視することができて、次の式を得る。

$$x_I^9 - x_0^9 = \int_{S_I} B_2^B. \quad (216)$$

678 座標を与える (173) と 9 座標を与える (216) を用いれば、Taub-NUT 側での情報からその T-dual である NS5-brane の位置を完全に決定することができる。

NS5-brane の座標をしばしば複素に組むのが便利である。center の  $w = x^6 + ix^7$  座標は (138) の積分として与えることができる。

$$w_I - w_0 = \int_{S_I} \omega_{(2,0)} \quad (217)$$

積分を行う際には  $x^9$  方向の積分が  $x$  平面上で原点を反時計回りに回る留数積分になることを用いた。残る二つの NS5-brane の座標は次のように与えられる。

$$(x_I^8 - x_0^8) + i(x_I^9 - x_0^9) = \int_{S_i} J. \quad (218)$$

ただし、 $J$  はケーラー形式  $k_8$  と  $B$  場の線形結合である。

$$J = k_8 + iB \quad (219)$$

これはしばしば複素化されたケーラー構造と呼ばれる。

### 3.5 NS5-brane 上の場

NS5-brane 上には 6-次元の  $\mathcal{N} = 2$  超対称性があり、その超対称多重項が住んでいる。ここでは特に IIA 型理論の NS5-brane についてみてみよう。この場合、NS5-brane 上に実現される超対称性はカイラルであり、しばしば  $\mathcal{N} = (2, 0)$  と表記される。ブレーン上にある超対称多重項はテンソル多重項である。これはスカラー場を 5 つと 2-形式場を一つ含む。この 2 形式場はその場の強さが反自己双対である。5 つのスカラー場のうちの 4 つは、ブレーンの振動モードであり、その期待値がブレーンの 6789 空間での位置を与える。残る一つのスカラー場を  $c$  としよう。これは D0-ブレーンの世界線端点に結合する 0-form ゲージ場とみなすこともできる。またこの場は NS5-brane に端を持つ D4-brane に磁氣的に結合している。つまり、NS5-brane 上に端を持つ D4-brane の端を NS5-brane 上で取り囲むような  $S^1$  で積分したときに、スカラー場  $c$  の場の強さ  $dc$  は、D4-brane の枚数を与える。

$$N_{D4} = \oint dc. \quad (220)$$

この式は、スカラー場  $c$  が一価ではなく、周期 1 の  $S^1$  上に値をとる場であることを意味している。M-理論の観点からは NS5-brane は  $x^{11}$  方向に巻きついていない M5-brane とみなされるが、 $c$  は M5-brane の  $x^{11}$  座標を与える場であると解釈することもできる。



NS5-brane 上の 2 形式場を  $c_2$  とする。場の強さ  $h_3 = dc_2$  は上でも述べたように反自己双対であり次の式を満足する。

$$*_6 h_3 = -h_3. \quad (221)$$

NS5-brane 上の振動モード  $x^6, \dots, x^9$  およびゲージ場  $c$  と  $c_2$  が T-dual を取ったときに Kaluza-Klein monopole 側でどのように表されるかを考えてみよう。4 つの振動モードのうち、コンパクト化されていない 678 方向の座標  $x^m$  は、T-dual 変換によって Taub-NUT 多様体の center の座標になる。従って、678 方向への NS5-brane の微小振動は center の位置の微小変化、すなわち計量の変形モードに対応している。このことは、(151) にあるように、3 つのケーラー形式の変形として次のように表される。

$$\delta k^A = \sum_I \delta x_I^A(x^\mu) \eta_I \quad (222)$$

ただしここでは center の個数が一般の場合に拡張した。 $\eta_I$  は (154) を満足する harmonic 2-form である。

この対応関係を確認するために、IIB 型超重力理論の作用に (222) を代入して集団座標の有効作用を求めることにより、NS5-brane の振動モードの作用と同じものが得られることを確認しておこう。IIB 型超重力理論の作用のディラトンと重力部分は次のように与えられる。

$$S = \int d^{10}x \frac{2\pi\sqrt{-g^{(10)}}}{e^{2\phi^B}} (R^{(10)} + 4(\partial_M \phi)^2) \quad (223)$$

計量が  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu + g_{mn}(x^\mu, x^m)dx^m dx^n$  のように書けると仮定し、内部空間の計量が

$$g_{mn} = g_{mn}(t^A(x^\mu), x^m) \quad (224)$$

のように幾つかのパラメータ  $t^A$  を通してのみ  $x^\mu$  に依存するとしよう。作用 (223) にこの計量を代入し、スカラー場の運動項を抜き出すと次の結果を得る。

$$S = \int d^6x \frac{2\pi\sqrt{-g}}{e^{2\phi}} \left( 4V(\partial\phi)^2 - 4(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu V) - \frac{1}{2}G_{AB}(\partial_\mu t^A)(\partial^\mu t^B) \right) \quad (225)$$

ただしここでは  $x^m$  方向を大きな 4 次元空間でコンパクト化したと仮定し、 $V$  は次の式によって定義される内部空間の体積である。

$$V = \int d^4y \sqrt{g^{(4)}} \quad (226)$$

実際には  $x^m$  方向がコンパクト化された状況を考えたいわけではないので、 $V = \infty$  と思っておいてよい。スカラー場  $t^A$  の運動項の係数行列は次のように内部空間上の積分として与えられる。

$$G_{AB} = \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left( \frac{1}{2}g^{mp}g^{nq}(g_{mn,A})(g_{pq,B}) - \frac{1}{2}(g^{mn}g_{mn,A})(g^{pq}g_{pq,B}) \right) \quad (227)$$

ここでは計算を簡単にするために、次のケーラー構造の変形のみ注目しよう。

$$k^8(t, y) = k^8 + t^I \eta_I \quad (228)$$

あるいは、計量の変化としては  $\delta g_{i\bar{j}} = it^I \eta_{i\bar{j}}^I$  である。 $\delta g_{mn}$  のトレース部分については  $g^{mn} \delta g_{mn} = k^{mn} \eta_{mn}^I$  であるが、 $k_{mn}$  が反自己双対テンソルであるのに対して  $\eta_{mn}^I$  は自己双対テンソルであるからこの積は 0 である。すなわち  $\delta g_{mn}$  はトレースレスであり、(227) の第 2 項は 0 になる。また、同じことから体積  $V$  は不変である。従って (225) にあるディラトンと体積の混合項は 0 であり、 $t^I$  とディラトンは運動項が分離する。零モードの規格化条件より  $t^A$  運動項の係数が次のように決まる。

$$G_{IJ} = \delta_{IJ} \quad (229)$$

従って  $t^I$  の作用は次のように与えられる。

$$S = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^B)^2} \int d^6x (\partial_\mu t^I)(\partial^\mu t^I) = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^6x (\partial_\mu t^I)(\partial^\mu t^I) L_A^2 \quad (230)$$

これはちょうど張力が  $2\pi/(g_{\text{str}}^A)^2$  である 5-brane、すなわち IIA 型 NS5-brane の一つ方向への振動を表している。末尾の  $L_A^2$  の因子は振動方向の計量  $g_{88}$  に他ならない。

次に NS5-brane の 9 方向への振動を考えてみよう。NS5-brane を 9 方向へ移動しても、その T-dual である Taub-NUT manifold の形は変形せず、 $x^9$  座標の情報は  $B$ -場の情報へ移されるから、 $x^9$  の微小振動は Taub-NUT manifold の center の周りに局在化した  $B$  場のモードに移されると期待される。 $B$  場が次のように与えられるとしてみよう。

$$B_2^B = \sum_I f^I(x^\mu) \eta_I \quad (231)$$

$f^I$  は  $x^\mu$  ( $\mu = 012345$ ) の関数であり、ゼロモードに対応する集団座標を表す。(150) を用いれば  $f_I = \int_{S_I} B_2$  が得られるが、(216) と比較すれば  $f$  が NS5-brane の  $x^9$  座標を与えていることがわかる。 $f$  に対する有効作用を得るために、超重力理論中の  $B^B$  の運動項に (231) を代入すると、

$$\begin{aligned} S_{\text{IIB}} &= -\frac{1}{12} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} H_3^{B^2} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^J \eta_{I\mu\nu} \eta_J^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{e^{2\phi^B}} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^I \end{aligned} \quad (232)$$

ここで、 $e^{2\phi^B} = e^{2\phi^A} / L_A^2$  を用いると、

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{L_A^2}{2} \frac{2\pi}{e^{2\phi^A}} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} (\partial_\mu f^I)^2 \quad (233)$$

となり、これは張力  $2\pi e^{-2\phi}$  の IIA 型 NS5-ブレーンの振動を記述する作用に他ならない。係数の  $L_A^2$  は  $x^9$  方向の計量  $g_{99}^A = L_A^2$  を表している。

次に、self-dual 4-form 場について、次のように表される zero-mode を考えよう。

$$C_4 = \sum_I c_2^I(x^\mu) \wedge \eta_I \quad (234)$$

集団座標  $c_2^I$  は  $I$  番目の NS5-brane 上の 2-形式場と解釈することができる。実際、 $C_4$  に課される反自己双対条件  $*_{10}G_5 = -G_5$  と (154) にある  $\eta_I$  の自己双対性より  $h_3$  に対する反自己双対性 (221) が得られる。先ほどと同様に IIB 型超重力理論の作用に代入して整理すると、次の有効作用を得る。(正確には自己双対性のためにこのような単純な作用で書くことはできないが、その点はここでは目をつぶることにする。)

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{2\pi}{2 \cdot 5!} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} G_5^2 = -\frac{2\pi}{12} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} (h_3^I)^2 \quad (235)$$

これは NS5-brane 上の反対称テンソル場  $c_2$  の有効作用を与えている。作用の係数を見てみると、結合定数が定数になっているが、これは自己双対性とディラックの量子化条件によって、この値しか許されないからである。

最後に、RR 2-form 場の zero mode を考えてみよう。 $C_2$  を次のようにおく。

$$C_2 = \sum_I c^I(x^\mu) \wedge \eta_I \quad (236)$$

これが実際に NS5-brane 上の 0-form ゲージ場  $c$  に対応していることを見るために、上と同様の方法で有効作用を求めてみよう。

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{2\pi}{12} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} (G_3^B)^2 = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} \partial_\mu f^I \partial^\mu f^I (g_{\text{str}}^A)^2. \quad (237)$$

最後の式では分子と分母に  $(g_{\text{str}}^A)^2$  を導入した。これらのうち分母の因子を NS5-brane、あるいは M5-brane の張力  $T_{\text{NS5}} = T_{\text{M5}} = 2\pi(g_{\text{str}}^A)^2$  と解釈し、分子の因子を計量  $g_{11,11} = (g_{\text{str}}^A)^2$  と解釈すれば、この有効作用は確かに M5-brane の  $x^{11}$  方向への振動モードのものと一致する。

また、(236) はサイクル  $S_I$  に巻きついた D1-brane と次のように結合する。

$$S_{\text{D1}} = 2\pi \int_{S_I} C_2 = 2\pi c_2^I |_{\partial C_I} \quad (238)$$

ただし  $\partial C_I$  は  $C_I$  は  $C_I$  の端点のうち、NS5-brane 上にある方（基準点ではないほう）を表している。これは IIA 理論側で D0-brane の世界線の端と NS5-brane 上のスカラー場  $c^I$  の結合を与えている。

こうして、(173)、(216) に加えて NS5-brane 上のスカラー場  $c$ 、言い換えると M5-brane の  $x^{11}$  方向を与える公式が次のように得られた。

$$x_I^{11} - x_0^{11} = c_I - c_0 = \int_{S_I} C_2. \quad (239)$$

ただし、一般には  $C_2$  が規格化可能モード (236) 以外の成分を含むことなどを考慮して定数項  $c_0$  も含めておいた。

こうして、それぞれの center に局在化した超重力理論のモードが NS5-brane 上の場を与えることが確かめられた。

もし NS5-brane が複数あり、それらが重なった場合にはさらに余分な自由度が現れると考えられている。例えば IIB 型 NS5-brane が  $N$  枚重なった場合には、それぞれのブレーン上の  $U(1)$  ゲージ多重項以外にも零質量モードが現れ、対称性が  $U(N)$  に拡大する。これは T-dual をとると Taub-NUT の  $N$  個の center が重なる場合に対応する。このとき §2.5 でも見たように 2-サイクルが潰れる。これに伴い 2-cycle に巻きついた D2-brane が零質量になり、これらが  $U(1)^N$  対称性を  $U(N)$  の対称性に拡大するのだと解釈できる。

これに対し、Taub-NUT 空間上の IIA 理論を考えると、2-サイクルに巻きついた D3-brane から string 状のオブジェクトが現れるが、これはサイクルがつぶれる極限では張力が 0 になる。この弦を含む理論はしばしば little string theory などと呼ばれる。

## 4 Geometric engineering

ここでは §3 で与えた NS5-brane と Taub-NUT の関係を用いて、 $\mathcal{N} = 1$  超対称ゲージ理論を実現する NS5-D4 系の T-dual 変換について議論する。ブレーンを用いたゲージ理論の解析についてのレビューとしては [10] がある。また、T-dual 変換による Geometric engineering と NS5-brane 系の関係については、多数の参考文献とともに [11] において詳しく述べられている。 $\mathcal{N} = 1$  超対称性を実現するには、並行ではない NS5-brane を扱う必要があるが、前節で得られた公式は平坦で互いに平行な NS5-brane に対するものである。従って、ここで与える結果の幾つかは NS5-brane が平行な極限で成り立つ近似的なものであることを前もって注意しておこう。

表 1:  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論を実現するブレーン系

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5 <sub>1,2</sub>	○	○	○	○	○	○				
D4×N	○	○	○	○						○

#### 4.1 NS5-D4 system

IIA 型理論において平行な二枚の NS5-brane を NS5<sub>1</sub> および NS5<sub>2</sub> とし、さらにそれらに端を持つ  $N$  枚の D4-brane を含む系を考えよう。それぞれのブレーンの向きは表 1 のように取る。この系は IIA 型理論の超対称性を  $1/4$  に破る。従って 4 次元でいう  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性を持つ。このような、あるブレーンとそこに端を持つ別のブレーンを用いたゲージ理論の構成は Hanany と Witten[12] によって 3 次元ゲージ理論の解析に初めて用いられ、Hanany-Witten 型のブレーン系と呼ばれる。ここで用いられる D4-brane と NS5-brane の系は Witten[13] によって 4 次元  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論を解析するために提案されたものである。

もし NS5-brane がなければ、D4-brane 上に存在するのは (4 次元でいうところの)  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項であり、次の場が存在する。

$$A_\mu(x^\mu, x^9), \quad A_9(x^\mu, x^9), \quad \phi_i(x^\mu, x^9), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8. \quad (240)$$

ブレーンの枚数が  $N$  のとき、全ての場は  $U(N)$  の随伴表現に属する。NS5-brane の存在は超対称性を  $\mathcal{N} = 2$  に破り、その結果、(240) は  $\mathcal{N} = 2$  のベクトル多重項とハイパー多重項に分かれる。

$$\text{vector mult.} : A_\mu(x^\mu, x^9), \quad \phi_4(x^\mu, x^9), \quad \phi_5(x^\mu, x^9), \quad (241)$$

$$\text{hyper mult.} : \phi_6(x^\mu, x^9), \quad \phi_7(x^\mu, x^9), \quad \phi_8(x^\mu, x^9), \quad A_9(x^\mu, x^9). \quad (242)$$

さらに、D4-brane が NS5-brane に端を持つことにより、低エネルギーにおいてハイパー多重項は励起することができなくなり、ベクトル多重項のうち  $x^9$  依存性を持たない部分だけが残る。従って、D4-brane 上で実現されるゲージ理論は  $\mathcal{N} = 2$  pure  $U(N)$  ゲージ理論である。この  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項は  $\mathcal{N} = 1$  超場形式を用いて  $A_\mu$  を含むベクトル超場  $V$  と  $\phi = \phi_4 + i\phi_5$  を含むカイラル超場  $\Phi$  により記述することができる。

カイラル多重項の運動項は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g_{\text{YM}}^2} \text{tr}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + FF^\dagger) \quad (243)$$

と与えられる。 $F$  は補助場である。フェルミオンは無視した。D-term ポテンシャルは

$$V \propto -\text{tr}[\phi, \phi^*]^2. \quad (244)$$

となり、最低エネルギー状態は  $[\phi, \phi^*] = 0$  によって与えられる。このとき適当なゲージ変換によって  $\phi$  を対角化することができる。 $N$  枚の D4-brane それぞれ  $u$  座標は  $N \times N$  スカラー場  $\phi$  の対角成分と解釈される。すなわち、

$$\phi = T_{\text{str}} \text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_N). \quad (245)$$

さらに、あとで考える NS5-brane の変形を考えると、超対称性は  $\mathcal{N} = 1$  に落ちる。これはカイラル超場  $\phi$  に対する超ポテンシャル  $W = \text{tr} W(\phi)$  を導入することに対応する。この結果、ラグランジアン中に次の項が現れる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr}(FW'(\phi) + F^\dagger W'(\phi)^\dagger) \quad (246)$$

補助場  $F$  を消去すれば、 $\phi$  に対して次のポテンシャルを与える。

$$V = \frac{g_{\text{YM}}^2}{2} \text{tr}(W'(\phi)W'(\phi)^\dagger). \quad (247)$$

従って、 $\phi$  の固有値は  $W' = 0$  の点に集まって安定な配位をなす。もしそのような点が複数あれば、 $N$  個の固有値はそれらの 0 点に対して任意に配分することができ、それぞれが独立な真空を与える。

$W'(u) = 0$  を満足するような  $u$  を  $u_k$  と書くことにしよう。そしてそれぞれの 0 点に集まった固有値 (D4-brane) の個数を  $N_k$  とする。その場合、ゲージ群  $U(N)$  は次のように破れる。

$$U(N) \rightarrow \prod_k U(N_k). \quad (248)$$

さらに、 $U(1)$  部分は低エネルギー極限では decouple する。すなわち、 $U(1)$  チャージを持つものは必ず質量を持つ。

場の理論を得るためにどのような極限操作を行えばよいかを見るために、ブレーンの低エネルギー有効理論を用いる。二枚の NS5-brane の  $x^9$  座標を  $x_{1,2}^9$  とおき、NS5-brane 上のスカラーゲージ場 (M5-brane の  $x^{11}$  座標) に対しても  $c_{1,2}$  とおく。また、これらの差を

$$\Delta x^9 = x_2^9 - x_1^9, \quad \Delta c = c_2 - c_1 = \frac{x_2^{11} - x_1^{11}}{L_{11}} \quad (249)$$

のように定義しておく。(ここでは、計量が 1 になるような座標を用いているので、 $x^{11}$  座標の周期は  $L_{11}$  である。これは先ほどまでと異なることに注意。) これら以外のスカラー場に対しては

$$x_{1,2}^6 = x_{1,2}^7 = x_{1,2}^8 = 0 \quad (250)$$

とおいておく。

ゲージ理論のラグランジアンは、まず D4-brane が一枚の場合の D4-brane 有効作用から  $U(1)$  ゲージ理論の作用を求め、その後で  $U(N)$  ゲージ理論に一般化することで得ることができる。D4-brane の Born-Infeld 作用を用いれば、4 次元 effective action は次のように与えられる。

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{\Delta x^9}{(2\pi)^4 l_s^5 g_{\text{str}}} + \frac{\Delta x^9}{(2\pi)^2 l_s g_{\text{str}}} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* \right) + \dots \right] \quad (251)$$

また、D4-brane の境界上での NS5-brane 上のゲージ場  $c$  との結合から、次のトポロジカル項が現れる。

$$S = \frac{2\pi}{2} \int_{\partial D4} cF \wedge F \quad (252)$$

(251) の第 1 項はブレーンの張力の寄与であるが、定数項なので無視することができる。第 2 項はゲージ場及び複素スカラー場の寄与である。ゲージ場  $A$  はフラックス  $\int F$  が整数になるように規格化されている。また、複素スカラー場  $\phi$  は D4-ブレーンの 45 方向への運動モードを表し、D4-brane の座標と次の関係にある。

$$\phi = \frac{1}{2\pi l_s^2} (x^4 + ix^5). \quad (253)$$

ゲージ場の運動項の係数や (252) の係数を見れば、ゲージ結合定数やインスタントン角が次のように与えられる。

$$\frac{2\pi}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{\Delta x^9}{2\pi l_s g_{\text{str}}}, \quad \frac{\theta}{2\pi} = \Delta c. \quad (254)$$

(253) と (254) より、次の複素座標を定義するのが便利である。

$$u = x^4 + ix^5, \quad w = x^6 + ix^7, \quad s = \frac{x^{11} + ix^9}{L_{11}}. \quad (255)$$

(複素座標  $w$  はこれまでのところ用いられていないが、超ポテンシャルを導入して  $\mathcal{N} = 1$  理論の議論をする際にはこの複素座標を定義しておくのがよい。) ここではコンパクト化される  $x^9$  座標は計量が 1 になるように定義されている。複素化された結合定数は次のように与えられる。

$$\tau_{\text{gauge}} = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{2\pi i}{g_{\text{YM}}^2} = \frac{\Delta x^{11} + i\Delta x^9}{L_{11}} = \Delta s \equiv s_2 - s_1. \quad (256)$$

不要なモードを分離してゲージ理論を得るためには、この値を固定しながら  $l_s \rightarrow 0$  の極限をとる必要がある。

さて、この理論にポテンシャルを導入して超対称性が  $\mathcal{N} = 1$  である理論を構成することを考えよう。そのためには、NS5-brane を、 $w = x^6 + ix^7$  方向に変形し、NS5-brane の位置が  $u$  座標に依存するようになればよい。すなわち、NS5<sub>1,2</sub> ブレーンを  $w = w_{1,2}(u)$  のように変形する。 $\Delta w = w_2 - w_1$  とする。

$wu$  空間、すなわち 4567 空間上の NS5-brane の形状は

$$(w - w_1(u))(w - w_2(u)) = 0 \quad (257)$$

という一つの式によって表すことができ、これは一枚の singular なリーマン面とみなすことができる。こ

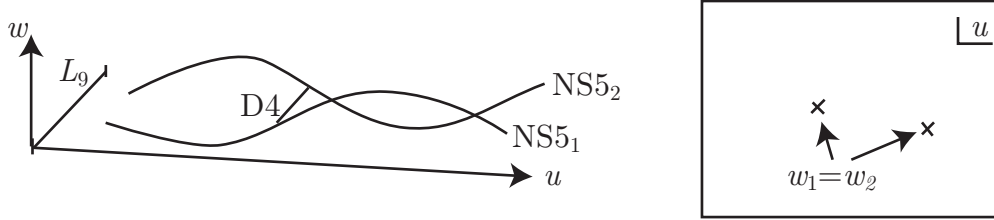


図 7: 二枚の NS5-brane の間に張った D4-brane が安定に存在できる点は  $u$  平面上では関数  $w_2(u) - w_1(u)$  の 0 点として与えられる。

の変形により、二枚の NS5-brane の間に張った D4-brane の長さは  $\Delta x^9$  から

$$L = \sqrt{\Delta x_9^2 + |\Delta w(u)|^2} = \Delta x_9 + \frac{|\Delta w|^2}{2\Delta x_9} + \dots \quad (258)$$

のように変化する。この変化によって (251) の第 1 項の寄与が変化する。その変化分は次のポテンシャル項を与える。

$$S_{\text{pot}} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{(2\pi)^4 l_s^5 g_{\text{str}}} \frac{|\Delta w|^2}{2\Delta x_9} \right] \quad (259)$$

これを (247) と比較すれば超ポテンシャル  $W'(\phi)$  と関数  $w_{1,2}(u)$  の関係は次のように与えられる。

$$W'(\phi) = \frac{\Delta w(u)}{(2\pi l_s)^3 g_{\text{str}}} \quad (260)$$

ポテンシャルを持つゲージ理論を得るには、 $l_s \rightarrow 0$  の極限をとる際にこの  $W'$  を固定しておく必要がある。すなわち、分離極限では  $w(u)$  は  $\Delta x_9$  に比べて無限に小さくなる。したがって、 $\Delta x_9$  から  $L$  への変化はゲージ結合定数を与える式 (254) には影響を与えない。

(260) の右辺に  $\Delta x^9$  が含まれないことは重要である。 $\Delta x^9$  は (254) にあるようにゲージ結合定数に関係していて、繰り込み点の取り方に依存するが、(260) の関係式はその任意性の影響を受けない。

こうして得られた有効理論の作用は次のようになる。

$$S = \int d^4x \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{g_{\text{YM}}^4}{2} |W'(\phi)|^2 \right] \quad (261)$$

これはまさに、 $\mathcal{N} = 2$  の  $U(1)$  ゲージ理論に超ポテンシャル  $W(\phi)$  を導入して超対称性を  $\mathcal{N} = 1$  に破った理論の作用 ( のボゾン部分 ) にほかならない。

場  $\Phi$  を含まない  $\mathcal{N} = 1$  super Yang-Mills 理論を考えなければ、場  $\phi$  に無限大の質量を与えるように関数  $w_i(u)$  を選べばよい。たとえば、 $w_1(u) = 0$ 、 $w_2(u) = \mu u$  として  $\mu \rightarrow \infty$  の極限を取れば、 $\mathcal{N} = 1$  super Yang-Mills を得ることができる。このとき、NS5<sub>1</sub> は  $u$  方向に、NS5<sub>2</sub> は  $w$  方向に広がった面となる。このような、二つの直交する NS5-brane を含むブレーン系は始めに [14] において導入され、 $\mathcal{N} = 1$

表 2:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5 <sub>1</sub>	○	○	○	○	○	○				
NS5 <sub>2</sub>	○	○	○	○			○	○		
D4 $\times$ N	○	○	○	○						○

ゲージ理論の Seiberg duality を説明するのに用いられた。 ([14] で扱われたゲージ理論はここで考えているものよりも少し複雑なものであり、より多くのブレーンを含んでいる。) また同じブレーン系は [15] において  $\mathcal{N} = 1$  Yang-Mills 理論の低エネルギーの振る舞いを解析するのに用いられた。

ここまでは、D4-ブレーンの張力による NS5-brane の変形を何も考えてこなかった。これはゲージ理論側では古典的な解析を行うことに対応している。 $\mathcal{N} = 2$  の場合に [13] で、 $\mathcal{N} = 1$  の場合に [15] で示されたように、ゲージ理論の量子論的な補正を導入するためには、D4-brane の張力による NS5-brane の変形を考慮すればよい。

まず、D4-brane を導入する前の NS5-brane の形状を次のようにしておこう。

$$w_1(u) = -w_0(u), \quad w_2(u) = w_0(u). \quad (262)$$

超ポテンシャルは次のように与えられる。

$$W' = \frac{2w_0}{(2\pi l_s)^3 g_{\text{str}}^4} \quad (263)$$

$uw$  空間、すなわち 4567 空間上でこれら二枚の NS5-brane は次のように一つの式で表すこともできる。

$$w^2 = w_0(u)^2 \quad (264)$$

超ポテンシャルが  $\phi$  の  $n+1$  次の多項式であると仮定しよう。このとき  $w_0(u)$  は  $u$  の  $n$  次の多項式である。

NS5-brane の  $x^9$  座標は、(264) で定義される曲面の上の関数として  $x^9 = x^9(u)$  のように与えることができる。ただし、一つの  $u$  に対して二枚の NS5-brane があるから、この関数は二価である。

さて、二枚の NS5-brane をつなぐ D4-brane を導入することを考えよう。この D4-brane はその張力によって NS5-brane の形状を変化させる。それにより、(264) は次のように変化する。

$$w^2 = w_0(u)^2 + f_{n-1}(u). \quad (265)$$

このとき D4-brane の張力による変形が NS5-brane の遠方の形状を変化させず、 $w = \pm w_0 + \mathcal{O}(u^{-1})$  となると仮定しよう。すると  $f_{n-1}$  は (すでにその添え字が示すように) 高々  $n-1$  次の多項式でなければならない。実際、 $u$  の大きいところで (265) を展開してみれば

$$w = \pm \sqrt{w_0^2 + f_{n-1}} = \pm \left( w_0 + \frac{f_{n-1}}{2w_0} + \dots \right) \quad (266)$$

となるから、 $u$  の大きいところで  $w$  が  $\pm w_0$  に漸近するためには  $f$  の次数は  $w_0$  の次数より小さい必要がある。  $f_{n-1}$  の展開係数を次のように  $a_k$  とおく。

$$f_{n-1}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k. \quad (267)$$

ここでの目標は、この多項式  $f_{n-1}$  を決定する方法を与えることである。この多項式は、もともといくつかの点で接した二枚の面を表していた (264) を変形し、ブランチカットでつながった一枚のリーマン面を与える役割をする。そして、もともと二枚の面の交差する点に存在していた D4-ブレーンはブランチカットに置き換わる。

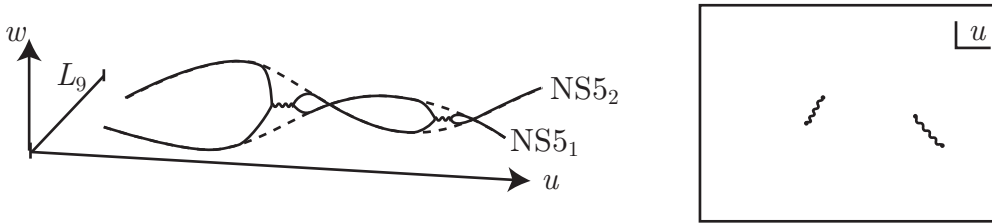


図 8: D4-brane の張力を考慮すると、 $u$  平面上の 0 点がブランチカットに置き換えられる。

D4-brane の張力は、NS5-brane の  $wu$  空間上の形状だけではなく、 $x^9$  方向の形状も変化させる。これは関数  $x^9(u)$  によって与えられる。関数  $x^9(u)$  はリーマン面上で一価でなければならないので、次の量はサイクル  $\beta_i$  によらず同じになるはずである。

$$\int_{\beta_i} dx^9 = \Delta x^9 \quad (268)$$

ただし  $B_i$  は  $i$  番目の cut を通って表と裏の遠方の点をつなぐ積分経路である。この値は二枚の NS5-brane の  $x^9$  方向の距離を与える。ただし、非コンパクトサイクル  $\beta_i$  を無限遠にとると発散してしまうので適当に正則化を行う必要がある。

さらに、D4-brane の影響は、NS5-brane 上のゲージ場にも及ぶ。すなわち、D4-ブレーンの端点は 0-form ゲージ場  $c$  に対して磁氣的に結合しているため、次の条件を満足するように運動方程式の解  $c(u)$  を決定する必要がある。

$$\oint_{\alpha_i} dc = N_i. \quad (269)$$

ただし  $\alpha_i$  は  $i$  番目の cut を一周する積分経路である。ただし、 $\alpha_i$  は片方の NS5-brane の上で D4-ブレーンの端点、あるいは変形後は対応するブランチカットの周りをまわるサイクルであり、 $N_i$  はその中に含まれる (含まれていた) D4-brane の枚数である。

(255) で定義された複素座標  $s$  を用いれば、これらの条件を次のように表すことができる。

$$\oint_{\alpha_i} ds = N_i, \quad \int_{\beta_i} ds = \tau + n_i. \quad (270)$$

(270) の第 2 式は (268) に対応しており、 $\beta_i$  の端点が共通であるから同じ値  $\tau$  を与えるべきことから得られるが、共通の値といっても  $s$  の実部には  $x^{11}$  の周期性より整数分の不定性があり、それを表すのが  $n_i$  である。 $n_i$  は任意の整数でよいが、 $\beta_i$  サイクルの定義を変更して  $\alpha_i$  サイクルを混ぜることで  $n_i$  を  $N_i$  だけとすることができる。したがって本質的に異なるのは  $n_i = 0, \dots, N_i - 1$  の  $N_i$  個だけである。これらは、そのカットの位置に存在した  $N_i$  枚の D4-brane 上で実現していた unbroken ゲージ群  $SU(N_i)$  の  $N_i$  個の真空に対応している。こうして、ブレーンの形状を求める問題は、(270) を満足するような differential  $ds$  がリーマン面 (265) 上に存在するように、うまく  $f_{n-1}$  を調節せよという問題に帰着した。



(270) の第 1 式の和を取ると

$$\oint_{\infty} ds = -N \quad (271)$$

が得られるが、これは  $ds$  が無限遠に極を持つことを表している。このことは、 $\beta$  サイクルの端点を無限遠にとると (270) の第 2 式の積分が発散してしまうことを意味する。無限遠方の振る舞いをよくするためには、たとえば

$$w_{\text{mod}} = w_0 + \frac{u^{n+1}}{M^{n+1}} \quad (272)$$

のような、 $u$  が非常に大きいところでのみ効くような正則化項を導入しておけばよい。新たな項の導入によって、無限遠点の近くに新たなブランチカットが生まれ、ジーナスが  $n$  のリーマン面となる。(271) をそのブランチカット周りの積分と考えることにより  $ds$  を極を持たない正則 1 形式に置き換えることができる。また、サイクル  $\beta_i$  はもともとあった  $i$  番目のブランチカットと新たに現れた無限遠点を通り抜けるサイクルとみなすことができ、その上の積分は有限になる。(図 9) 以下ではこのような正則化がなされ

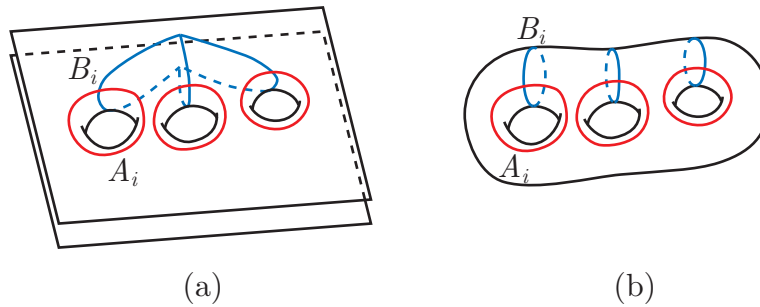


図 9: (a) サイクル  $B_i$  の上限  $\Lambda$  を設定することによる cutoff。 (b) 新たな cut を遠方に導入することによる cutoff。

ていると仮定しよう。

さて、条件 (270) を満足する  $ds$  が存在するという条件について考えてみよう。genus  $n$  のリーマン面上の holomorphic 1-form は  $n$  個存在している。

$$\eta_k = \frac{u^k du}{w}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (273)$$

どのような  $f_{n-1}$  であってもこれらの適当な線形結合を取ることによって、条件 (270) の片方、例えば  $\alpha_i$  サイクル積分に対する条件を満足することができる。しかしこの時点で  $ds$  は完全に決まってしまうから、残りの  $n$  個の条件は全て多項式  $f_{n-1}$  に対する条件を与える。これらの条件を全て用いれば、 $f_{n-1}$  の係数が一意的に決定される。

よく知られている事実として、正則 1 形式  $h$  の  $\alpha_i$  および  $\beta_i$  サイクル上の積分として定義された二つの量

$$A_i = \oint_{\alpha_i} h, \quad B_i = \oint_{\beta_i} h \quad (274)$$

は、正則 1 形式の選び方に依存しない周期行列と呼ばれる対称行列  $\tau_{ij}$  を用いて

$$B_i = \tau_{ij} A_j \quad (275)$$

が成り立つ。

$\tau_{ij}$  は多項式  $f_{n-1}$  を与えた時点で一意的に決まる、従って、条件 (270) を満足する  $ds$  が存在するためには、積分 (270) が関係式 (275) を満足している必要がある。すなわち、 $f_{n-1}$  を決めるための条件は次のように書くことができる。

$$\tau + n_i = \tau_{ij}(a_k)N_j. \quad (276)$$

これが  $f_{n-1}$  を決めるための式である。  $\tau_{ij}$  が多項式  $f_{n-1}$  の係数  $a_k$  に依存するということがあらわに書いた。

## 4.2 Glueball superpotential

NS5-brane の形状を決定するための条件式 (276) が成り立っていさえすれば、その curve 上で (270) を満足する 1-form  $ds$  を構成することができる。(276) には多項式  $f_{n-1}$  が周期行列  $\tau_{ij}$  を通して現れている。(276) を解きやすくするために、この周期行列を便利な形で書いておこう。そのために、次の積分を考える。

$$S_i = \oint_{\alpha_i} wdu, \quad \Pi_i = \int_{\beta_i} wdu. \quad (277)$$

これらの積分の意味を明らかにするために古典的、すなわち  $f_{n-1} = 0$  の場合を考えてみよう。このとき  $w = \pm w_0$  であり、

$$dW = W' d\phi = \frac{2\pi}{(2\pi l_s^5) g_{\text{str}}^A} \Delta w du \quad (278)$$

であることから、

$$S_i^{\text{cl}} = 0, \quad \Pi_i^{\text{cl}} = \frac{g_{\text{str}}^A}{2\pi} [W(u_\infty) - W(u_i)]. \quad (279)$$

が得られる。  $S_i$  は  $f_{n-1} \neq 0$  の時には一般には 0 でない値をとるので、これはリーマン面上で  $i$  番目のカットの大きさを表すパラメータと解釈することができる。一方  $\Pi_i$  はカット  $i$  における超ポテンシャルと解釈できる。

(277) で積分されている 1-form  $wdu$  を多項式  $f_{n-1}$  の係数  $a_k$  で微分してみよう。(265) を係数  $f_{n-1}$  の係数  $a_k$  で微分して得られる式  $\partial_{a_k} w = u^k / (2w)$  を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial a_k} wdu = \frac{u^k du}{2w}. \quad (280)$$

が得られる。これはリーマン面上で holomorphic な 1-form であるから、  $\alpha_i$  および  $\beta_i$  サイクル上での積分を考えれば次の式が成り立つはずである。

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial a_k} = \tau_{ij} \frac{\partial S_i}{\partial a_k} \quad (281)$$

あるいは、  $a_k$  が  $S_i$  や  $\Pi_i$  と同様に  $n$  個の成分を持つことから、この式は次のように書くこともできる。

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial S_j} \quad (282)$$

これを (276) に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial S_i} \sum_j [\Pi_j N_j - (\tau + n_j) S_j] = 0. \quad (283)$$

これは、次の超ポテンシャルから得られる  $F$  項条件の式とみなすことができる。

$$W_{\text{eff}}(S_i) = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \sum_i [(\tau + n_i) S_i - \Pi_i N_i]. \quad (284)$$

(283) を F-term 条件として与えるというだけであれば全体の係数は任意でよい。この係数は、古典的な値 (279) を代入したときに tree level の superpotential  $W$  に帰着するという条件から決める。実際 (284) に (279) を代入すると次のように古典的な超ポテンシャルが得られる。

$$W_{\text{eff}}(S_i)|_{\text{classical}} = \sum_i W(u_i) N_i = \text{tr } W(\Phi). \quad (285)$$

さらに、(284) の第 1 項はゲージ場の運動項と解釈することができる。すなわち、 $S_i$  は破れずに残ったゲージ群  $SU(N_i)$  の glueball super field である。次元まであわせるなら、次の関係式が成り立つ。

$$S_i \equiv \text{tr}(W_i W_i) = T_{D4} S_i \quad (286)$$

$S_i$  をこのように定義したとき、超ポテンシャルを  $W \rightarrow W + S_i$  のようにずらすことはインスタントン角を  $2\pi$  ずらすことに対応し、物理的な意味を持たない。従って (284) の  $n_i$  依存項は無視することができる。

$$W_{\text{eff}}(S_i) = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \sum_i [\tau S_i - \Pi_i N_i]. \quad (287)$$

(277) や (270) を代入すると、次の形に書くこともできる。[15]

$$W_{\text{eff}}(S_i) = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \int_{\Sigma} w du \wedge ds = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \int_B dw \wedge du \wedge ds \quad (288)$$

ただし  $\Sigma$  は  $u$ - $w$ - $s$  空間内での M5-brane を表す曲面であり、 $B$  はその曲面を境界とする 3 次元面である。 $\Sigma$  はホモロジー的に非自明なサイクルに巻きついているので  $\partial B = \Sigma$  となる  $B$  は存在しないが、その場合は  $\Sigma$  と同じホモロジークラスに属する基準となる面  $\Sigma_0$  を選び、 $\partial B = \Sigma - \Sigma_0$  となる  $B$  を選べばよい。 $\Sigma$  と  $\Sigma_0$  を二つの真空に対応する curve であるとみなせば  $B$  はそれらの真空をつなぐ Domain Wall とみなすことができる。正確には、 $B$  に巻きついた M5-brane が Domain Wall である。(288) はその M5-brane によるエネルギーの増加を与える式である。(より正確には (288) が与えるのは M5-brane の central charge であり、その絶対値は BPS bound を与える。) Witten は [15] においてこのような domain wall を用いた考察から (288) の超ポテンシャルを導いた。

### 4.3 曲がった NS5-ブレーンと Calabi-Yau

これまでに議論してきた NS5-brane の系を  $x^9$  方向に周期  $L_9$  でコンパクト化し、その方向に T-dual 変換を行おう。必要な公式はすでに前節で得られている。しかし、この節で用いられている座標と前節で用いられている座標は異なるので、この節での座標にあわせて公式を書き直しておこう。

以前に用いていた計量は、コンパクト化の半径が周期 1 であり、プロパーな周期の情報は計量が担うような座標を取っていた。たとえば計量 (182) と調和関数 (189) を見てみると、NS5 側、すなわち IIA 理論の計量の漸近形は

$$ds_A^2 = L_A^2 (dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2 + dx_9^2) \quad (289)$$

であった。また、Taub-NUT 側、すなわち IIB 理論の計量 (193) の漸近形は

$$ds_B^2 = L_A^2 (dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2) + L_B^2 dx_9^2, \quad L_B = \frac{1}{L_A} \quad (290)$$

と与えられた。従って、この節で用いている M5-brane の座標は以前の座標と比較して次のように定数倍異なる。

$$x_{\text{new}}^m = L_A x_{\text{old}}^m, \quad x_{\text{new}}^9 = L_A x_{\text{old}}^9. \quad (291)$$

このことを考慮して、M5-brane の位置を IIB 理論の 2-form の積分として与える公式は次のようになる。

$$x_I^m - x_0^m = L_A \int_{S_I} k_2^m, \quad x_I^9 - x_0^9 = L_A \int_{S_I} B_2, \quad x_I^{11} - x_0^{11} = L_{11} \int_{S_I} C_2. \quad (292)$$

$w$  は以前にも与えたように、Taub-NUT 上の正則 2 形式の積分として得られる。

$$w_I^{\text{new}} - w_0^{\text{new}} = \int_{D_I} \omega_{(2,0)}^{\text{new}}. \quad (293)$$

ただし、正則 2 形式も座標のリスケールに対応して以前のものと定数倍だけ異なる。

$$\omega_{(2,0)}^{\text{new}} = L_A(k_2^1 + ik_2^2) = L_A\omega_{(2,0)}^{\text{old}} = \frac{1}{2\pi i}dw_{\text{new}} \wedge \frac{dx}{x}. \quad (294)$$

このリスケールのために、ラグランジアン部分多様体の体積と  $\omega_{(2,0)}$  の積分の間に因子  $L_A$  が現れる。もう一つの複素座標  $s$  については、IIB 理論の 2-形式場の積分として得られる。

$$s_I - s_0 = \frac{x^{11} + ix^9}{L_{11}} = \int_{S_I} C_2^B + \frac{iL_A}{L_{11}} \int_{S_I} B_2^B = \int_{S_I} (C_2^B + \tau_{\text{str}}B_2^B). \quad (295)$$

ただし、 $\tau_{\text{str}} = iL_{11}/L_A = i/g_{\text{str}}^B$  を用いた。ここでは計算を簡単にするためにアクションは 0 であると仮定している。 $x^8 + ix^9$  のように複素座標を組んだ場合には複素化されたケーラー形式の積分で与えられたが、ここでは  $x^8$  の代わりに  $x^{11}$  と組み合わせられているため、 $B$  場はケーラー形式ではなく RR 場  $C_2$  と組み合わせられている。

以上のことを踏まえたうえで、 $w$  や  $s$  が  $u$  に依存する場合の T-duality について考えてみよう。 $\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論の低エネルギーの様子を再現するためには複素座標  $u, w, s$  を (255) によって定義し、NS5-brane の  $w$ - $s$  空間での位置が

$$w = w_I(u), \quad s = s_I(u) \quad (296)$$

のように、 $I$  でラベルされる NS5-brane ごとに  $u$  の関数として与えられる場合を考える。前節までは NS5-brane の枚数は二枚であったが、ここでは枚数は任意でよい。まずは、多項式  $f_{n-1}$  を導入する前、すなわち D4-brane による変形を考える前の NS5-brane を T-dual 変換することによってどのような時空が得られるかを見てみよう。

NS5-brane の位置を用いて Taub-NUT geometry を与える式 (120) は次のように変更される。

$$xy = P(u, w) \equiv \prod_I (w - w_I(u)). \quad (297)$$

今度はもはや 4 次元 Taub-NUT 空間と 2 次元  $u$  空間の直積などではなく、非自明な複素 3 次元多様体を与える。これは  $w$ - $u$ - $x^8$  空間上の  $S^1$  ファイバー束であり、 $P(u, w) = x^8 = 0$  がファイバーの潰れる部分空間を与えている。実はこの複素 3 次元多様体はカラビヤウ多様体である。

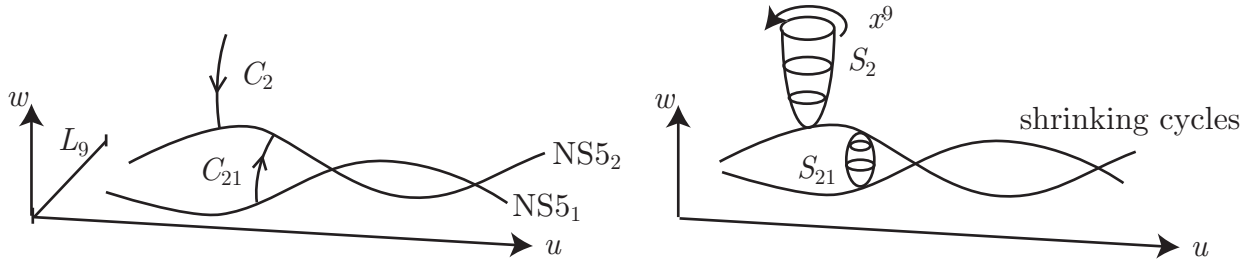


図 10: NS5-brane に端を持つ曲線は T-dual 変換によって 2-サイクルに移される。

カラビヤウ多様体の構造を決めるためには、正則 3-形式  $\omega_{(3,0)}$  およびケーラー形式  $k_{\text{CY}}$  を与えればよい。Calabi-Yau 上の正則 3-形式は次のように与えることができる。

$$\omega_{(3,0)} = du \wedge \omega_{(2,0)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{du \wedge dw \wedge dx \wedge dy}{d(xy - P(u, w))} = \frac{1}{2\pi i} du \wedge dw \wedge \frac{dx}{x}. \quad (298)$$

また、ケーラー形式は、計量を  $ds_{\text{CY}}^2 = dud u^* + ds_{\text{TN}}^2$  と与えるのと同程度の近似で

$$k_{\text{CY}} = k^8 - \frac{i}{2} du \wedge du^*. \quad (299)$$

と与えることができる。ただし  $k^8$  は  $w_I(u)$  が定数だとしたときの Taub-NUT 上のケーラー形式である。 $k^8$  が  $u$  に依存する場合、(299) は明らかに closed ではない。従って、(299) は  $u$  依存性が十分緩やかな場合にのみ適用できる近似式である。

IIA 型理論では、NS5-brane の間に張った D4-brane 上の理論としてゲージ理論が得られた。D4-brane が端を持つ二枚の NS5-brane を  $I$  と  $J$ 、それらをつなぐ曲線を  $C_{IJ}$  としよう。 $C_{IJ}$  上の D4-brane は T-dual 変換によってサイクル  $S_{IJ}$  に巻きついた D5-brane に変換される。IIB 側の立場では量子効果を考慮する前のゲージ理論は D5-brane 上の理論として与えられる。

IIA 型の NS5-D4 系の観点からは、D4-ブレーン上の有効ゲージ結合定数が (256) によって与えられた。(256) 中の  $\Delta s$  は、二枚の NS5-brane  $I$  と  $J$  のある  $u$  座標での位置の差  $\Delta s = s_I(u) - s_J(u)$  を表している。従って (295) を用いると、

$$\tau_{\text{gauge}} = s_I - s_J = \oint_{S_{IJ}} (C_2 + \tau_{\text{str}} B_2) \quad (300)$$

ただし  $S_{IJ} = S_I - S_J$  は  $S^2$  の位相を持つ面である。この量は、その  $S^2$  に巻きついた D5-brane 上の有効ゲージ理論の結合定数とみなすことができる。関係式 (300) は T-duality を用いなくても D5-brane の有効作用から導くことができる。まず、(57) から出発しよう。worldvolume が  $\mathbf{R}^4 \times S^2$  になっていると仮定し、 $\mathbf{R}^4$  方向のゲージ場と  $S^2$  方向の  $B$  場に注目すると、次のように二つの部分の積として書ける。

$$S = -\frac{2\pi}{g_{\text{str}}} \int_{\mathbf{R}^4} d^4x \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \int_{S^2} dA \sqrt{\det(G_{ij} + B_{ij})} \quad (301)$$

後ろの因子が  $S^2$  上の積分を表しており、decoupling 極限で  $S^2$  のサイズが 0 になり、計量の寄与が無視できることを用いれば次のように書き換えることができる。

$$\int_{S^2} dA \sqrt{\det(G_{ij} + B_{ij})} = \int_{S^2} B_2 = b \quad (302)$$

また、一つ目の因子は  $F$  のべきで展開することでゲージ場の運動項が得られる。その部分を抜き出し、(302) を代入すると、作用全体から次の運動項が得られる。

$$S = \int_{\mathbf{R}^4} d^4x \left( -\frac{1}{4} \frac{2\pi b}{g_{\text{str}}} F_{\mu\nu}^2 \right) \quad (303)$$

これより、(300) の  $B$  場の寄与が得られる。一方 Chern-Simons 項 (58) からは、

$$S = \frac{2\pi}{2} \int C_2 \wedge F_2 \wedge F_2 \quad (304)$$

が得られる。ここで、 $C_2$  が  $S^2$  方向に

$$c = \int_{S^2} C_2 \quad (305)$$

という値を持っていると仮定すると、4次元ゲージ理論の作用に次の項が付け加わる。

$$S = \frac{2\pi c}{2} \int F_2 \wedge F_2, \quad (306)$$

これは (300) の  $C_2$  場の寄与にほかならない。

D4-brane の張力による NS5-brane の変形を考える前には二枚の NS5-brane は  $u-w$  空間中で点で交差していた。この点では Calabi-Yau の定義方程式 (297) の右辺が重根をもつ。つまり  $w_I(u)$  のうちの二つが一致する。この二つを  $w_1(u)$  と  $w_2(u)$  とし、これらが  $u = u_0$  で一致するとしよう。 $w_0 = w_1(u_0) = w_2(u_0)$  とする。すると、 $u = u_0$  の近傍での様子を見るために新たな座標  $w' = w - w_0$  および  $u' = u - u_0$  を導入する。定義方程式 (297) は

$$xy = c(w' - au')(w' - bu') \quad (307)$$

となる。(  $a, b, c$  は数係数である。) さらに右辺の二つの因子を新たな複素変数  $U$  と  $V$  とするような座標変換を行えば

$$xy - UV = 0 \tag{308}$$

となる。式 (140) と同様な判定式を用いて、 $x = y = U = V = 0$  の点は singular であることがわかる。この特異点は conifold singularity と呼ばれる。

NS5-brane の D4-brane の張力による変形は NS5-brane の交点をブランチカットで置き換える。これは定義方程式 (297) の右辺に (265) と同様に多項式  $f_{n-1}$  を加えて変形することに対応しており、その結果 conifold 特異点近傍の様子 (308) は次のように変形される。

$$xy - UV = \epsilon \tag{309}$$

定義方程式を変化させるこのような変形は deformation と呼ばれる。(これに対し、定義方程式を変化させずにケーラー構造を変化させることは resolution と呼ばれる。)

§4.1 では変形された NS5-brane は滑らかな正則曲面になり、その形状を決めるために  $\alpha$  サイクルと  $\beta$  サイクルを定義するのが便利であった。deform された Calabi-Yau においてもこれに対応するサイクルを定義しておこう。Calabi-Yau 上では  $\alpha$ -サイクルおよび  $\beta$ -サイクルに対応する  $A$ -サイクルおよび  $B$ -サイクルは以下のように定義される 3-サイクルである。

まず、 $A$ -cycle は以下のように定義する。NS5-brane 系で定義された曲線  $C_I$  の基準点をどこか一点に固定したまま、プレーン上の端点を  $\alpha_i$ -cycle にそってぐるっと一周させると、 $C_I$  はプレーン上に端を持つディスク状の曲面を掃く。(図 11 の (a)) この曲面は、T-dual をとれば、すなわち、曲線  $C_I$  の代わりに曲面  $S_I$  を用いたと思えば 3 次元閉曲面を与え、その位相は  $S^3$  である。この 3-cycle を  $A_i$  とする。 $\alpha_i$  サイクルは  $i$  番目のカットの周りを一周する閉曲線であるが、これを  $u$  平面の上で縮めていくと、カットの両端をつなぐ半直線 (つまりカットそのものに重なった線) になる。この半直線を  $\alpha'$  としておこう。便宜上カットと  $\alpha'$  を少しずらしておくと、この半直線はリーマン面の二枚のシートのうち表にある線と裏にある線が重なったものである。従って、 $\alpha$  サイクルにそって  $S_I$  の端点を動かすということは  $\alpha'$  サイクルにそって  $S_1$  と  $S_2$  を動かすことに相当する。これはつまり  $A_i$  サイクルが  $\alpha'$  にそって  $S_{12}$  を動かしたときにできる面であることを意味している。(図 11 の (b))

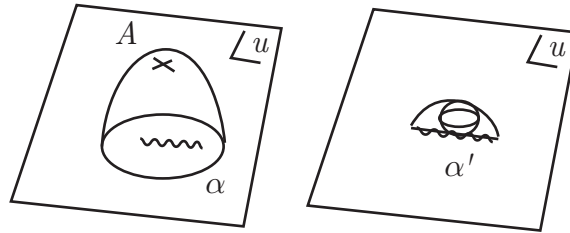


図 11: Calabi-Yau 上の  $A_i$  サイクル

次に  $B_i$  サイクルを定義するために、開曲線  $C_I$  の端点を  $\beta_i$  サイクルにそって動かしてみよう。 $\beta_i$  サイクルはカットと交差しており、リーマン面の表のシートと裏のシートを通るから、それに応じて開曲線は  $C_1$  から  $C_2$  へ名前を変える。この開曲線の掃く面は  $\beta_i$  サイクルと  $C_{12}$  を境界とする二次元面である。(図 12 の (a)) これは T-dual を取ると、すなわち  $C_I$  の代わりに  $S_I$  を用いたとすると、二次元面  $S_{12}$  を境界とする 3 次元ディスクを得る。この 3 次元曲面が  $B_i$  である。 $\beta_i$  サイクルを引き絞ると、カットのどちらかの端点と遠方の基準点をつなぐ曲線になる。この曲線を  $\beta'_i$  としよう。 $\alpha_i$  サイクルのときと同様に、 $\beta_i$  サイクルにそって  $S_I$  を動かすということは  $\beta'_i$  にそって  $S_{21} = S_2 - S_1$  を動かすことと同じであり、 $B_i$  サイクルは  $\beta'_i$  とその上の  $S^2$  からなる 3 次元ディスクであるとみなすことができる。(図 12 の (b))

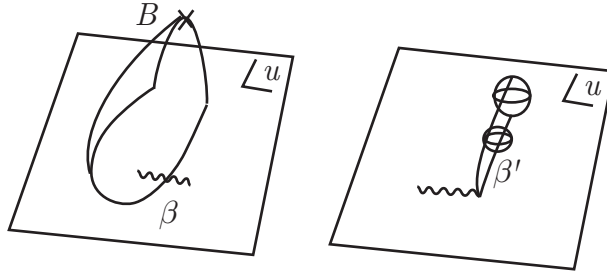


図 12: Calabi-Yau 上の  $B_i$  サイクル

$A_i$  サイクルと  $B_i$  サイクルは  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  と同様に、次のような交差関係を持つ。

$$\langle A_i, B_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (310)$$

もともと NS5-brane の  $x^8$  座標を全て 0 においてあったことに相当して、 $u$  を固定して得られる Taub-NUT 空間上でのコンパクト 2-cycle はその上へのケーラー形式  $k^8$  の引き戻しが 0 であるような Lagrangian 部分多様体である。従って、 $u$  平面上の曲線と Taub-NUT 空間中のコンパクト 2-サイクルとからなる  $A_i$  サイクルや  $B_i$  サイクルは、その上へのケーラー形式 (299) の引き戻しが 0 であるラグランジアン多様体になる。以前にも述べたように (299) は近似式でしかないから、ここでの議論は厳密ではないが、それぞれのサイクルにブレーンをまきつけたときに超対称性が残ることを仮定すれば、それがラグランジアン部分多様体でなければならないことが示される。

#### 4.4 Gukov-Vafa-Witten ポテンシャル

以前に得られたグーボール超ポテンシャル (287) を Calabi-Yau 上の場を用いて書き換えてみよう。そのためにはまずリーマン面上の積分 (270) と (277) を Calabi-Yau のサイクルでの積分として書き換える必要がある。

まず (277) について考える。 $w$  は (293) に与えられているように正則 2 形式の  $S_I$  上の積分として与えられる。従って、 $wdu$  の  $\alpha_i$  サイクル上での積分は

$$S_i = \int_{\alpha_i} wdu = \int_{\alpha_i} \left( \int_{S_I} \omega_{(2,0)} \right) du \quad (311)$$

となる。ここで  $S_I$  サイクルを  $\alpha_i$  サイクルにそってまわした時に掃く曲面が Calabi-Yau 上の  $A_i$  サイクルであること、Calabi-Yau 上の holomorphic 3-form が (298) によって与えられることを用いれば  $S_i$  は  $\omega_{(3,0)}$  の  $A_i$  サイクル上の積分として表されることがわかる。 $\Pi_i$  についても同様であり、つぎの二つの式を得る。

$$S_i = \oint_{A_i} \omega_{(3,0)}, \quad \Pi_i = \int_{B_i} \omega_{(3,0)} \quad (312)$$

積分 (270) では differential  $ds$  の  $u$  平面上の積分として  $N_i$  や  $\tau$  が与えられている。ある  $u$  における  $s$  の値は 2-form ポテンシャルの積分として (295) に与えられている。積分 (270) は、この量  $s$  を一度微分して  $\alpha_i$  または  $\beta_i$  サイクル上で積分せよという式であるから、これは次のように  $A_i$  および  $B_i$  サイクル上で場の強さ  $G_3$  を積分せよという式になる。

$$N_i = \oint_{A_i} G_3^C, \quad \tau + n_i = \int_{B_i} G_3^C. \quad (313)$$

ただし、複素 3-形式  $G_3^C$  を次のように定義した。

$$G_3^C = G_3^B + \tau_{\text{str}} H_3^B. \quad (314)$$

(313) で得られた二つの式はそれぞれ物理的な解釈をすることができる。まず、 $A_i$  上の積分として  $N_i$  を得る式であるが、この式はもともと  $N_i$  枚の D5-brane が  $A_i$  とリンクした  $S^2$  に巻きついていて、それがフラックスとして残っていることを意味している。また、二つ目の  $\tau$  の式であるが、これはストークスの定理によって (300) に書き換えることができる。つまり、遠方の基準点における  $S^2$  のサイクルに D5-brane を巻きつけたときにその上で実現されるゲージ理論の結合定数を与えている。

(312) と (313) を以前に得られた有効超ポテンシャル (287) に代入すれば次の式を得る。

$$W_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \left[ \oint_{A_i} \omega_{(3,0)} \int_{B_i} G_3 - \oint_{B_i} \omega_{(3,0)} \int_{A_i} G_3 \right] \quad (315)$$

ここで、 $g_{\text{str}}^A$  が T-dual 変換を行う前の IIA 型理論の結合定数であることに注意。全てを IIB 型の言葉で書くために  $g_{\text{str}}^A = L_A g_{\text{str}}^B$  を用い、さらに次のように正則 3 形式の規格化を変更する。

$$\Omega_{(3,0)} = \frac{1}{L_A} \omega_{(3,0)} \quad (316)$$

$\omega_{(3,0)} = du \wedge \omega_{(2,0)}$  の規格化が (294) のように因子  $L_A$  を含んでいたことを思い出せば、 $\Omega_{(3,0)}$  が次のように自然な規格化条件を満足していることがわかる。

$$\Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(3,0)}^* = \frac{4i}{3} k_{\text{CY}} \wedge k_{\text{CY}} \wedge k_{\text{CY}}, \quad |\Omega_{(3,0)}|^2 \equiv \frac{1}{6} \Omega_{mnp} \Omega^{*mnp} = 8. \quad (317)$$

$\Omega_{(3,0)}$  を用いて (315) を書き直せば、次のポテンシャルを得る。

$$W_{\text{eff}} = T_{D5} \left[ \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \int_{B_i} G_3 - \oint_{B_i} \Omega_{(3,0)} \int_{A_i} G_3 \right] \quad (318)$$

ただし  $T_{D5} = 2\pi/g_{\text{str}}^B$  は D5-brane の張力である。これは Gukov-Vafa-Witten ポテンシャルと呼ばれる [16]。

IIB 型理論の場でグルーボール超場を書いておくと、次のようになる。

$$\mathcal{S}_i \equiv \text{tr}(W_i W_i) = \frac{2\pi}{g_{\text{str}}^A} \mathcal{S}_i = T_{D5} \int_{A_i} \Omega_{(3,0)} \quad (319)$$

有効ポテンシャル (318) は、ドメインウォールの張力を与えるものとして幾何学的に解釈することができる。Calabi-Yau の  $A_i$  サイクルに巻きついた  $n$  枚の D5-プレーンとして domain-wall を与えてみよう。このとき、ドメインウォールの両側では  $G_3$  の  $B_i$  積分が以下のように変化する。

$$\Delta \oint_B G_3 = n. \quad (320)$$

これは、ドメインウォールの両側の  $B_i$  サイクルの差が  $A_i$  サイクルにリンクした  $S^3$  を与え、そこを通るフラックスがプレーンの枚数を与えるからである。この結果、超ポテンシャルが次のように変化する。

$$|\Delta W_{\text{eff}}| = n T_{D5} \left| \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \right| = n T_{D5} V \quad (321)$$

ただし、 $A_i$  サイクル上での  $\omega_{(3,0)}$  の積分が次のように体積を与えることを用いた。

$$\left| \oint_{A_i} \Omega_{(3,0)} \right| = V \quad (322)$$

ドメインウォールがもし BPS であれば、その張力はドメインウォール両側での超ポテンシャルの差として与えられることが知られている。すなわち (321) の左辺はドメインウォールの張力を与えており、それが右辺のように D5-brane の張力として与えられることを意味している。



## 4.5 ケーラーポテンシャル

§4.1 と §4.2 では平行な 2 枚の NS5-brane の間に張った D4-brane によって  $\mathcal{N} = 2$  のゲージ理論を実現するところから出発し、NS5-brane を  $w$  方向に変形することで超ポテンシャルを導入して  $\mathcal{N} = 1$  の理論を得た。そして §4.3、§4.4 ではそれが T-dual 変換を通してフラックスを伴う Calabi-Yau に関係していることを見た。

立場を変えて Calabi-Yau の側から出発して同様の有効理論を得ようとすれば、まずはフラックスのない Calabi-Yau によるコンパクト化を考え、それがフラックスの導入によってどのように変化するかという順序で考えるのが自然であろう。フラックスのない Calabi-Yau は、D4-brane を含まない、 $w$  方向に変形された NS5-brane の系に対応する。そこで、NS5-brane 系の立場でも話の順序を変えて、 $w$  方向への変形をまず行い、D4-brane をそのあとで導入するというのを考えてみよう。NS5-brane の枚数は何枚であっても同様の議論ができるが、ここでは二枚の場合を考えておく。初めは NS5-brane は  $w$  以外の方向については  $x^8 = x^9 = x^{11} = 0$  に位置しているとしよう。この系は  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性を持ち、 $SU(2)_R$  対称性は  $(x^8, x^9, x^{11})$  空間の回転対称性に対応する。

NS5-brane が交差する点それぞれにおいて、NS5-brane 間に張った D2-brane より零質量場が現れる。もちろん直接 D2-brane を量子化することは出来ないが、双対性を用いた議論により、それぞれの交点の一つずつ  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項が現れることがわかる。この多重項は一つの複素スカラー場を含むが、このスカラー場の期待値がそれぞれの交点における deformation の自由度を表す。それぞれの交点において現れる  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項を  $\mathcal{N} = 1$  ベクトル多重項  $V_i$  とカイラル多重項  $S_i$  の組として表そう。

$(x^8, x^9, x^{11})$  方向に NS5-brane をずらす操作が理論のどのような変形に対応しているかを考えてみよう。この変形のパラメータは  $SU(2)_R$  対称性の 3 重項になっている。従って、この変形の自由度は  $\mathcal{N} = 2$  理論の FI パラメータと同定することができる。例えば、 $s = (x^{11} + ix^9)/L_{11}$  方向へ  $\Delta s = \tau$  だけずらす操作および  $x^8$  方向に  $\zeta = \delta x^8$  だけずらす操作は超ポテンシャル  $W$  およびケーラーポテンシャル  $K$  に次の項を導入することに対応する。

$$W = \tau S, \quad K = \zeta V \quad (323)$$

このうちの一つ目の超ポテンシャルは、グローバル有効ポテンシャル (287) で  $N_i = 0$  にした場合に一致する。これに対し、(287) の第 2 項は  $N_i$  に比例するから、D4-brane (NS5-brane 上のフラックス) の導入による効果を表していると考えることができる。

再びフラックスも FI パラメータも導入されていない場合に戻ろう。 $\mathcal{N} = 2$  超対称性は、 $\mathcal{N} = 2$  の Fayet-Iliopoulos 項と解釈できる場合は除きカイラル多重項  $S_i$  に対する超ポテンシャルの存在を許さないで、この系は  $S$  に対するケーラーポテンシャルを与えることで完全に決まってしまう。ベクトル多重項の作用も  $\mathcal{N} = 2$  超対称性によって  $S$  のケーラーポテンシャルが与えられると一意的に決まる。そこで、NS5-brane の有効作用から deformation モードのケーラーポテンシャルを決めることを考えてみよう。 $w$  の変化が緩やかである場合には、NS5-brane の作用から得られる  $w$  方向の微小振動モードを記述する作用は次のように与えられる。

$$S = -\frac{2\pi}{2(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^6x \partial_\mu w \partial^\mu w^* \quad (324)$$

全体の係数は (15) に与えた NS5-brane の張力から決まる。ここで、 $w$  が複素変形パラメータ  $z^i$  に次のように正則に依存しているとす。

$$w = w(u, z^i). \quad (325)$$

これを (324) に代入することで、モジュライパラメータ  $z^i$  に対する次の有効作用を得ることができる。

$$S = -\frac{2\pi i}{4(g_{\text{str}}^A)^2} \int d^4x \int du \wedge du^* \frac{\partial w}{\partial z^i} \frac{\partial w^*}{\partial z^{*\bar{j}}} \partial_\mu z^i \partial^\mu z^{*\bar{j}} = -\int d^4x \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial z^{*\bar{j}}} \partial_\mu z^i \partial^\mu z^{*\bar{j}} \quad (326)$$

ただし、ケーラーポテンシャル  $K$  は次のように与えられる。

$$K = \frac{2\pi i}{4(g_{\text{str}}^A)^2} \int w du \wedge w^* du^* \quad (327)$$

積分は  $u$ - $w$  空間中のリーマン面全体について行われる。NS5-brane の変形モードに対するこのケーラーポテンシャルは、(293) を用いれば、Calabi-Yau 全体での積分として次のように書くことができる。

$$K = \frac{2\pi i}{4(g_{\text{str}}^A)^2} \int_{\text{CY}} \omega_{(3,0)} \wedge \omega_{(0,3)}^* = \frac{2\pi i}{4(g_{\text{str}}^B)^2} \int_{\text{CY}} \Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(0,3)}^* \quad (328)$$

実はこのケーラーポテンシャルは、IIB 型超重力理論の Calabi-Yau コンパクト化によって得られる、複素構造の変形モードに対するケーラーポテンシャルに一致する。

以下では複素構造のケーラーポテンシャルがどのように得られるかを簡単に復習しておこう。IIB 型理論の Calabi-Yau コンパクト化は複素構造のモジュライから  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項が、ケーラー構造のモジュライからハイパー多重項が現れる。ここではベクトル多重項に注目する。出発点となるのは IIB 型超重力理論の作用 (32) である。そのアインシュタイン作用項に複素構造の変形に対応した計量の変化

$$\delta g_{m\bar{n}} = g_{i,\bar{m}\bar{n}} \delta z^i = \frac{1}{|\Omega|^2} \Omega_{i,\bar{m}pq} \Omega_{\bar{m}}^{pq} \delta z^i \quad (329)$$

を代入し、次の形をした項に注目する。

$$\sim \sqrt{-g^{10}} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} g^{\mu\nu} \partial_\mu g_{ik} \partial_\nu g_{\bar{j}\bar{l}} \quad (330)$$

すると複素場  $z$  に対する 4 次元での作用が次のように与えられることがわかる。

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \partial_\mu z^i \partial^\mu \bar{z}^j \quad (331)$$

ただしケーラーポテンシャルは  $V_6$  をカラビヤウの体積として次のように与えられる。

$$K = - \frac{4\pi V_6}{(g_{\text{str}}^B)^2} \log \left( i \int_{\text{CY}} \Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(0,3)}^* \right) \quad (332)$$

ここで考えている Calabi-Yau は非コンパクトであるので、 $V_6$  が発散するような極限を取る必要がある。Calabi-Yau 上の積分を次のように発散項とそれ以外の有限部分に分ける。

$$i \int_{\text{CY}} \Omega \wedge \Omega^* = V_6 |\Omega|^2 + i\delta \left( \int_{\text{CY}} \Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(0,3)}^* \right) \quad (333)$$

これを (332) に代入し、発散する定数部分と  $V_6 \rightarrow \infty$  で落ちる項を無視すると、非コンパクト極限でのケーラーポテンシャルが次のように与えられる。

$$K = - \frac{4\pi i}{(g_{\text{str}}^B)^2 |\Omega|^2} \int_{\text{CY}} \Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(0,3)}^* \quad (334)$$

ここで用いている規格化  $|\Omega|^2 = 8$  を代入すれば、これが NS5-brane の作用から得られたケーラーポテンシャル (328) に等しいことがわかる。

## 4.6 ワープ因子

これまで NS5-brane が平行な場合に得られた公式を用いて曲がった NS5-brane と Calabi-Yau 空間の双対性を議論してきた。しかし、これはあくまでも近似であり、厳密には正しくない。厳密に正しい関係を求めようとすれば曲がった NS5-brane に対応する超重力理論の古典解を厳密に求め、それに対して Bucher

則を適用する必要がある。このような曲がったブレーンの解はたとえば [17] などですく解説されている。それらの解を用いれば Calabi-Yau を用いた解析と同様の結果を得ることができると考えられる。ここではこのようなブレーン古典解を用いることはせず、単にブレーン近似を行った場合と Calabi-Yau 空間を用いた解析を比較し、どのような違いが出るのかを見てみる。

NS5-brane を用いた記述では、NS5-brane の形状が

$$w = w(u), \quad s = s(u), \quad (335)$$

のように与えられている。(座標  $x^M$  との関係は (255) に与えられている。)(より正確には、 $s$  の実部は M-理論の  $x^{11}$  方向の座標を与えるので、M5-brane の形状を現すというべきである。)これが T-dual 変換によって次のような計量を持つ時空へと変換される。

$$ds^2 = |du|^2 + ds_{\text{TN}}^2(u) \quad (336)$$

ここで、 $ds_{\text{TN}}^2(u)$  は center の位置が  $u$  に依存するような Taub-NUT 空間の計量を表す。前にも述べたが  $ds_{\text{TN}}$  が非自明に  $u$  に依存する場合この計量は厳密にはアインシュタイン方程式を満足しない。 $G_3$  と  $H_3$  の線形結合として (314) で定義された 3-form field strength  $G_3^C$  は、(295) より、NS5-brane 系からの T-dual 変換として次のように与えられる。

$$G_3^C = \sum_I ds_I \wedge \eta_I \quad (337)$$

$\eta_I$  は Taub-NUT 空間  $ds_{\text{TN}}^2(u)$  上のゼロモードである。これも上の計量と同様に近似式である。

$\eta_I$  が Taub-NUT 空間上で self-dual であり、 $*_2 du = idu$  であることから

$$*_6 G_3^C = iG_3^C \quad (338)$$

が成り立つことが期待される。この条件はしばしば imaginary self-dual 条件と呼ばれる。(336) や (337) が近似であるためにこれだけの議論では本当に (338) が成り立つかどうかは分からないが、超重力理論の観点からも Calabi-Yau のコンパクト性を仮定したときにいくつかの運動方程式を組み合わせるとこの式を示すことができる。(ここで考えているような非コンパクト内部空間の場合には必ずしもこの条件は課されないが、通常は局所的な議論をしている場合にも完全に非コンパクトではなく、非常に大きな空間でコンパクト化されていることを期待するので、この条件を課す。)ピアンキ恒等式  $dG_3^C = 0$  とあわせれば、 $G_3^C$  は調和形式であることが要求される。(ディラトンやアクシオンが変化すると、ピアンキ恒等式が変化するが、ここではそれらのスカラー場は定数であるとしておく。)

さらに、 $k^8$  と  $\eta_I$  の内積が 0、あるいは  $k^8 \wedge \eta_I = 0$  より、

$$G_3^C \wedge k_{\text{CY}} = 0 \quad (339)$$

が成り立つ。(  $k_{\text{CY}}$  は (299) に与えられている。)これは  $G_3^C$  が primitive であることを意味している。ここでも (339) を用いるのにいくつかの近似式を用いているので、厳密に (339) が成り立つかどうかは明らかではないが、同じ条件が超重力理論の古典解の超対称性を要求することで得られることが知られている。[18, 19]

これら二つの条件が  $G_3^C$  の成分をどれだけ制限するかを見るためには、複素構造を不変に保つ回転対称性  $SU(3)$  に対する規約分解を行うのがよい。一般の 3-form は  $3 + \bar{3}$  を 3 つ反対称に組んだものであるから、表 3 のように 6 つの部分に分解される。表には上記の二つの条件がどの成分を禁止するかが与えられている。これら二つの条件より、残るのは (2, 1)-form の 6 表現部分と一部と (0, 3)-form 部分である。(337) を見ると、(0, 3) 成分は  $G_3^C$  に含まれていないように見える。しかしこれは正しくない。実際、(0, 3) 成分がなければ Gukov-Vafa-Witten 超ポテンシャル (318) は常に 0 になってしまい、真空ごとに異なる

表 3: 自己双対条件とプリミティブ条件によって許される 3-形式の成分

form	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)
SU(3)	[333] = 1	[33] $\bar{3}$ = 3 + $\bar{6}$	3[33] = $\bar{3}$ + 6	[333] = 1
self-dual	×	× ○	○ ×	○
primitive	○	× ○	× ○	○

超ポテンシャルを持つ  $\mathcal{N} = 1$  超 Yang-Mills 理論の真空などを扱うことができなくなる。つまり、GVW ポテンシャルが現れることには NS5-brane の変形が本質的な役割を果たして、(337) はその部分をうまく捉えていない。ただし、Calabi-Yau がコンパクトであり 4 次元で重力がダイナミカルである場合には、超対称性を要求すると  $W = 0$  でなければならないため、(0, 3) 部分も消える必要があることを注意しておこう。

次に、超重力理論の古典解において 3-form flux がほかの場に対して与える補正について考えよう。

重要なのは、アインシュタイン方程式と 5-form 場のビアンキ項等式である。アインシュタイン方程式中のエネルギー運動量テンソルは場の強さ  $H_3$  と  $G_3$  を二次で含む。従って、もしこれらが 0 でない場合には背景の時空を変形させるはずである。さらに RR 5-形式場も  $H_3$  と  $G_3$  が共存したときには 0 ではなく、(48) に与えた運動方程式からわかる。  $G_5$  に対する式は次のように与えられる。

$$dG_5 = H_3 \wedge G_3. \quad (340)$$

\* $G_5 = -G_5$  より、これはビアンキ項等式であると同時に運動方程式でもある。

$G_5$  に対する方程式 (340) は  $H_3$  と  $G_3$  が同時に存在すると、effective に D3-brane の charge が現れることを表していると解釈できる。そこで、計量が  $ds_{\text{CY}}^2 = \tilde{g}_{mn} dx^m dx^n$  と与えられる Calabi-Yau 上の D3-brane を考えよう。D3-brane 密度を  $\rho$  とする。すなわち、計量  $\tilde{g}_{mn}$  で定義される Calabi-Yau の volume form を  $\omega_6$  としたときに

$$dG_5 = \rho \omega_6 \quad (341)$$

と与えられるとする。このとき、D3-brane 解は以下のように与えられる。

$$ds^2 = h^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h^{1/2} ds_{\text{CY}}^2 \quad (342)$$

ワーブ因子  $h$  は次の関係式を満足する Calabi-Yau 上の調和関数である。

$$\Delta(\tilde{g})h = -g_{\text{str}}\rho. \quad (343)$$

また、RR 4-form potential の 0123 成分は次のように与えられる。

$$C_{0123} = \frac{1}{g_{\text{str}}h} \quad (344)$$

実は、これらの式は D3-brane ではなく上記の 3-form 場の強さが存在する場合にも D3-brane 密度を次のようにとおけばそのまま成り立つ。

$$H_3 \wedge G_3 = \rho_{\text{D3}} \omega_6. \quad (345)$$

このようなワーブ因子が導入されても、Gukov-Vafa-Witten 超ポテンシャルは補正を受けないことが知られている。たとえば簡単なチェックとしてドメインウォールの張力を見てみよう。ドメインウォールの張力は、その両側の超ポテンシャルの値の差によって決まるから、超ポテンシャルが変化しなければその

張力も影響を受けないはずである。以前に述べたようにドメインウォールは内部空間の 3-サイクルに巻きついた D5-brane であるが、この D5-brane の体積に対するワープ因子の寄与は内部空間と外部空間でちょうど相殺することが分かる。

これに対してケーラーポテンシャルはワープ因子の影響を受ける。このことを見るには、アインシュタイン作用の中で複素構造に対する運動項を与える (330) のような項がワープファクターをどのようなべきで含むかを勘定すればよい。計量のべきのみに注目すれば、4 次元非コンパクト部分の計量  $g_{\mu\nu}$  と Calabi-Yau 部分の計量  $g_{mn}$  が  $S \propto (g_{\mu\nu})^1 (g_{mn})^3$  のように含まれることがわかる。これはワープ因子を  $h^1$  のべきで含む。従ってケーラーポテンシャル (328) は次のように変更される。[20]

$$K = \frac{2\pi i}{4(g_{\text{str}}^E)^2} \int_{\text{CY}} h \Omega_{(3,0)} \wedge \Omega_{(0,3)}^* \quad (346)$$

以前との違いは積分の中にワープ因子  $h$  が含まれていることである。ここに現れる  $h$  の因子は、エネルギースケールの変化を表している。たとえば Calabi-Yau のある局所的な変形を表すような振動モードの運動エネルギーは、その点におけるワープ因子  $h$  によってエネルギースケールがシフトされる。

3-form フラックスの運動項  $\sim \sqrt{-g} |G_3^C|^2$  の間の関係についても同様の方法でワープ因子に対する依存性を見ることができる。この中にはワープ因子が  $h^{-1}$  のように含まれる。これは 4 次元の有効理論の立場ではポテンシャルエネルギー  $\sim K^{i\bar{j}} W_{,i} \bar{W}_{,\bar{j}}$  に対応しており、ワープ因子に対する依存性はケーラーポテンシャル (346) から期待されるものに一致する。

以上のように、ワープ因子は D-term 部分に対してのみ影響を与える。従って、ワープ因子のことを考慮しない NS5-brane あるいは M5-brane を用いた解析は、D-term 部分が影響を与えるような物理量については、正しい結果を得ることができないが、F-term 部分に対してはよい記述を与える。

## 4.7 Elliptic model

§4.1 では、もっとも簡単な例として二枚の NS5-brane の間に張った D4-brane によるゲージ理論の構成を考えたが NS5-brane の枚数をさらに増やすことで一般化することができる。ここでは量子効果の解析までは触れず、tree level を与えるブレン系についてのみ説明する。

$x^9$  方向が周期  $L_9$  でコンパクト化されており、(1) に示された方向の  $P$  枚の NS5-brane が並んでいるとする。まずは  $x^6 = x^7 = x^8 = 0$  としよう。 $x^9$  座標の順に NS5-brane を  $I$  でラベルする。これらの

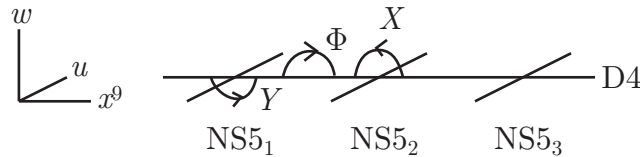


図 13:  $\mathcal{N} = 2$  クイバー型ゲージ理論を与えるブレン系の例。この例では図の左右の端は同一視される。

NS5-brane のうち、隣り合うもの、たとえば  $I$  番目の NS5-brane と  $I + 1$  番目の NS5-brane の間に  $N_I$  枚の D4-brane が張っているとす。  $I = 1$  と  $I = P + 1$  は同一視され、  $P$  番目の NS5-brane と 1 番目の NS5-brane の間にも D4-brane が存在してもよい。そうすると D4-brane は  $x^9$  方向全体に巻き付き、一周しているような場合を考えることができる。それぞれの上には  $U(N_I)$  のゲージ理論が実現し、全体としては  $\mathcal{N} = 2$  の超対称性を持つ  $\prod_{I=1}^P U(N_I)$  ゲージ理論が実現される。それぞれの  $U(N_I)$  に対応する  $\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項を  $\mathcal{N} = 1$  ベクトル多重項  $V_I$  とカイラル多重項  $\Phi_I$  の組としてあらわそう。D4-ブレンの  $u$  方向への運動モードは、 $SU(N_I)$  の随伴表現に属するカイラル多重項  $\Phi_I$  の自由度に相当する。

$SU(N_I)$  ゲージ群の結合定数  $\tau_I$  は NS5 ブレーンの間隔と対応しており、(256) を一般化した次の式によって与えられる。

$$\tau_I = s_{I+1} - s_I. \quad (347)$$

これらの場以外に、一つの NS5-brane をはさむ二つの区間に張った D4-brane をつなぐ開弦からハイパー多重項が現れる。これを二つのカイラル多重項  $X_I$  と  $Y_I$  の組として表そう。これらはゲージ群の次の表現に属する。

$$X : (N_I, \bar{N}_{I-1}), \quad Y : (\bar{N}_I, N_{I-1}). \quad (348)$$

$\mathcal{N} = 2$  の超対称性は、これらの場と  $\Phi_I$  の間に次の超ポテンシャルで表される相互作用が存在することを要請する。

$$W(X, Y, \Phi) = \sum_I \Phi_I (X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1}) \quad (349)$$

もし、 $\Phi_I$  と  $\Phi_{I-1}$  が異なる真空期待値を持てば、 $X_I$  と  $Y_I$  はその差に比例した質量を持つが、これは二つの D4-brane を結ぶ開弦の長さと同比例している。

このゲージ理論の構造を quiver 図形を用いて表すと、図 15 のようになる。全ての  $N_I$  の数が等しい場

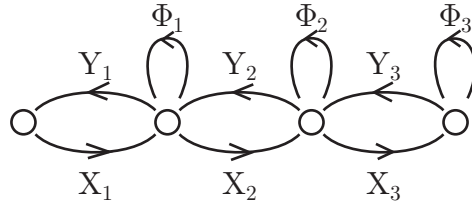


図 14:  $\mathcal{N} = 2$  クイバー型ゲージ理論の例。この図の両端の丸は同一視される。

合には、それぞれのゲージ群に対して  $2N_I$  個のハイパー多重項が結合しており、ちょうど  $\beta$  関数が 0 になる。従って、この理論では共形対称性が実現している。

この  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論に超ポテンシャルを導入することによって  $\mathcal{N} = 1$  ゲージ理論に変形することができる。 $I$  番目の NS5-brane の  $w$  空間での形状を  $w = w_I(u)$  とする。このような変形を行うと、 $\Phi_I$  に対する超ポテンシャルが現れ、(260) を一般化した次の式で与えられる。

$$W'(\Phi_I) = \frac{w_{I+1}(u) - w_I(u)}{(2\pi l_s)^3 g_{\text{str}}^A}. \quad (350)$$

特に簡単な超ポテンシャルの例として NS5-brane の形状を現す関数  $w_I(u)$  が次のように与えられる場合を考えよう。

$$w_I(u) = \mu q_I u. \quad (351)$$

ただし  $\mu$  は質量パラメータ、 $q_I$  は  $I$  ごとに割り当てられたパラメータで  $q_I = 0$  または  $q_I = 1$  である。このような変形は  $q_I = 1$  である NS5-brane を  $u$  方向から  $w$  方向に回転させるものと解釈できる。図 15 には  $\mu$  を大きくした極限で回転された NS5-brane が完全に  $w$  の方向を向いた場合を描いてある。

このような変形を行った場合、超ポテンシャルは

$$W = \frac{\mu}{2} \sum_I (q_{I+1} - q_I) \Phi_I^2 \quad (352)$$

である。 $\Phi_I$  のうち  $q_{I+1} = q_I$  のものは質量 0 であり、 $q_{I+1} \neq q_I$  の時にはその質量が  $\pm\mu$  になる。この理論の低エネルギー極限を考えると、 $\Phi_I$  のうち質量を持ったものは decouple する。(図 16) この場合、 $\Phi_I$

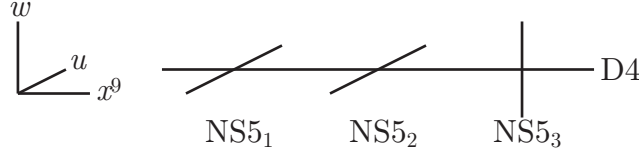


図 15:  $\mathcal{N} = 1$  クイバー型ゲージ理論を与えるブレン系の例。この図の左右の端は同一視される。

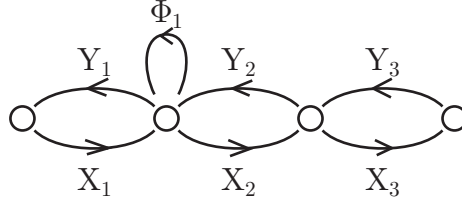


図 16: SPP 理論の quiver diagram。両端の丸は同一視される。

に対する F-term 条件の式を解くと、

$$\Phi_I = -\frac{q_{I+1} - q_I}{\mu}(X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1}) \quad (353)$$

が得られる。この解を再び超ポテンシャルに代入して  $\Phi_I$  を消去することにより  $\Phi_I$  が decouple した後の有効ポテンシャル

$$W = -\frac{1}{2\mu}(q_{I+1} - q_I)(X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1})^2 \quad (354)$$

を得ることができる。

得られた超ポテンシャルを全てあわせると、次のようになる。

$$W = \sum_{q_I = q_{I+1}} \Phi_I (X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1}) - \frac{1}{2} \sum_{q_I \neq q_{I+1}} (q_{I+1} - q_I) (X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1})^2 \quad (355)$$

(パラメータ  $\mu$  は場の再定義により吸収した。) F-term 条件を解く前に次の変数変換を行っておくのが便利である。

$$\Phi_I = \Phi'_I + \frac{2q_I - 1}{2}(X_I Y_I + Y_{I+1} X_{I+1}) \quad (356)$$

すると、 $(X_I Y_I)^2$  のような項が全て相殺して超ポテンシャルの形が少し簡単になる。

$$W = \sum_{q_I = q_{I+1}} \Phi_I (X_I Y_I - Y_{I+1} X_{I+1}) + \sum_{q_I \neq q_{I+1}} (q_{I+1} - q_I) (X_I Y_I Y_{I+1} X_{I+1}) \quad (357)$$

ただし、 $\Phi'_I$  を改めて  $\Phi_I$  と書いた。

全ての  $N_I$  が等しい場合を再び考えてみよう。 $\Phi_I$  が decouple していない場合にはゲージ群  $SU(N_I)$  に結合した場合は  $\mathcal{N} = 2$  超対称性がある場合と同じであり、 $\beta = 0$  である。また  $\Phi_I$  が decouple していても、 $SU(N_I)$  に結合したカイラル多重項の個数は  $2N_I$  個であり、これはコンフォーマルウィンドウに入っている。従って、低エネルギーではやはり共系対称性が実現されていると考えられる。

この NS5-brane 系に対して §4.3 で考えた T-duality 変換を行うことを考えてみよう。NS5-brane を与える式は、 $q_I = 0$  であるブレン ( $w = 0$ ) の枚数を  $m$ 、 $q_I = 1$  であるブレンの ( $u = 0$ ) 枚数を  $n$  とすると、NS5 ブレンの world volume を与える式は  $w^m u^n = 0$  である。従って  $x^9$  方向に T-dual 変換を行って得られる Calabi-Yau は次のように与えられる。

$$xy = w^m u^n \quad (358)$$

この多様体は  $m = n = 1$  のとき conifold と呼ばれる。また、一般の  $m, n$  に対しては、generalized conifold と呼ばれる。 $m = 2, n = 1$  の場合は、suspended pinch point (SPP) と呼ばれる。

実は、このゲージ理論の moduli space としてこの空間が現れる。このことを見ておこう。この理論のモジュライ空間の中で、特に全ての場が対角化されているような場合を考える。するとそれぞれの対角成分を独立に扱うことができる。これはすべてのゲージ群を  $U(1)$  として、カイラル場を複素数のように扱うことに対応する。基本的なゲージ不変単項式は

$$\Phi_I, \quad x \equiv X_P \cdots X_2 X_1, \quad y \equiv Y_1 Y_2 \cdots Y_P, \quad X_I Y_I. \quad (359)$$

であり、任意のゲージ不変単項式はこれらの組み合わせで表される。

話を簡単にするために、 $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, 1)$  のときを考えてみよう。この理論の quiver 図形は 16 に与えられている。このときの超ポテンシャルは次のように与えられる。

$$W = \Phi_1(X_1 Y_1 - Y_2 X_2) + (X_2 Y_2 Y_3 X_3) - (X_3 Y_3 Y_1 X_1). \quad (360)$$

ここからそれぞれの場の  $F$ -term 条件を求めてみよう。まずは全ての場が 0 ではないと仮定しよう。

$$\begin{aligned} F_{X_1} &= (\Phi_1 - X_3 Y_3) Y_1, & F_{Y_1} &= (\Phi_1 - X_3 Y_3) X_1, \\ F_{X_2} &= -(\Phi_1 - X_3 Y_3) Y_2, & F_{Y_2} &= -(\Phi_1 - X_3 Y_3) X_2 \end{aligned} \quad (361)$$

に対する  $F$ -term 条件  $F = 0$  はどれも二つのゲージ不変単項式  $\Phi_1$  と  $X_3 Y_3$  が等しいことを表している。残りの 3 つ

$$F_{\Phi_1} = X_1 Y_1 - X_2 Y_2, \quad F_{X_3} = -(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) Y_3, \quad F_{Y_3} = -(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) X_3. \quad (362)$$

からはゲージ不変単項式  $X_1 Y_1$  と  $X_2 Y_2$  が等しいことが示される。従って独立なのは

$$w = X_1 Y_1 = X_2 Y_2, \quad u = X_3 Y_3 = \Phi_1, \quad x, \quad y, \quad (363)$$

の 4 つである。さらに、これらの演算子の定義より、次の代数関係が成り立つ。

$$xy = w^2 u. \quad (364)$$

これはまさに SPP を与える式に他ならない。

(363) に与えられた  $u$  と  $w$  は  $S^1$  に巻きついた D4-brane の  $u$  座標および  $w$  座標と解釈することができる。例えば、NS5<sub>1</sub> と NS5<sub>2</sub> の間に張った D4-brane の  $u$  座標はまさに  $\Phi$  と同定できるし、それ以外の二つの部分を  $u$ -方向に動かすと D4-brane が NS5<sub>3</sub> から離れてしまうが、この、D4 と NS5-brane の間の間隔が対応する位置に現れる二つの場の複合演算子  $X_3 Y_3$  の期待値に対応する。 $w$  方向への運動も同様に解釈することができる。この D4-brane は、以前に考えたものと異なり  $S^1$  に巻きついているので T-dual 変換によって D3-brane に変換される。そしてモジュライ空間はこの D3-brane が運動することができる空間、すなわち T-dual 変換の結果得られる Calabi-Yau 空間に他ならない。

このような、複合演算子とプレーン間の距離の対応はしばしば現れる。非自明な例を一つ挙げておこう。 $\mathcal{N} = 2$  理論において curve の cut の位置は Coulomb moduli の値によって決まり、それぞれの D4-brane の位置に対応している。そこに超ポテンシャルを導入して  $\mathcal{N} = 1$  理論に変形すると、それらの cut は超ポテンシャルの停留点に集まる。 $i$  番目の停留点に集まった  $N_i$  本のカットはそれらの端点同士がつながり、一本のカットになる。この際二つの分岐点の対消滅のような現象が起きる。分岐点においては二枚の NS5-プレーンは一致していたが、それらが消滅することにより二枚のプレーンの間にある間隔があく。これは、もともと  $N_i$  個あった cut が monopole condensation によってひとつにつながったものだ と解釈できる。[21]



上記の解析は NS5-brane の枚数と  $q_I = 0, 1$  の選び方が任意の場合に簡単に拡張できる。F-term 条件は次の関係式を与える。

$$w = X_I Y_I (q_I = 0) = \Phi_I (q_I = 1), \quad u = X_I Y_I (q_I = 1) = \Phi_I (q_I = 0). \quad (365)$$

そして、多項式の定義から従う次の関係式を満足する。

$$xy = w^m u^n. \quad (366)$$

これはまさに T-dual 変換で得られる generalized conifold (358) にほかならない。

## 5 トーリック Calabi-Yau

### 5.1 トーリック図形

実  $2n$  次元トーリック多様体はその次元の半分、即ち  $n$  個の可換なアイソメトリーを持つ多様体である。以下では多様体はケーラーであり、アイソメトリーはそのケーラー構造を保存するものとする。

$n$  個のアイソメトリーを用いると、多様体のある実  $n$  次元空間  $B$  上の  $\mathbb{T}^n$  ファイバー束として与えることができる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n & \rightarrow & \mathcal{M} \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array} \quad (367)$$

ただし、 $B$  のある部分空間においては  $\mathbb{T}^n$  の一部のサイクルがつぶれてより次元の低いトーラスにもなりえる。

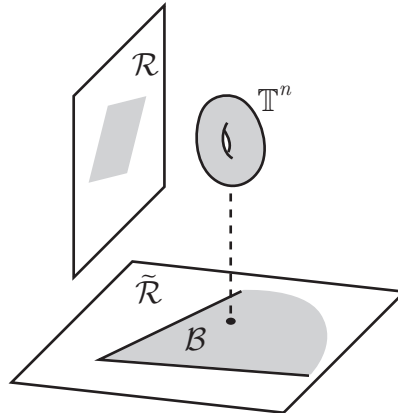


図 17: トーリック多様体のファイバーと底空間

ファイバーおよび底空間に座標を導入しよう。ファイバーの座標には角度変数  $\phi^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) を用いる。ただし、周期は  $2\pi$  ではなく 1 になるように規格化しておく。これら  $n$  個の座標をまとめてベクトルとして表したものを  $\phi$  とする。周期性を無視することによって座標  $\phi^a$  で張られる  $n$  次元空間、すなわち  $\mathbb{T}^n$  の covering space を  $\mathcal{R}$  と置こう。この空間上のベクトル  $v \in \mathcal{R}$  は

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + av \quad a \in \mathbf{R} \quad (368)$$

のようにある部分群  $U(1) \subset U(1)^n$  を生成するキリングベクトルと解釈することができる。この空間の基底を  $e_a$  とすれば、一般のベクトルは  $v = v^a e_a$  のように展開することができる。  $e_a$  はしばしば  $\partial_{\phi^a}$  とも

書く。 $e_a$  の整係数の線形結合によって定義される  $\mathcal{R}$  上の格子を  $\Gamma$  と定義しておく。ファイバーのトーラスは  $\mathbb{T}^n = \mathcal{R}/\Gamma$  と与えられる。

ベース空間の座標としては、 $e_a$  によって生成される  $n$  個の  $U(1)$  アイソメトリーに対するモーメントマップ  $\mu_a$  を用いることができる。 $n$  個のモーメントマップのなすベクトルが値をとる空間  $\mathbb{R}^n$  を  $\tilde{\mathcal{R}}$  とおく。一般のベクトル  $v = v^a e_a$  によって生成される  $U(1) \subset U(1)^n$  対称性に対するモーメントマップは  $v^a \mu_a$  によって与えられる。このモーメントマップによって  $\mathcal{R}$  と  $\tilde{\mathcal{R}}$  の間には自然な内積が定義される。即ちこれら二つの空間は互いに双対空間になっている。 $e_a$  に双対な  $\tilde{\mathcal{R}}$  の基底を  $\tilde{e}^a$  とし、この基底の整係数の線形結合として定義される格子を  $\tilde{\Gamma}$  とする。すなわち  $\tilde{\Gamma}$  は  $\Gamma$  の双対格子である。 $\tilde{e}^a$  はしばしば  $d\phi^a$  とも書く。

基底空間  $B$  は空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  の部分集合であり、境界を持つ。実は、この基底空間は空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  のなかで凸多面体になることが知られている。(ただし、完全に面によって囲まれていない非コンパクトなものも許される。) この多面体の側面を  $I$  でラベルしよう。側面  $I$  の法線ベクトルを  $s_I \in \mathcal{R}$  とする。 $s_I$  は多面体が含まれる  $\tilde{\mathcal{R}}$  ではなく  $\mathcal{R}$  の元であることに注意しよう。実は、この法線ベクトルは適当に規格化すると  $\Gamma$  の元として与えることができる。 $\Gamma$  の元になるという条件の下でもまだ整数倍の不定性は残されているが、以下では多面体の内側を向き、長さが最も短いものを取ることにする。このとき、 $B$  は次のように定義される空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  の部分集合である。

$$s_I \cdot \mu \geq \xi_I \quad \forall I. \quad (369)$$

トーリック多様体  $\mathcal{M}$  が滑らかであるか、あるいはそうでなくても resolution などによって滑らかな多様体に移行できるようなたちの良い空間であるためには、面  $I$  の上では  $s_I$  によって指定されるファイバーのサイクルがつぶれる必要がある。そこではサイクルは図 18 のように滑らかにつぶれており、 $s_I$  によって生成される isometry が複素座標の一つに対する位相回転として表せるような座標を取ることができる。そ

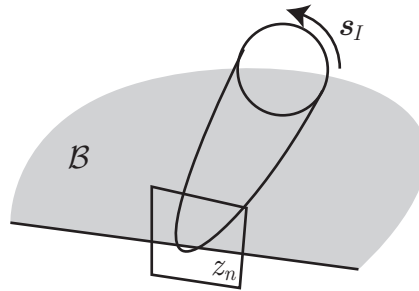


図 18: 底空間  $B$  の側面  $I$  での  $s_I$  サイクルの様子

れぞれの側面に対して定義されるこの複素座標を  $z_I$  としよう。キリングベクトル  $s_I$  はこの座標を用いて

$$s_I = iz_I \frac{\partial}{\partial z_I} - iz_I^* \frac{\partial}{\partial z_I^*} \quad (370)$$

と表される。

すなわち、ベクトル  $s_I$  はベース空間の側面  $I$  の向きを決めるだけでなく、その側面上でのファイバーの振る舞いをも決定する。これらのベクトルの組  $\{s_I\}$  はトーリックデータと呼ばれる。トーリックデータはしばしばトーリック図形と呼ばれる  $\Gamma$  上の点の集合として図示される。

トーリック多様体がカラビヤウ空間である場合には、 $b^{n,0} = 1$  に対応して調和  $(n, 0)$  形式  $\Omega$  が存在する。 $\Omega$  は定数因子の不定性を除き一意的であるから、アイソメトリー (368) のもとで次のように位相回転を受けるはずである。

$$\mathcal{L}_{s_I} \Omega = iq_I \Omega \quad (371)$$

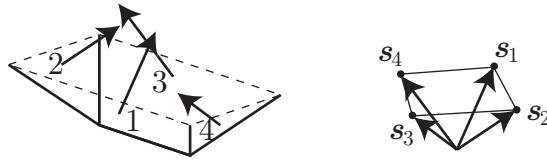


図 19:

$q_I$  は  $s_I$  それぞれに対する  $\Omega$  のチャージであり、あるベクトル  $\mu_{\perp} \in \tilde{\mathcal{R}}$  を用いて

$$q_I = s_I \cdot \mu_{\perp} \quad (372)$$

と与えることができる。

一般に、 $f$  をトーリック多様体上の関数あるいはテンソル場などとするとき、アイソメトリー  $v$  のもとで位相変換を受ける場合、そのチャージを

$$\mathcal{L}_v f = i(v \cdot q) f \quad (373)$$

のように与えるベクトル  $q \in \tilde{\mathcal{R}}$  を定義することができる。このようなベクトルをチャージベクトルと呼ぶことにする。 $\mu_{\perp}$  は  $\Omega$  のチャージベクトルである。トーリック多様体がアイソメトリーによって一周したときに、 $f$  がもとの状態に戻るという条件からチャージベクトルは格子  $\tilde{\Gamma}$  上になければならない。

トーリックカラビヤウ空間を超対称ゲージ理論のモジュライ空間とみなしたとき、超対称性のパラメータはカラビヤウ上の共变的定数スピノルとして表される。調和  $(n, 0)$  形式がこの共变的定数スピノルの二次形式として与えられることから、 $\Omega$  を回転させるようなアイソメトリーは場の理論における R-対称性に対応している。逆に、 $\Omega$  を回転させないアイソメトリー、すなわち  $\mu_{\perp}$  に直交するキリングベクトルに対応する対称性は超対称電荷に作用しないフレーバー対称性を表している。

$B$  のある側面  $I$  に注目しよう。その近傍では前に述べたようにアイソメトリー  $s_I$  が唯一つの複素座標  $z_I$  に作用するような座標を定義することができる。 $z_I$  以外の  $n-1$  個の座標を  $y_1, \dots, y_{n-1}$  としよう。側面  $I$  の近傍は局所的には  $\mathbb{C}^n$  とみなせるから、調和  $(n, 0)$  形式を

$$\Omega \propto dz_I \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} \quad (374)$$

と与えることができる。しかも  $\Omega$  はいたるところで 0 ではないから係数は 0 ではない。従って、 $s_I$  によって生成される  $U(1)$  のもとでの  $\Omega$  のチャージは 1 である。すなわち、任意の面  $I$  に対して次の式が成り立つ。

$$s_I \cdot \mu_{\perp} = 1. \quad (375)$$

この式は全てのベクトル  $s_I$  の先端が  $\Gamma$  上のある  $n-1$  次元部分格子の上に載っていることを意味している。カラビヤウの場合にはトーリック図形はしばしばこの  $n-1$  次元部分格子上の点の集合として表される。

## 5.2 web 図形

トーリック図形は  $\Gamma$  上のベクトルの集合であるから、ファイバーの構造を図示したものとみなすことができる。これに対しベース空間の構造を図示するのに用いられるのが web 図形である。ベース空間の構造もトーリックデータ  $s_I$  によって決まるから web 図形とトーリック図形は互いに密接に関係している。

ここでは、トーリック多様体がカラビヤウである場合に限って考えよう。すなわちトーリックデータはある  $\mu_{\perp} \in \tilde{\mathcal{R}}$  に対して (375) を満足すると仮定する。条件式 (375) から直ちに従う重要な結果として、トー

リックカラピヤウ多様体は必ず非コンパクトであるということがある。実際、ある点  $\mu \in \tilde{\mathcal{R}}$  が  $B$  の内部にあり (369) を満足するとき、任意の正数  $a$  に対して  $\mu + a\mu_{\perp} \in B$  であるから、 $B$  は非コンパクトであり、従って多様体  $M$  も非コンパクトである。

$\tilde{\mathcal{R}}$  中のある点を通り  $\mu_{\perp}$  に平行な直線は必ず  $B$  の境界と一回交わる。従って、ベクトル  $\mu_{\perp}$  を用いた射影を行うことで  $B$  の境界から  $\tilde{\mathcal{R}}_{\parallel} = \tilde{\mathcal{R}}/(\mu_{\perp} \sim 0)$  への一対一の写像を定義することができる。この写像の像は web 図形と呼ばれる。

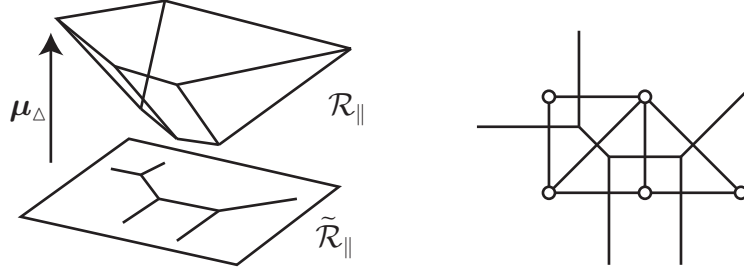


図 20: ベース空間の構造と web 図形

格子  $\tilde{\Gamma}$  の  $SL(n, \mathbb{Z})$  変換を用いて基底を取り替えることにより  $\mu_{\perp} = \tilde{e}_n$  と取ることができる。このような座標を取ったときにベクトル  $v \in \mathcal{R}$  や  $\mu \in \tilde{\mathcal{R}}$  の最後の成分を除いたものを  $v_{\parallel}$  および  $\mu_{\parallel}$  のように書くことにする。上記の射影は  $\mu \in \tilde{\mathcal{R}}$  の成分を捨てる写像

$$\mu \rightarrow \mu_{\parallel} \quad (376)$$

を与える。また、トーリックデータを与えるベクトルの最後の成分は 1 であり、

$$s_I = (s_I^{\parallel}, 1) \quad (377)$$

のように与えられる。写像 (376) のもとで、それぞれの側面がどのように写像されるかを見るために、二つの側面の境界がどのように写像されるかをみてみよう。側面  $I$  と  $J$  の境界は次の式を連立させることで与えられる。

$$s_I \cdot \mu = s_I^{\parallel} \cdot \mu_{\parallel} + \mu_n = k_I, \quad s_J \cdot \mu = s_J^{\parallel} \cdot \mu_{\parallel} + \mu_n = k_J. \quad (378)$$

$\mu_n$  を消去すると、 $\tilde{\mathcal{R}}_{\parallel}$  中で  $n-2$  次元の面を与える次の式が得られる。

$$(s_I^{\parallel} - s_J^{\parallel}) \cdot \mu_{\parallel} = k_I - k_J. \quad (379)$$

すなわち、二つの面の境界はそれらの面に対応したトーリック図形上の二つの点を結ぶ線分  $s_I^{\parallel} - s_J^{\parallel}$  に直交する面  $n-2$  次元面として与えられる。この面のことを「プレーン」と呼ぶことにしよう。

トーリック図形が与えられたとしてもどの面が互いに接しているかはパラメータ  $k_I$  に依存しており意的にはきまらない。面の隣接関係はトーリック図形の単体分割で表すことができ、単体分割において現れる辺に直交する面が web 図形の中に現れる。

Calabi-Yau 3-fold の web-diagram と NS5 プレーン系との関係を明らかにするには、web 図形を  $\tilde{\mathcal{R}}_{\parallel}$  上の図形としてではなく、以下で定義するようにもう少し広い空間の中の図形として捉えるほうが便利である。

前節で述べたように  $\mu_{\perp}$  を用いてフレーバー対称性は次のように定義される。

$$v \cdot \mu_{\perp} = 0. \quad (380)$$

これを満足するベクトルは  $U(1)^{n-1}$  アイソメトリーを生成する。これによってトーリック多様体  $M$  を  $n+1$  次元ベース空間上の  $T^{n-1}$  ファイバー束として表すことができる。このときのベース空間  $\hat{B}$  の構造

は  $B$  上の  $S^1$  ファイバー束となる。このときの  $S^1$  ファイバーは R-対称性に対応している。この  $S^1$  ファイバーは  $B$  の側面において shrink するので  $\hat{B}$  は単連結である。ここで考えている  $T^{n-1}$  ファイバーはフレーバー対称性の軌道であるからそれぞれのファイバー上では調和  $(n, 0)$  形式  $\Omega$  は定数である。従って、次の積分によって  $\hat{B}$  上の閉 1 形式  $\eta$  を定義することができる。

$$d\zeta = \int_{T^{n-1}} \Omega. \quad (381)$$

ここで閉 1 形式を  $d\zeta$  と表したが、これは  $B$  が単連結であり、ある複素座標  $\zeta$  の微分として表すことができるためである。座標  $\zeta$  の定数部分は  $B$  の側面の上で 0 になるようにとることとする。こうして、ベース空間  $\hat{B}$  は

$$\hat{B} = \tilde{\mathcal{R}}_{\parallel} \times C_{\zeta} \quad (382)$$

であることがわかる。(  $C_{\zeta}$  は座標  $\zeta$  によって張られる複素平面である。)  $B$  の境界は  $C_{\rho}$  の原点  $\rho = 0$  に相当し、web 図形もこの部分空間に含まれている。プレーンは  $\mathcal{R}_{\parallel}$  中では codimension 実 1 であるから、 $\hat{B}$  中では codimension 実 3 であり、それぞれのプレーンは  $S^2$  で囲むことができる。

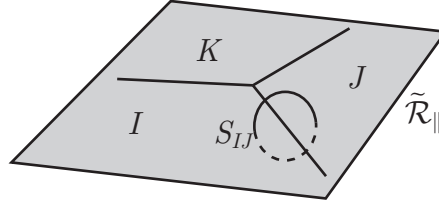


図 21: web 図形の辺を囲む  $S^2$

プレーン上では  $T^n$  のサイクル  $s_I$  と  $s_J$  が同時に shrink する。このことは  $T^{n-1}$  ファイバーのサイクル  $s_I^{\parallel} - s_J^{\parallel}$  が shrink することを意味する。実はこのプレーンは NUT-singularity であり、NUT charge を持っている。このことを見るために、計量を具体的に次のように与えてみよう。

$$ds^2 = ds_B^2 + \sum_{a,b=1}^{n-1} g_{ab}(d\phi^a - A^a)(d\phi^b - A^b) \quad (383)$$

ただし  $ds_B^2$  は  $\hat{B}$  上の計量、 $g_{ab}$  はファイバー  $T^{n-1}$  上の計量であり、 $g_{ab}$  はプレーン上以外では正則である。 $B$  の側面  $I$  においてサイクル  $s_I = (s_I^{\parallel}, 1)$  が shrink するということは  $C_{\rho}$  の原点を囲む無限小のサイクル上でゲージ場を積分したときに

$$\int A^a = s_I^a \quad (384)$$

となることを意味している。プレーンを囲む  $S^2$  上でのゲージ場の強さの積分を行えば、プレーンの NUT チャージが次のように得られる。

$$\int_{S^2} F^a = s_I^a - s_J^a \quad (385)$$

### 5.3 シンプレクティック座標

ここでは具体的に座標  $\mu_a$  を定義し、以前にいくつか与えたベース空間  $B$  の構造などについての説明を与えておこう。

実  $2n$  次元トーリック多様体  $\mathcal{M}$  は  $n$  個の  $U(1)$  アイソメトリーを持ち、ある  $n$  次元多様体  $B$  上の  $T^n$  ファイバー束として与えられる。 $n$  個の  $U(1)$  アイソメトリーに対応したキリングベクトルを

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial \phi^a} \quad (386)$$

とすることで座標  $\phi^a$  を定義する。これだけでは線形変換の自由度が残るが、これを用いて  $a = 1, \dots, n$  全てに対し  $\phi^a$  の周期が  $2\pi$  になるようにしておく。

アイソメトリーがケーラー構造を保つことは、キリングベクトルが次の式を満足することを意味する。

$$0 = \mathcal{L}_{\partial_a} k = (i_a d + di_a)k = di_a k \quad (387)$$

ただし  $i_a$  はベクトル  $\partial_a$  による内部積である。最後の等号にはケーラー構造が閉であることを用いた。(387) よりそれぞれのアイソメトリーに対してモーメントマップと呼ばれるスカラー関数  $\mu_a$  を少なくとも局所的に次のように定義できる。

$$d\mu_a = i_a k. \quad (388)$$

ここでは多様体が単連結であることを仮定し大域的に  $\mu_a$  が定義できるものと仮定する。以上により、多様体  $\mathcal{M}$  上の  $2n$  個の座標  $\{\mu_a, \phi^a\}$  が定義された。

(387) を用いると次の式も示される。

$$d(i_a d\mu_b) = di_a i_b k = \mathcal{L}_a i_b k = [\mathcal{L}_a, i_b]k + i_b \mathcal{L}_a k = 0 \quad (389)$$

最後の変形では一般に成り立つ公式

$$[\mathcal{L}_X, i_Y] = i_{[X, Y]} \quad (390)$$

とアイソメトリーの可換性を用いた。(389) は  $i_a d\mu_b$  が軌道上で定数であることを意味しており、多様体が単連結であることを用いればこれは 0 でなければならない。従ってモーメントマップ  $\mu_a$  は軌道上で一定の値をとる。このことから、 $\mu_a$  を底空間の座標とみなすことができる。

空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  の中で底空間の側面が平面になっていることを示すには、そこであるサイクル  $s_I$  が shrink し、その固定点になっていることを用いる。対応するキリングベクトルはそこでは長さが 0 であり、

$$s_I = s_I^a \partial_a|_{\text{bdr}} = 0 \quad (391)$$

が成り立つ。従って

$$i_{s_I} k|_{\text{bdr}} = d(s_I^a \mu_a)|_{\text{bdr}} = 0 \quad (392)$$

となり、境界面上で  $s_I^a \mu_a$  が定数であることが示される。

(388) はケーラー形式が

$$k = f^{ab}(\mu) d\mu_a \wedge d\mu_b + d\mu_a \wedge d\phi^a \quad (393)$$

と与えられることを意味している。底空間が単連結であることを仮定すると、第 1 項は底空間上の 1 形式を用いて

$$f^{ab}(\mu) d\mu_a \wedge d\mu_b = dA = d(A^a d\mu_a) = -d\mu_a \wedge dA^a \quad (394)$$

と置く事ができる。つまり

$$k = d\mu_a \wedge d(\phi^a - A^a) \quad (395)$$

従って、

$$\phi_{\text{new}}^a = \phi^a - A^a \quad (396)$$

を改めて  $\phi^a$  とすることによりケーラー形式は次のように取ることができる。

$$k = d\mu_a \wedge d\phi^a. \quad (397)$$

複素座標  $\zeta^a$  を

$$d\zeta^a = dy^a + id\phi^a \quad (398)$$

によって定義しよう。\$y^a\$ は \$\phi^a\$ の相棒となるべき実座標であり、\$\mu\_a\$ の関数として与えられるとする。ケーラー形式はケーラーポテンシャルから

$$k = id_h d_a K \quad (399)$$

によって与えられる。ただし \$d\_h\$ は \$\zeta\$ による、\$d\_a\$ は \$\zeta^\*\$ による微分を表す。

$$d_h = d\zeta^a \frac{\partial}{\partial \zeta^a} = \frac{1}{2} d\zeta^a \left( \frac{\partial}{\partial y^a} - i \frac{\partial}{\partial \mu^a} \right), \quad d_a = d\zeta^{*a} \frac{\partial}{\partial \zeta^{*a}} = \frac{1}{2} d\zeta^{*a} \left( \frac{\partial}{\partial y^a} + i \frac{\partial}{\partial \mu^a} \right). \quad (400)$$

より、

$$k = \frac{1}{2} d \left( \frac{\partial K}{\partial y^a} \right) \wedge d\phi^a \quad (401)$$

が得られるから、\$\mu\_a\$ と \$y^a\$ の関係を次のように得ることができる。

$$\mu_a = \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial y^a}. \quad (402)$$

(402) は一種のルジャンドル変換である。この逆変換は

$$G = \mu_a y^a - \frac{1}{2} K \quad (403)$$

を用いて次のように与えられる。

$$y^a = \frac{\partial G}{\partial \mu_a} \quad (404)$$

関数 \$G(\mu\_a)\$ はシンプレクティックポテンシャルと呼ばれ、

ケーラーポテンシャルによって決まるエルミート計量はケーラーポテンシャル、シンプレクティックポテンシャルを用いて以下のように書くことができる。

$$ds^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial y^a \partial y^b} (dy^a dy^b + d\phi^a d\phi^b) = \frac{\partial^2 G}{\partial \mu_a \partial \mu_b} d\mu_a d\mu_b + \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \mu_a \partial \mu_b} \right)^{-1} d\phi^a d\phi^b \quad (405)$$

## 5.4 トーリック多様体の例

これまでに一般のトーリック多様体について見てきたことをいくつかの簡単な例についてもう一度確認しておこう。

始めは最も簡単なトーリック多様体である \$\mathbb{C}^3\$ を考えてみよう。複素座標を \$(z^1, z^2, z^3)\$ とし、これらを回転させる 3 つの \$U(1)\$ 対称性を用いてトーリック構造を定義することにする。\$z^a = e^{y^a + i\phi^a}\$ によって実座標 \$y^a\$ と \$\phi^a\$ を定義する。また \$r\_a = e^{y^a} = |z^a|\$ も定義しておく。

まずはトーリックデータを決定しよう。そのためには、底空間 \$B\$ の側面上で shrink するようなサイクルを見つける必要がある。この例では \$B\$ は座標 \$r\_a\$ によって張られる \$\mathbb{R}\_+^3\$ であり、その 3 つの側面はそれぞれの複素平面の原点に対応する。従ってそれぞれの複素平面上で原点を囲むサイクルが shrinking cycle となる。対応するキリングベクトルはそれぞれ

$$s_1 = \partial_{\phi^1}, \quad s_2 = \partial_{\phi^2}, \quad s_3 = \partial_{\phi^3}. \quad (406)$$

と与えることができる。もっと複雑な \$2n\$ 次元トーリック多様体では固定点集合の余次元が複素 1 次元であるようなアイソメトリーを探索せよ。余次元が 1 であるような固定点集合は \$B\$ の側面を与え、キリングベクトルに対応するサイクルはその側面において shrink する。

(406) に対応する 3 つのサイクルは 3 次元格子の基底をなしておりトーリック図形はそれら 3 本の基底の集合として与えられる。\$\mathbb{C}^3\$ が Calabi-Yau であり、これらのベクトルの先端が平面上に乗っているので平面上の 3 つの点としてトーリック図形を描くこともできる。

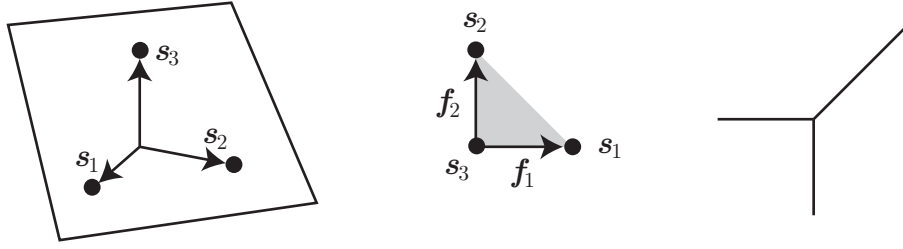


図 22:  $\mathbb{C}^3$  のトーリック図形と web 図形

$U(1)^3$  アイソメトリーのうちフレーバー対称性  $U(1)^2$  を決めるために調和  $(3, 0)$  形式  $\Omega$  に対する作用を見てみよう。 $\mathbb{C}^3$  上の  $\Omega$  は次のように与えられる。

$$\Omega = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = z^1 z^2 z^3 (dy^1 + id\phi^1) \wedge (dy^2 + id\phi^2) \wedge (dy^3 + id\phi^3). \quad (407)$$

因子  $z^1 z^2 z^3$  は  $e^{i(\phi^1 + \phi^2 + \phi^3)}$  を含むから (406) の 3 つのアイソメトリーそれぞれは  $\Omega$  を回転させ、フレーバー対称性ではない。フレーバー対称性を抜き出すために次の座標変換を行う。

$$\phi^1 = \varphi^1, \quad \phi^2 = \varphi^2, \quad \phi^3 = \varphi^3 - \varphi^1 - \varphi^2 \quad (408)$$

すると  $z^1 z^2 z^3 \propto e^{i\varphi^3}$  であるから、 $\Omega$  を回転させないフレーバー対称性は  $\varphi^1$  と  $\varphi^2$  のシフトで与えられる。対応するキリングベクトルは

$$f_1 := \partial_{\varphi^1} = \partial_{\phi^1} - \partial_{\phi^3} = s_1 - s_3, \quad f_2 := \partial_{\varphi^2} = \partial_{\phi^2} - \partial_{\phi^3} = s_2 - s_3. \quad (409)$$

これらは 2 次元トーリック図形が乗る平面上のベクトルである。

$\Omega$  を  $\varphi^1$  と  $\varphi^2$  で張られるトーラス上で積分すると次の 1 形式が得られる。

$$d\zeta = \int_{\mathbb{T}^2} \Omega = -(2\pi)^2 d(z_1 z_2 z_3) \quad (410)$$

従って座標  $\zeta$  は

$$\zeta = -(2\pi)^2 z_1 z_2 z_3 \quad (411)$$

と与えられる。この座標は 3 つのアイソメトリーに対してチャージ 1 を持ち、ベクトル  $\mu_{\perp}$  に対応している。

$\mathbb{C}^3$  上に平坦な計量  $ds^2 = (dz^a)^* dz^a$  が導入されているとすれば、対応するケーラーポテンシャルは

$$K = \frac{1}{2}(|z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2) = \frac{1}{2}(e^{2y^1} + e^{2y^2} + e^{2y^3}) \quad (412)$$

モーメントマップは (402) を用いて

$$\mu_a = \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial y^a} = \frac{1}{2} e^{2y^a}. \quad (413)$$

シンプレクティックポテンシャル (403) は次のように与えられる。

$$G = \sum_{a=1}^3 \mu_a y^a - \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 (\mu_a \log(2\mu_a) - \mu_a) \quad (414)$$

さらに、シンプレクティック座標を用いて計量を表すと

$$ds^2 = \sum_{a=1}^3 \left( \frac{1}{2\mu_a} (d\mu_a)^2 + 2\mu_a (d\phi^a)^2 \right). \quad (415)$$



次の例として conifold を考えよう。 $C^n$  以外の複素  $n$  次元トーリック多様体は、より次元の高い  $C^{n'}$  から出発し、余計な自由度を取り除くという方法で定義するのが普通である。余計な自由度を取り除く方法には、代数的な拘束条件を用いるものとゲージ対称性を用いるものの二つの方法がある。前者を代数的構成法、後者を gauged linear sigma model (GLSM) 構成法と呼ぶ。これらはそれぞれ超対称ゲージ理論において F-term 条件と D-term 条件に対応し、一般のゲージ理論のモジュライ空間を求める際にはこの両方が組み合わされて現れる。

代数的構成法で conifold を定義するには、 $C^4$  の座標  $z_i$  に対して拘束条件

$$z_1 z_2 = z_3 z_4 \quad (416)$$

を置く。

conifold は複素 3 次元であるから、対応する  $\mathcal{R}$  と  $\tilde{\mathcal{R}}$  はどちらも実 3 次元の空間である。これらの空間にトーリック図形やベース空間が描かれるわけであるが、それらを定義する準備としてまず  $C^4$  に対する同様な空間を定義するのがよい。すなわち、条件式 (416) はひとまず忘れて全ての変数  $z_i$  が独立であるとしたとき、 $\phi_i = \arg z_i$  によって張られる実 4 次元空間を  $\mathcal{R}'$ 、その双対空間を  $\tilde{\mathcal{R}}'$  とする。全ての  $z_i$  が 0 ではないとき、方程式 (416) は  $\phi_i$  に対して  $\phi_1 + \phi_2 = \phi_3 + \phi_4$  という条件を課す。すなわち、 $\vec{\phi}$  は次のベクトルに直交する。

$$\vec{F} = d\phi^1 + d\phi^2 - d\phi^3 - d\phi^4 \in \tilde{\mathcal{R}}' \quad (417)$$

従って、conifold に対応した実 3 次元空間  $\mathcal{R}$  は  $\mathcal{R}'$  の部分線形空間として次のように与えることができる。

$$\mathcal{R} = \{\vec{v} \in \mathcal{R}' \mid \vec{v} \cdot \vec{F} = 0\} \quad (418)$$

トーリック図形を描くために、固定点集合の余次元が複素 1 次元であるようなアイソメトリーを探そう。そのようなアイソメトリーは (416) の左辺の  $z_1$  と  $z_2$  のうちの片方と右辺の  $z_3$  と  $z_4$  のうちの片方を同時に回すようなものである。このとき回転しない二つの座標で張られる 2 次元空間が固定面になる。これらのアイソメトリーは次のキリングベクトルで生成される。

$$s_1 = \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_3}, \quad s_2 = \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_4}, \quad s_3 = \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_3}, \quad s_4 = \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_4} \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \quad (419)$$

これらはどれも (417) の  $F$  に直交しており、3 次元空間  $\mathcal{R}$  に含まれるから線形独立ではなく、 $\vec{q}_1 + \vec{q}_4 = \vec{q}_2 + \vec{q}_3$  という従属関係を満足する。また、

$$\mu_{\perp} = d\phi^1 + d\phi^2 \in \tilde{\mathcal{R}} \quad (420)$$

を定義すればこれらのベクトルの先端は平面  $\vec{v} \cdot \mu_{\perp} = 1$  上に載る。従って、トーリック図形は 2 次元格子上の 4 つの点として表すことができる。具体的には条件 (416) を考慮して角度変数を 3 つの独立な変数  $\varphi_a$  で次のように書き換える。

$$\phi_1 = -\varphi_2 + \varphi_3, \quad \phi_2 = \varphi_2, \quad \phi_3 = -\varphi_1 + \varphi_3, \quad \phi_4 = \varphi_1. \quad (421)$$

すると、空間  $\mathcal{R}$  の 3 つの基底ベクトルを次のように取ることができる。

$$e_1 = \partial_{\varphi_1} = -\partial_{\phi_3} + \partial_{\phi_4}, \quad e_2 = \partial_{\varphi_2} = -\partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2}, \quad e_3 = \partial_{\varphi_3} = \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_3} \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \quad (422)$$

すると、上記のキリングベクトルはこれらの線形結合として次のように与えられる。

$$s_1 = e_3, \quad s_2 = e_3 + e_1, \quad s_3 = e_3 + e_2, \quad s_4 = e_3 + e_1 + e_2 \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}' \quad (423)$$

これらの 4 つのベクトルを用いてトーリック図形を描くと図 23 のようになる。

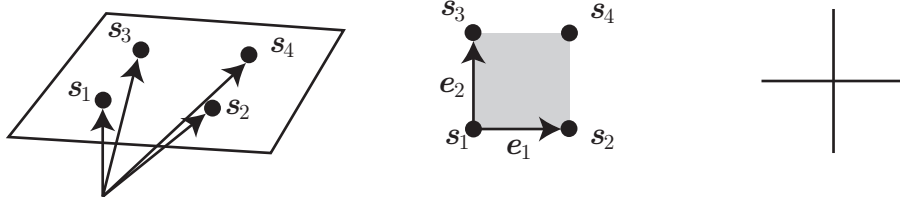


図 23: コニフォールドのトーリック図形と web 図形

調和  $(3, 0)$  形式は次のように与えることができる。

$$\Omega = \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{z_3} \quad (424)$$

これは位相因子として  $e^{i(\phi_1 + \phi_2)} = e^{i\phi_3}$  を含む。従ってこの因子を回転させない  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  のシフト、すなわち  $e_1$  と  $e_2$  がフレーバー対称性である。 $\Omega$  を  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  が張る  $\mathbb{T}^2$  上で積分すると、

$$d\zeta = \int_{\mathbb{T}^2} \Omega = -(2\pi)^2 d(z_1 z_2) \quad (425)$$

が得られる。従って  $\zeta$  座標は

$$\zeta = -(2\pi)^2 z_1 z_2 \quad (426)$$

となる。

GLSM 構成法を用いて conifold を定義する場合には、4 つの複素座標  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) で張られる空間  $\mathbb{C}^4$  から出発する。先ほどと同様に  $\phi_i = \arg \rho_i$  のなす空間を  $\mathcal{R}'$ 、 $\mathbb{C}^4$  の 4 つのアイソメトリーに対応するモーメントマップで張られる空間を  $\tilde{\mathcal{R}}'$  とする。 $\tilde{\mathcal{R}}'$  は  $\mathcal{R}'$  の双対空間とみなすことができる。今度は余計な 1 次元部分を取り除くために次のゲージ対称性  $U(1)_C$  を導入する。

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \rightarrow (e^{i\alpha} \rho_1, e^{i\alpha} \rho_2, e^{-i\alpha} \rho_3, e^{-i\alpha} \rho_4) \quad (427)$$

この場合、 $\mathcal{R}$  は  $\mathcal{R}'$  を上記のゲージ変換の生成子

$$\vec{g} = \partial_{\phi_1} + \partial_{\phi_2} - \partial_{\phi_3} - \partial_{\phi_4} \in \mathcal{R}' \quad (428)$$

によって生成される線形部分空間で割ったものである。またモーメントマップに対しては  $D$ -term 条件

$$\vec{g} \cdot \vec{\mu} = 0 \quad (429)$$

が課される。これにより  $\tilde{\mathcal{R}}$  が次のように定義される。

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\vec{\mu} \in \tilde{\mathcal{R}}' \mid \vec{g} \cdot \vec{\mu} = 0\} \quad (430)$$

トーリック図形を与えるために、 $\mathcal{M}$  のアイソメトリーのうち余次元が複素 1 次元であるものを探す必要がある。そのようなものは  $\rho_i$  で張られる  $\mathbb{C}^4$  のアイソメトリーのうちの余次元 1 のものに対応している。これは  $\rho_i$  のうちのどれか一つをまわすアイソメトリーであり、対応するキリングベクトルは  $\mathcal{R}'$  上の基底ベクトル

$$\mathbf{s}_1 = \partial_{\phi_1}, \quad \mathbf{s}_2 = \partial_{\phi_2}, \quad \mathbf{s}_3 = \partial_{\phi_3}, \quad \mathbf{s}_4 = \partial_{\phi_4} \in \mathcal{R}' \quad (431)$$

である。(逆は必ずしも成り立たない。一般に、GLSM 構成法において得られるトーリック多様体において余次元 1 の固定点集合を与えるアイソメトリーは全てどれか一つの場合  $\rho_i$  の回転として与えることができるが、ある一つの場合  $\rho_i$  の回転に対する固定点集合  $\rho_i = 0$  は  $\mathbb{C}^{n'}$  の中では余次元 1 であるが、ゲージ

対称性で割った後には余次元は 1 より大きいこともありえる。)  $\mathcal{R}'$  から  $\mathcal{R}$  への自然な写像を用いて (431) に対応する  $\mathcal{R}$  上の 4 本のベクトルを与えることができる。それらのベクトルの成分は、空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  に属する 3 本の独立なベクトルとの積として与えることができる。ここでは、第 3 成分が常に 1 になるように次の 3 本のベクトルを選ぶ。

$$\vec{f}_1 = d\phi_2 + d\phi_4, \quad \vec{f}_2 = d\phi_3 + d\phi_4, \quad \vec{f}_3 = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 + d\phi_4 \in \tilde{\mathcal{R}} \subset \tilde{\mathcal{R}}'. \quad (432)$$

すると、これらとの内積を取ることによって (431) の成分が次のように与えられる。

$$s_1 = (0, 0, 1), \quad s_2 = (1, 0, 1), \quad s_3 = (0, 1, 1), \quad s_4 = (1, 1, 1) \in \mathcal{R} \quad (433)$$

これらのベクトルは先ほどと同じトーリック図形 (図 23) を与える。

GLSM 構成法における空間  $\tilde{\mathcal{R}}$  および  $\tilde{\mathcal{R}}'$  の座標について、モーメントマップという解釈とは異なる、もう一つの解釈を与えておこう。 $\mathbb{C}^4$  上で正則な  $\rho_i$  の単項式

$$\mathcal{O}[n_i] = \prod_i \rho_i^{n_i} \quad (434)$$

を考え、べきに現れる整数  $n_i$  を  $\tilde{\mathcal{R}}'$  の座標とみなすことができる。 $n_i$  は (434) が正則であるという条件からモーメントマップと同様に  $n_i \geq 0$  という条件を満足する。さらにゲージ変換 (427) のもとでオペレータ  $\mathcal{O}[n_i]$  が不変であるということを要求すれば

$$\vec{g} \cdot \vec{n} = 0 \quad (435)$$

という条件が課される。これはモーメントマップに課される  $D$ -term 条件 (429) と対応している。 $\tilde{\mathcal{R}}$  上のベース空間、正確にはその中の格子点は次の 4 つのゲージ不変単項式  $z_i$  によって生成することができる。

$$z_1 = \rho_1 \rho_3, \quad z_2 = \rho_2 \rho_4, \quad z_3 = \rho_1 \rho_4, \quad z_4 = \rho_2 \rho_3. \quad (436)$$

任意のゲージ不変単項式はこれらを掛け合わせるによってえられる。また、これら 3 つは独立ではないが、その関係式は定義多項式 (416) に他ならない。

## 5.5 正則関数とチャージ

§5.1 では、トーリック多様体上の正則関数のチャージを  $\tilde{\mathcal{R}}$  上のベクトルとして表すことができることを見た。このことを用いると、多様体上の全ての正則関数 (チャージが定義できるものだけを考える。) に対してのチャージベクトル  $q \in \tilde{\mathcal{R}}$  が全て与えられると、簡単にトーリックデータ  $s_I$  を得ることができる。

チャージと  $s_I$  についての関係を見るために、 $B$  側面  $I$  の近傍に注目しよう。そこでは多様体は局所的に  $\mathbb{C}^n$  であり、その複素座標の一つとして  $s_I$  が (370) のように与えられる座標  $z_I$  を取ることができる。それ以外の  $n-1$  個の座標を  $y_1, \dots, y_{n-1}$  とする。ある関数  $f$  が正則であれば、 $f$  は  $z_I$  を負のべきで含むことはできない。すなわち、 $f$  の  $s_I$  のもとでのチャージは必ず非負である。

もし関数  $f$  が多様体全体で定義された正則関数であれば、全ての側面  $I$  に対して同様の議論ができる。従って、 $f$  のチャージベクトル  $q$  は次の条件を満足する。

$$s_I \cdot q \geq 0 \quad \forall I. \quad (437)$$

トーリック多様体の場合、この条件を満足する  $q \in \tilde{\Gamma}$  に対して常に対応する正則関数が存在する。つまり、チャージベクトルの集合は (437) によって定義される  $\tilde{\Gamma}$  の部分集合であり、(369) によって与えられるベース空間  $B$  の構造に類似している。従って、もし全ての正則関数を与えることができれば対応するチャージベクトルの集合を (437) によって与えるベクトルの組としてトーリックデータ  $\{s_I\}$  を得ることができる。

多様体上の関数ではなく、より一般の線束を考えれば、パッチの取替えに伴う変換により不等式 (437) の右辺が 0 からずれる事がありえるが、ここでは考えないことにする。

幾つかの具体例で上述のチャージベクトルの集合とベース空間  $B$  の構造の間の類似性を見ておこう。

まず最初は複素 2 次元の最も簡単な空間  $\mathbb{C}^2$  を考えてみる。この上の複素座標を  $(x, y)$  としてみよう。単項式の一般形は

$$\mathcal{O} = x^m y^n, \quad m, n \geq 0 \quad (438)$$

である。これらの単項式を次数  $(m, n)$  を座標とする格子点に対応させることができる。これらの格子点は  $\mathbb{Z}^2$  の第一象限  $\mathbb{Z}_+^2$  に分布している。一方、 $\mathbb{C}^2$  をトーリック多様体として扱う場合には  $x = r_1 e^{i\phi_1}$ ,  $y = r_2 e^{i\phi_2}$  のようにベース座標  $r_a$  とファイバー座標  $\phi_a$  を定義する。これにより、 $\mathbb{C}^2$  を  $\mathbb{R}_+^2$  上の  $\mathbb{T}^2$  ファイバー束として与えることができる。ここで、格子点の集合  $\mathbb{Z}_+^2$  とベース空間  $\mathbb{R}_+^2$  が似た構造をしていることに気づく。実はこのような関係は一般の場合に成り立つ。

他の例も見てみよう。今度は複素 1 次元のトーリック多様体を考えてみる。まずは複素平面  $\mathbb{C}$  について考えてみると、この上の座標を  $z$  とすれば、正則単項式は  $z^n$  であり、 $n$  は非負整数を取る。従って単項式がなす格子点は  $\mathbb{Z}_+$  である。これは  $z = r e^{i\phi}$  のように座標を定義したときにベース空間が座標  $r$  で張られる  $\mathbb{R}_+$  になることに対応している。

次に、リーマン球面、すなわち複素平面に無限遠点を付け加えることで定義されるコンパクト空間上の正則関数を考えてみよう。コンパクト空間上の連続関数は必ず有界であり、そのような関数は定数 ( $\propto z^0$ ) しかない。従って、単項式の格子点はただ一つだけである。これは、球面が有限区間上の  $S^1$  ファイバー束として表されることに対応している。

最後に、複素平面から原点を除いた  $\mathbb{C}^*$  について見てみよう。この場合、 $z^n$  は  $n$  が任意の整数の場合に正則関数となる。すなわち単項式は  $\mathbb{Z}$  全体に対応する。このことは、 $\mathbb{C}^*$  が位相的にはシリンダーであり、 $\mathbb{R}$  上の  $S^1$  ファイバー束として与えられることに対応している。

以上のように、トーリック多様体のベース空間と正則単項式の集合は、片方が連続的、片方が離散的であるという点を除いて同じ構造をしているように見える。

一般のトーリック多様体について、与えられた正則関数  $f$  をベース空間上の点に対応させるには、多様体上で定義された次の「波動関数」を考える。

$$\psi = f e^{-K/2} \quad (439)$$

ただし  $K$  は多様体上のエルミート計量を決めるケーラーポテンシャルである。 $e^{-K/2}$  という因子は正則単項式  $f$  に比べて十分早くダンプするから、この波動関数が与える確率分布  $|\psi|^2$  は多様体上のどこかで最大値を持つはずである。この点の位置を求めるために、3 つの複素座標 (464) を  $z_a$  と表わそう。一般の演算子は (465) によって与えられる。ここでは  $z_a$  を用いて

$$\mathcal{O} = \prod_{a=1}^3 z_a^{n_a} \quad (440)$$

のように書く。さらに  $z_a = y_a + i\phi_a$  によってベース空間の座標  $y_a$  とファイバー座標  $\phi_a$  を定義すれば

$$|\psi|^2 = e^2 \sum_a n_a y_a - K \quad (441)$$

となる。この極大点は (402) を用いれば

$$\mu_a = n_a \quad (442)$$

によって与えられることがわかる。すなわち、演算子  $f$  に対応する格子点は多様体上で  $|\psi|^2$  が最大となる点である。

## 6 ブレーンタイリング

ここでは  $T^2$  でコンパクト化された IIB 型 NS5-brane 系と、 $T^2$  の二つの方向に対して T-dual 変換を行うことによって得られる IIB 型 Calabi-Yau 多様体の関係について見る。ここで見る NS5-brane 系はしばしば brane tiling と呼ばれ、 $\mathcal{N} = 1$  超共形ゲージ理論を構成する強力な手段である。

Brane tiling はそれまでに知られていたブレーン系の一般化として [22] [23] [24] などにおいて提案されていたもので、brane tiling と呼ばれる「図形」からゲージ理論やそのモジュライ空間の情報を読み取るルールが与えられていた。それが実際にどのようなブレーン系と対応しているかということはその後 [25] において説明された。以下ではこのブレーン系と Calabi-Yau の間の T-双対性に注目し、Calabi-Yau からどのような形状のブレーン系が得られるのか、またその上ではどのようなゲージ理論が得られるのかという順序で解説する。これとは逆に、ゲージ理論が与えられたときに、その moduli space としてどのような Calabi-Yau が得られるのかという問題に対しても brane tiling は有用である。実際、T-duality でブレーン系と関係する Calabi-Yau 空間が moduli space として得られるということが [26] において示されているが、ここでは触れないことにする。Brane tiling についてのレビューとしては [27], [28] などがある。

この節では前節とは逆に Calabi-Yau 多様体から出発することにしよう。ここで考える Calabi-Yau 多様体は、トーリックカラビヤウと呼ばれるもので、 $U(1)^3$  の対称性を持つようなものである。

### 6.1 NS5-系との双対性

§5.2 では Calabi-Yau  $n$ -fold は  $\mathbf{R}^{n+1}$  上の  $\mathbf{T}^{n-1}$  ファイバー則として表され、ベース空間上のファイバーが singular になる点の集合はトーリック図形を用いて書くことのできる codimension 3 のブレーン系として表されることをみた。ここでは特に  $n = 3$  の場合にこの系が T-duality 変換によって NS5-brane 系に移ることを見る。

$n = 3$  である場合には、 $\widehat{B}$  は 4 次元であり、web 図形はその中の平面上に描かれた 1-brane、すなわち string 系として表される。(実際の時空の構造は  $CY \times \mathbf{R}^4$  であるが、ここでは  $\mathbf{R}^4$  方向の広がりは無視している。) この string 上ではファイバー  $\mathbf{T}^2$  の一つのサイクルがつぶれており、どのサイクルがつぶれるかは string の向きによって決まる。

Buscher 則を用いて T-duality の議論をするためにはファイバー束の位相的構造を計量の情報として書き換える必要がある。ここでは (383) に与えられている計量を用いることができる。

$$ds^2 = ds_4^2 + \sum_{k,l=1,2} g_{kl}(d\phi^k + V^k)(d\phi^l + V^l) \quad (443)$$

ただし  $ds_4^2$  は底空間  $\widehat{B}$  上の計量であり、 $g_{kl}$  は  $\mathbf{T}^2$  ファイバーの計量である。 $V^k$  はファイバーのねじれを表す  $\widehat{B}$  上の  $U(1)$  ゲージ場である。(385) にあるように、ゲージ場  $V^k$  の場の強さ  $F^k = dV^k$  は次の条件を満足する必要がある。

$$\oint_{S_{IJ}} F^k s_I^k - s_J^k = s_{IJ}^k. \quad (444)$$

すなわち、web 図形を構成する string は磁荷  $s_{IJ}^k$  を持つ。

さてここで、 $\mathbf{T}^2$  の内部空間の二つの方向に対して T-duality 変換を行ってみよう。すると、上記二つのゲージ場は NS-NS 3-form ゲージ場と解釈される。すなわち、Buscher 則を用いることによって T-dual 変換を行った後の 3-form フラックスが

$$H_3 = F^1 \wedge dx^5 + F^2 \wedge dx^7. \quad (445)$$

と与えられる。ただしここで  $\phi^1$  と  $\phi^2$  に双対なサイクルを  $x^5$  および  $x^7$  とした。

web-diagram 上の線の電荷を与える (444) は次のように書き換えられる。

$$\oint_{S_{IJ} \times S^1(x^5)} H_3 = s_{IJ}^1, \quad \oint_{S_{IJ} \times S^1(x^7)} H_3 = s_{IJ}^2. \quad (446)$$

$S^1(x^i)$  は  $x^i$  方向の  $S^1$  のサイクルを表している。(446) は T-dual 変換の結果、 $H_3$  と磁氣的に結合したオブジェクト、すなわち NS5-brane が現れたことを意味している。これらの NS5-brane は  $x^5$ - $x^7$  で張られる内部空間  $T^2$  のあるサイクルに巻きついている。このサイクルを (446) から読み取るためにストークスの定理によってカレント  $J = dH_3$  を用いた次の式に書き換えよう。

$$\oint_{D_{IJ} \times S^1(x^5)} J = s_{IJ}^1, \quad \oint_{D_{IJ} \times S^1(x^7)} J = s_{IJ}^2. \quad (447)$$

ただし、 $D_{IJ}$  は  $S_{IJ}$  の内部を埋めることで定義される  $\hat{B}$  上の 3 次元ディスクである。この式は内部空間内で  $x^5$  方向のサイクルと NS5-brane の交差数が  $s_{IJ}^1$ 、 $x^7$  方向のサイクルとの交差数が  $s_{IJ}^2$  であることを意味している。言い換えれば、NS5-brane の巻きつき数が  $(s_{IJ}^2, -s_{IJ}^1)$  であることを意味している。このサイクルの向きは web 図形上の対応する辺の向きに一致する。

ここで、背景の  $\mathbf{R}^4 \times T^2$  は平坦であると仮定し、その時空上で NS5-brane が張っている二次元面  $\Sigma$  の形状を決定することを考えてみよう。Buscher 則はコンパクト化をした内部空間方向への依存性を無視している。このために、Buscher 側を用いて得られたフラックス  $H_3$  や NS5-brane の形状はコンパクト化の半径が 0 とみなせるような極限でのみ正しい。従って、実際の NS5-brane の構造はコンパクト化の半径が 0 になる極限で web-diagram の構造を再現し、しかもブレーンの運動方程式（ここではこれはその worldvolume が極小曲面になることを意味する）を満足するようなものとして与えられる。

Web-diagram 上のそれぞれの辺は NS5-brane のシリンダーを表しているから、 $\Sigma$  全体としてはシリンダーをいくつもつないだ枝分かれのある面を表している。面白いことに、実はそのような面を一つの代数方程式で表すことができる。そのために、基底空間  $B$  が次の不等式によって定義されていたことを思い起こそう。

$$s_I \cdot \mu \geq k_I, \quad \forall I \quad (448)$$

従って、境界面  $\partial B$  を与える式は次のように書くことができる。

$$\mu_3 = \max(k_I - s_I^1 \mu_1 - s_I^2 \mu_2) \quad (449)$$

これは、近似的に次のように書くことができる。

$$e^{\mu_3} = \left| \sum_I e^{k_I + i b_I} x^{-s_I^1} y^{-s_I^2} \right| \quad (450)$$

ただし、 $x$  と  $y$  は次のように定義される複素座標である。

$$x = e^{\mu_1 + i \tilde{\phi}_1}, \quad y = e^{\mu_2 + i \tilde{\phi}_2} \quad (451)$$

$b_I$  はケーラーパラメータ  $k_I$  に対する虚部とみなすことができるパラメータである。総和の中の一つの項の絶対値だけが非常に大きい場合には (449) を再現する。Web-diagram 上の線は (449) のグラフの稜線と与えられるが、そのような点では (450) の中の二つの項がほぼ同じ絶対値になり、位相によってはそれらは相殺する。従って、web-diagram は近似的に次のように与えられる曲面の  $\hat{B}$  への射影として与えることができる。

$$P(x, y) \equiv \sum_I c_I x^{-s_I^1} y^{-s_I^2} = 0, \quad c_I = e^{k_I + i b_I} \quad (452)$$

ただし和はトーリック図形上の点全てに対して取る。ここで定義した多項式  $P(x, y)$  はニュートン多項式と呼ばれる。トーリック図形上のそれぞれの点に対して与えられる係数  $c_I$  は、(448) の中のケーラーパラ

メータ  $k_I$  に対応する自由度を与えている。ただし、 $c_I$  は複素数であるので、正確には複素化されたケーラーパラメータに対応している。

曲面 (452) はコンパクト化の半径が 0 になるような極限においてはその射影が web 図形を与える。しかしトーラスのサイズが有限である場合には滑らかな曲面を与えるから、その射影は web-diagram ではなく、その周りに膨らんだ領域となる。この領域はその形状からアメーバと呼ばれる。(図 24(b))

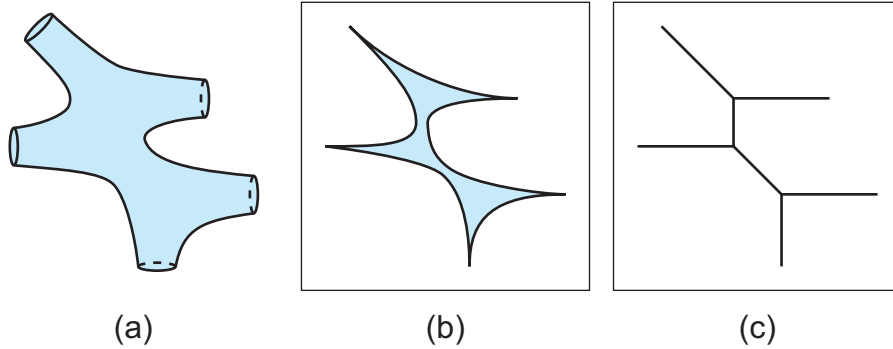


図 24:  $(p, q)$ -web と amoeba

## 6.2 bipartite グラフ

前節では toric Calabi-Yau の T-dual 変換として得られる NS5-brane の形状を  $\mathbb{C}_*^2$  上の正則曲面として与えた。これは、プローブ近似の範囲では厳密な NS5-brane の形状を与える。しかしこのような表現では、必ずしもその位相的構造、特に  $T^2$  のファイバーにどのように巻きついているかを想像するのが簡単ではなく、D-brane を導入したときにどのようなゲージ群が現れるかという事も読み取るのが難しい。

そこで、NS5-brane の厳密な形状にはこだわらず、その位相的な構造のみに注目し、その  $T^2$  上での構造をうまく図示する方法をここでは与える。AdS/CFT との対応関係を念頭においているので、ここでは特に Calabi-Yau が cone になっている場合、すなわちすべてのケーラーパラメータが  $k_I = 0$  である場合を考えることにする。この場合、web 図形は  $\mu_1$ - $\mu_2$  平面の原点から放射状に伸びる半直線の集合として表される。これら半直線のそれぞれの向きは  $(s_{IJ}^2, -s_{IJ}^1)$  のように与えられたが、それらを改めて  $l_k = (m_k, n_k)$  と書くことにする。 $m_k$  と  $n_k$  は整数である。T-dual 変換の結果として、それぞれの外線は NS5-brane とみなすことができる。ベクトル  $l_k$  は 46 平面上での NS5-brane の向きを表すと同時に、NS5-brane が巻きつく  $T^2$  ファイバー上のサイクルを与えている。

これらの NS5-brane は、46-平面の中心から遠く離れたところでは 46 平面の直線と  $T^2$  上のまっすぐなサイクルの直積として表される平坦なシリンダーであるが、中心部へ近づくにつれてだんだん変形し、中心部では全てのシリンダーが滑らかにつながって一つの正則曲面をなしている。しかしここでは厳密な形にはこだわらず、それぞれの外線に対応したシリンダーが平坦なシリンダーのまま中心部まで伸びていると考えよう。もちろんその場合、それぞれのシリンダーの端はうまくつながらないので、適当な穴埋めを行う必要がある。

もっとも簡単な例として、 $\mathbb{C}^3$  を考えよう。 $\mathbb{C}^3$  の  $(p, q)$ -web は三本の線からなる junction である。3 本の外線の向きを次のように取ることにする。

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, -1). \quad (453)$$

内部空間で NS5-brane が巻きつくサイクルもこれらの二成分ベクトルによって与えられ、その様子は図 25(a) のようになる。3 つのサイクルは NS5-brane の境界を表している。NS5-brane の向きはサイクル上

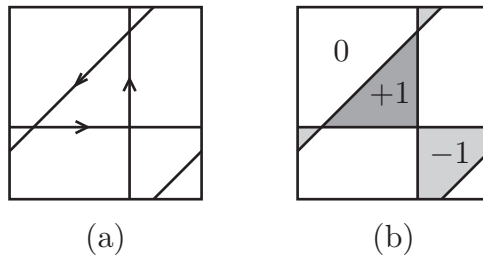


図 25: サイクルと NS5-brane charge

の矢印によって表されている。NS5-brane をつなぎ合わせて一枚の面にするためには、これらの境界にうまく NS5-brane を貼り付けて穴を塞ぐ必要がある。そのためには図 25(b) のように二つの三角形を用いることができる。図 25(b) には 3 つの面に対して 0、1、 $-1$  という整数が与えられているが、これらはそれぞれの面の NS5-brane charge を表している。すなわち、0 が割り当てられた面には NS5-brane がなく、 $+1$  と  $-1$  が割り当てられた面には向きが互いに逆の NS5-brane を表す。ここでは、面を囲むサイクルの向きが反時計回りのときに貼り付けられる NS5-brane の charge を  $+1$ 、時計回りのときに貼り付けられる NS5-brane の charge を  $-1$  と約束しておく。

図 25 の (a) と (b) は互いに微分、積分の関係にある。つまり、(b) をトーラス上の関数とみなしたとき、その微分はサイクル上で値を持つ  $\delta$ -関数（正確には 1-形式）を与える。また、(a) においてある基準点を定め、トーラス上の各点まで移動する際に何本のサイクルを横切るかを、サイクルの向きまで考慮して勘定したもの（積分したもの）が (b) の関数を与える。

トーラス上にサイクルが任意に与えられたとき、一般にはその積分は存在しない。例えば、基準点から出発してトーラスを一周してもとの基準点へ戻ったとき、向きまで考慮して数えた横切ったサイクルの数が 0 でない場合にはそれぞれの面のチャージを一意的に決めることができず、積分が定義できない。積分が定義できるための条件はサイクルの巻きつき数  $(m_k, n_k)$  の和が 0 になることである。 $(m_k, n_k)$  はトーリック図形上の点を用いて

$$(m_k, n_k) = (s_{I+1}^2, -s_{I+1}^1) - (s_I^2, -s_I^1) \quad (454)$$

と与えられることから、web 図形においてはこの積分可能条件は満足されている。

3 本以上のサイクルが一点で交差することがないと仮定し、上で述べた意味でそのサイクルの積分として与えられる関数がトーラス上で値 0、 $+1$ 、 $-1$  の値をとると仮定する。この面の構造を表すために、しばしば NS5-brane charge  $+1$  を持つ面を黒い点、NS5-brane charge  $-1$  を持つ面を白い点で表した図形を用いる。もし charge  $\pm 1$  を持つ二つの面が互いに頂点で接するときには対応する頂点を線で結ぶことにする。(図 26) このようなグラフを描くと、辺で結ばれた頂点の色は常に異なることがわかる。すなわちこのグ

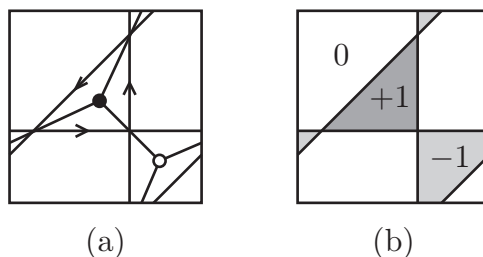


図 26: bipartite graph

ラフは bipartite graph になる。



与えられたサイクルの積分として  $0, \pm 1$  以外のチャージが現れたときにはこのような bipartite graph を描くことができない。そのような場合であっても、サイクルを直線にすることにこだわらなければサイクルを巻き付き数を変えることなく適当に変形することによってすべての面のチャージが  $0, \pm 1$  のいずれかになるようにすることが必ずできる。そもそもここでは正則曲面をなす NS5-brane の構造を、その正確な形にこだわることなく適当に変形してトラス上に図示することを考えているので、サイクルが直線であるかどうかということはもともと意味がない。かならず全ての面のチャージが  $0, \pm 1$  のいずれかになるようにすることができるということは以下のように証明することができる。

まず、3つ以上のサイクルが一点で交差するという事は無いと仮定しておこう。そのうえで、適当に基準点をとって積分を与える。一般には絶対値が 2 以上のチャージを持つ面が現れるであろう。最大のチャージを持つ面を  $A$  とし、そのチャージを  $Q$  とする。この面  $A$  のすぐ外側を取り囲む曲線を  $C$  としよう。  $C$  中の面はチャージ  $Q$  を持つ面  $A$  のほかに、チャージ  $Q-1$  およびチャージ  $Q-2$  を持つ面が存在する。このとき、  $A$  の辺をなすサイクルのうちの一つに注目し、このサイクルを図のように曲線  $C$  を通

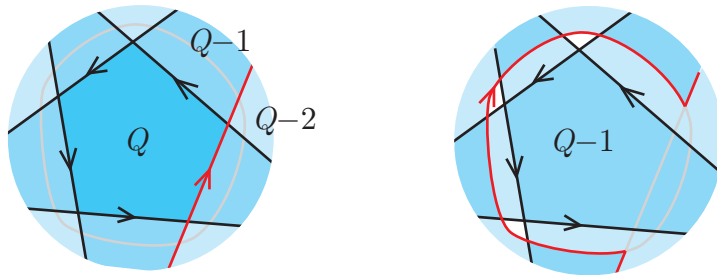


図 27: NS5-brane charge を減らすための操作

り面  $A$  の反対側をまわるように変形する。すると、もともと面  $A$  であった部分はチャージが  $Q-1$  になる。そのほかの部分についてもチャージが変化し、  $Q-3$  から  $Q-1$  までのチャージをもつ面が現れる。この操作を有限回繰り返すことによって、チャージが 2 以上の面を全てなくすることができる。チャージが  $-2$  よりも小さい面についても同様の変形を行えば、全ての面のチャージを  $0$  または  $\pm 1$  にすることができる。このような変形の物理的な意味は次の節で与える。

全ての面が  $0, \pm 1$  になることを要求したとしても、一般にはサイクルの選び方は一意的には決まらない。ゲージ理論と Calabi-Yau の関係においてこの不定性は互いに Seiberg-dual の関係にあって、同じモジュライ空間を与える複数のゲージ理論の存在に対応している。

### 6.3 Brane tiling 上のゲージ理論

前節までの NS5-brane 系と Calabi-Yau の関係に D-brane を付け加えよう。Calabi-Yau cone の先端に D3-brane が  $N$  枚存在しているとすると、T-dual 変換の結果これらは web-diagram の中心で  $T^2$  のファイバーに巻きついた D5-brane になる。この  $N$  枚の D5-brane を前節の 5-brane diagram に重ね合わせよう。すると、NS5-brane charge  $\pm 1$  を持つ面は  $N$  枚の D5-brane と一枚の NS5-brane の束縛状態である  $(N, \pm 1)$ -brane となる。これに対して NS5-brane charge が  $0$  であった面は  $N$  枚の D-brane だけからなる面になる。  $(N, \pm 1)$ -brane は  $SL(2, Z)$  対称性によって 1 枚の D5-brane に変換することができるから、その上に存在するゲージ場は  $U(1)$  ゲージ場のみである。従って、  $SU(N)$  ゲージ群は NS5-brane charge が  $0$  である面から現れる。

Calabi-Yau における string coupling を  $g_{\text{str}}$  としよう。T-duality によって得られた NS5-brane 系での string coupling は  $g'_{\text{str}} = A' g_{\text{str}}$  によって与えられる。ただし  $A'$  は fivebrane 系の  $T^2$  の面積である。Calabi-Yau cone においては、  $r$  が大きいところでは  $T^2$  サイクルは無限に大きくなるから、その dual な

トーラスの面積  $A'$  については  $A' \rightarrow 0$  の極限を取る必要がある。そのとき、fivenrane 系での結合定数も  $g'_{\text{str}} \rightarrow 0$  のように無限に小さくなる。このとき二種類のブレーンの張力は

$$T_{\text{NS5}} \gg T_{\text{D5}} \quad (455)$$

という関係にある。このことは、D5-brane の導入によっても NS5-brane の形状は変化せず、正則曲面として与えられることを意味する。逆に、NS5-brane が存在しないときには平坦であった D5-brane の worldvolume は、その一部が NS5-brane との bound state を作ることによって変形する。前節で、トーラス上のサイクルを変形することによって NS5-brane charge が 0 および  $\pm 1$  のみになるような図を描いたが、この図が表すのは、変形された D5-brane の上での NS5-brane のチャージの分布であるとみなすことができる。

例えば図 28 を見てみよう。(a) は最初に考えた、NS5-brane が平坦なシリンダーであり、その境界が

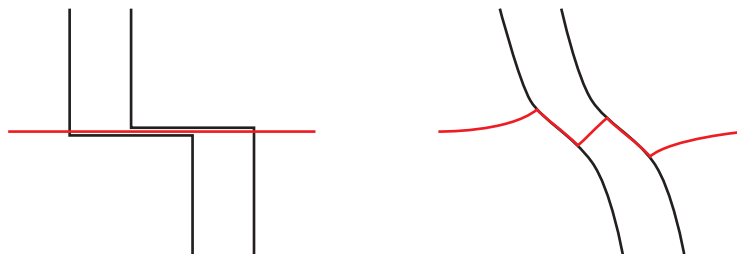


図 28: NS5-brane の張力が小さい場合と大きい場合のブレーンの形状

直線的なサイクルであるようなブレーン形状を表している。このようなブレーン形状は D5-brane 張力が NS5-brane 張力よりも非常に大きい極限、すなわち  $g_{\text{str}} \gg 1$  の極限において実現される。結合定数  $g'_{\text{str}}$  を小さくしていくと、D5-brane 張力に比較して NS5-brane 張力が大きくなっていき、NS5-brane の形状はだんだんと滑らかな正則曲面に近づいていく。そうすると、NS5-brane charge の絶対値が 2 よりも大きい領域、すなわち NS5-brane が二枚以上重なっている領域はなくなる。そして (b) に表されているように、D5-brane の worldvolume 上での NS5-brane charge は  $\pm 1$  を超えることはない。すなわち、前節で考えた NS5-brane charge をなくしていく操作というのは、 $g'_{\text{str}}$  を小さくしたときに NS5-brane がなめらかな曲面に近づいていく様子を表しているともみなすことができる。

D5-brane worldvolume 上の様子を表す図が与えられると、そこからその上に実現されるゲージ理論を読み取ることができる。まず、D5-brane が  $N$  枚重なっているところ、すなわち bipartite graph の面に相当するところでは  $U(N)$  のゲージ対称性を実現する。ただしその中の  $U(1)$  部分は、面の境界における境界条件によってゲージ群としては残らず、大域的対称性になる [30]。このため、それぞれの面で実現されるゲージ群は  $SU(N)$  である。

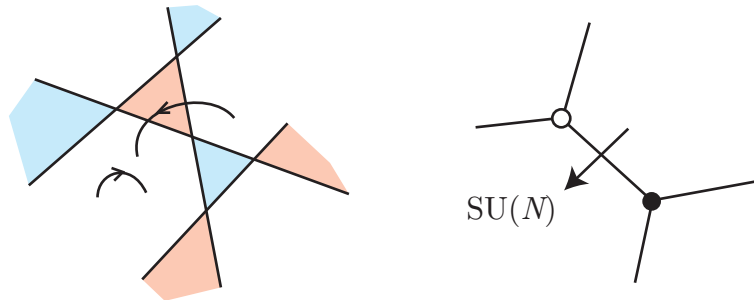


図 29: ベクトル多重項とカイラル多重項を与えるブレーン上の開弦

次に、これらの面が互いに接する点、すなわち bipartite graph の辺に相当する部分からは、二つの面をつなぐ開弦がカイラル多重項の自由度を与える。また、開弦の両端が面上のゲージ場と相互作用することから、このカイラル多重項は二つの面の双基本表現に属する。ここで注意しなければならないのは、異なる弦の向きに対応する二つの双基本表現  $(N, \bar{N})$  と  $(\bar{N}, N)$  のうちの片方だけが常に現れるという点である。このことは直接弦を量子化するなどして示すことは難しいが、さまざまな無矛盾性条件によって要求される。どちらの表現が選ばれるかは、bipartite graph 上で、その辺の両側の頂点の色を見ることによって決めることができる。双基本表現を二つの面をつなぐ矢印であらわすことにし、頭を  $N$  表現、尾を  $\bar{N}$  表現とすることにしよう。このとき、それぞれの辺で現れるカイラル多重項は辺を横切る矢印として表されるが、黒丸の周りの矢印は常に同じ向きを向く。ここでは黒丸の周りの矢印は常に反時計回りになるように約束しておく。このことは白丸の周りの矢印は時計回りになることを意味する。

以上のことから、brane tiling が与えられると、その上で実現されるゲージ理論がどのような場を含むかが決定される。このゲージ理論の構造はしばしば quiver diagram を用いて表される。quiver diagram とは、ゲージ群のそれぞれの  $SU(N)$  因子を頂点、双基本表現をそれらの頂点をつなぐ矢印として表したものであるが、上記のルールは quiver diagram が brane tiling の双対グラフとして与えられることを意味している。

さらに、brane tiling からは superpotential を読み取ることもできる。bipartite graph の一つの頂点に注目しよう。この頂点はその周りの辺と交差する矢印によって取り囲まれているが、それぞれの矢印を開弦であるとみなせば、それらの矢印で囲まれた多角形によって表される世界面を考えることができる。こ

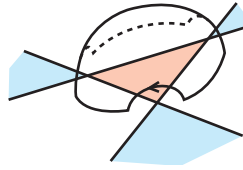


図 30: 超ポテンシャルの相互作用を誘起するインスタントン

の世界面インスタントンがゲージ理論における超ポテンシャルを与える。たとえば、ある頂点  $k$  を端点とするような辺を  $I$ 、そして辺  $I$  に対応するカイラル多重項を  $\Phi_I$  とすれば、頂点  $k$  に対応する世界面インスタントンによって生成される相互作用は

$$\mathcal{O}_k = \text{tr} \prod_{I \in k} \Phi_I, \quad (456)$$

と与えられる。従って、超ポテンシャルは

$$W = \sum_k h_k \mathcal{O}_k \quad (457)$$

と与えられる。 $h_k$  は結合定数である。実は、カイラル超場  $\Phi_I$  のリスケールの自由度を用いると、結合定数  $h_k$  のうちほとんどは任意の 0 でない値に取ることができる。(もともと  $h_k$  が 0 でないことは仮定している。) 場の規格化によって吸収できない結合定数、すなわち、場のリスケールのもとで不変な結合定数の組は実は一つだけしかなく、それは次のように与えられる。

$$\beta = \frac{\prod_{k:\text{white}} (-h_k)}{\prod_{k:\text{black}} h_k} \quad (458)$$

分母は黒い頂点に対応する全ての結合定数の積、分子は白い頂点に対応する全ての結合定数の積であり、符号はあとで便利なようにつけた。このパラメータは、超共形ゲージ理論の  $\beta$ -deformation と呼ばれるものに対応しており、ブレーン系においては背景の  $B$  場などの自由度と解釈することができる [31]。

ゲージ理論のモジュライ空間の複素構造はこのパラメータにのみ依存している。もしこのパラメータが  $\beta = 1$  であればモジュライ空間は 5-ブレーン系と T-dual の関係にある Calabi-Yau 空間になる [26]。このため  $\beta = 1$  を満足するケースに限って議論をする場合が多い。このときには黒丸に対応する全ての結合定数を  $h_k = 1$  白丸に対応する結合定数を  $h_k = -1$  に取ることができる。すなわち、超ポテンシャルは次のように与えられる。

$$W = \sum_{k:\text{black}} \mathcal{O}_k - \sum_{k:\text{white}} \mathcal{O}_k \quad (459)$$

## 6.4 Zig-zag paths

bipartite graph を与えられたら、そこからもとのブレーンの形状、すなわち、トーラス上でそれぞれの NS5-brane の境界がどのようなサイクルに巻いているかを読み取ることができる。そのためには、zig-zag path と呼ばれるものを用いる。

zig-zag path は以下のルールに従いながら bipartite graph の辺をたどる事で定義される。まず、ある辺からある方向に向けて出発する。この辺と向きを選び方を変えることで幾つもの zig-zag path が構成される。もし白い頂点に出会ったら、進行方向に向かって最も左にある辺へ進み、もし黒い頂点に出会ったら、進行方向に向かって最も右にある辺へ進む。辺の数は有限であるから、いつかは出発したところに戻る。こうして閉じたサイクルが得られる。グラフが bipartite であれば、交互に白丸と黒丸を通るので交互に左折、右折を繰り返すことになり、その結果通った道筋はジグザグになる。これを zig-zag path と呼ぶ。

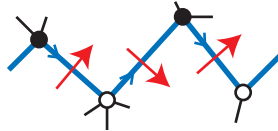


図 31: zig-zag path の定義。白で左、黒で右。

zig-zag path を滑らかに馴染ませば、NS5-brane の boundary を与えることはブレーンの形状から bipartite graph を定義した方法を振り返れば明らかであろう。また、以前に説明した NS5-brane の形状と対応するカラビヤウ空間の関係を用いると、zig-zag path はカラビヤウ空間を表す web 図形の外線やトーリック図形の辺と対応していることもわかる。

## 6.5 Elliptic model との双対性

§4.7 において定義された elliptic model は brane tiling と T-dual 変換でつながっている。

表 2 にあるような向きを持った二種類の NS5-brane からなる系を考える。ここではそれぞれの向きの NS5-brane の枚数は限定せず、それぞれ NS5a と NS5b と呼ぶことにする。D4-brane が巻きついている

表 4: T-duality によって brane tiling に書き換えられる Hanany Witten 系

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5 <sub>a</sub>	○	○	○	○	○	○				
NS5 <sub>b</sub>	○	○	○	○			○	○		
D4 × N	○	○	○	○						○

$x^9$  方向は  $S^1$  にコンパクト化されている。

T-duality 変換を行って brane tiling を得るためには、適当な座標変換を行う必要がある。ここでは 4567 空間を  $\mathbb{R}^3$  上の  $S^1$  ファイバー束として表す。 $\mathbb{R}^3$  上の座標  $\vec{r}$  を次のように定義する。

$$\vec{r} = u^\dagger \vec{\sigma} u, \quad u = \begin{pmatrix} x^4 + ix^5 \\ x^6 + ix^7 \end{pmatrix} \quad (460)$$

ただし  $\vec{\sigma}$  はパウリ行列である。 $S^1$  ファイバーの座標としては  $\psi$  を用いることにする。

この新しい座標を用いてブレーンの配置を示したのが表 5 である。二種類の NS5-brane は  $S^1$  fiber に

表 5: 新しい座標を用いたブレーン配置。± はその座標の正部分、あるいは負の部分にのみ伸びていることを表しており、 $s$  はその方向が shrinking cycle であることを意味している。

	0	1	2	3	$\bar{\psi}$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	8	9
NS5 <sub>a</sub>	○	○	○	○	○				+	
NS5 <sub>b</sub>	○	○	○	○	○				-	
shrinking cycle	○	○	○	○	$s$				○	○
D4×N	○	○	○	○						○

巻きついており、ベース空間上では  $r_3$  軸の正の部分 (NS5a) と負の部分 (NS5b) に対応している。 $S^1$  サイクルは  $\vec{r} = 0$  においてつぶれる。 $x^8$ - $r_3$  平面上では NS5-brane と shrinking cycle は線として表される (Figure 32)  $x^9$  方向に対して T-dual 変換を行えば、NS5-brane は shrinking cycle に変換され、Calabi-Yau

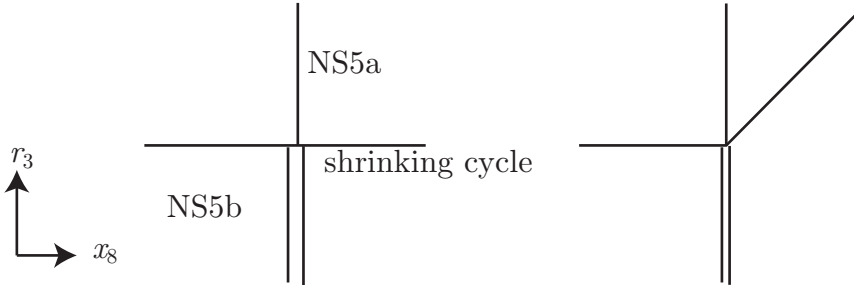


図 32: IIA 理論における NS5-brane

空間 (この場合は generalized conifold) と、その上の D3-brane が得られる。一方  $\psi$  方向に対して T-dual 変換を行うと、二種類の NS5-brane はサイクルに巻きついていてどちらも NS5-brane のままであるが、shrinking cycle からは新たな NS5-brane が現れる。また D4-brane は D5-brane へと変換され、brane tiling によって記述される 5-brane 系が得られる。

対応する web 図形と brane tiling を書いてみると、Figure 33 のようになる。このブレーンタイリングからゲージ理論を読み取ってみよう。ブレーンタイリングは 3 つの  $(N, 0)$  面を持つから、 $SU(N)^3$  ゲージ理論を与える。また、現れるカイラル多重項は elliptic model で得られるものと同じであることがわかる。

図から読み取られる超ポテンシャルは

$$W = \Phi X_1 Y_1 - \Phi Y_2 X_2 - X_1 X_2 Y_2 Y_1 + Y_2 Y_3 X_3 X_2. \quad (461)$$

これは (360) に与えた超ポテンシャルと一致する。

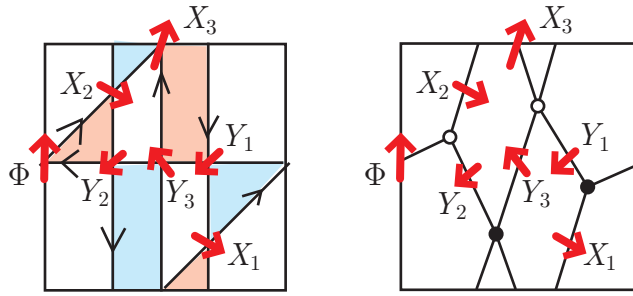


図 33: T-双対性によって得られた Toric 多様体。

## 6.6 メソン演算子とサイクル

さて、ここからはブレーンタイリングが与えられたときにどのようにしてモジュライ空間のトーリックデータを得ることができるかという問題を考えていこう。§5.5において、トーリック多様体上の全ての正則関数のアイソメトリーのもとでのチャージがわかればトーリックデータが得られることを見た。ゲージ理論の言葉では、正則関数に対応するのはある種のゲージ不変演算子であり、アイソメトリーはゲージ理論の大域的対称性の一部である。

ここではまずゲージ不変演算子について考える。モジュライ空間を決める上で重要となるのはメソン演算子と呼ばれる演算子である。これは

$$\mathcal{O} = \text{tr}(\Phi_1 \Phi_2 \cdots) \quad (462)$$

のように、双基本表現のカイラル場の積のトレースとして与えられるものである。ここでは複数個のトレースの積として与えられるものもメソン演算子に含めることにする。

それぞれの面のゲージ群に対してこの演算子が不変であるためには、その演算子に含まれる双基本表現場の矢印が閉じたサイクルをなしている必要がある。つまり、ある面に入る矢印があった場合には、必ずその面から出る矢印も無ければならない。例として、図 33 のブレーンタイリングにおいて  $\mathcal{O} = \text{tr}(\Phi Y_2 X_2)$  というゲージ不変演算子を考えてみよう。これは図 34 のようなサイクルとして表すことができる。辺を横

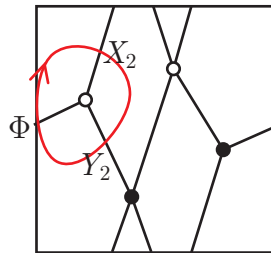


図 34:

切る向きは常に「黒丸を左手に、白丸を右手に」見る向きであることに注意しよう。

以下ではゲージ群が  $U(1)$  である場合を考えることにする。これはカラビヤウ空間に D3-brane が一枚だけある状況に対応しており、カラビヤウ空間の構造を決定するにはこれだけで十分である。ゲージ群が  $U(1)$  の場合にはトレースを取る必要が無く、演算子は単純に次の単項式として与えられる。

$$\mathcal{O} = \prod_I \Phi_I^{n_I}, \quad n_I \geq 0. \quad (463)$$

これらの演算子の間には  $F$ -term 条件によってある関係が課されている。これはタイリング上で、パスの間の等価関係として表すことができる。

たとえば、ある辺  $I$  に対応した双基本表現場  $\Phi_I$  に対する  $F$ -term 条件  $F_I = 0$  について考えてみよう。超ポテンシャルの中で  $\Phi_I$  を含む項は常に二つ存在し、それは辺  $I$  の両端の頂点にそれぞれ対応している。超ポテンシャルの各項もメソンの演算子であるから、それらもブレンタイリング上では閉じたサイクルとして表される。これは  $\Phi_I$  を含む二つの項は辺  $I$  の二つの端点を回るサイクルとして表され、 $\Phi_I$  はその共有部分になっている。超ポテンシャルを  $\Phi_I$  で微分するということは、それぞれのサイクルから  $\Phi_I$  に対応した部分を取り除くことを意味し、 $F_I = 0$  という条件は得られた二つのパスの間の等価関係を与える。このようなパスの変形によって互いに移りあう閉曲線は、 $F$ -term 条件の下で等しい演算子を与える。

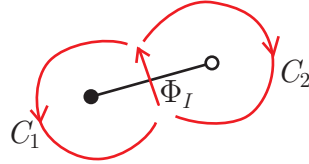


図 35: 場  $\Phi_I$  についての  $F$ -term 条件は二つのパスの間の等価関係  $C_1 \sim C_2$  を与える。

言い換えれば、それらの演算子はカイラルリングの中では同じ元に対応している。

任意のメソンの演算子、言い換えれば任意の閉曲線は、この等価変形を用いれば、次にあるような 3 つの閉曲線の重ねあわせとして表すことができる。

- ブレンタイリング上を横方向に一周するサイクル  $\alpha$
- ブレンタイリング上を縦方向に一周するサイクル  $\beta$
- ある一つの頂点の周りを一周するサイクル  $\gamma$

これらに対応する演算子をそれぞれ

$$\mathcal{O}_\alpha, \quad \mathcal{O}_\beta, \quad \mathcal{O}_\gamma \tag{464}$$

と表すことにしよう。

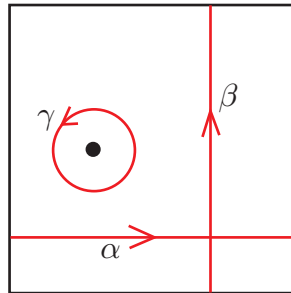


図 36: カイラルリングの 3 つの独立な元を与えるサイクル

上でサイクルの「重ね合わせ」という言葉を用いたが、オペレータの言葉では、二つのサイクルの重ねあわせに対応するのはオペレータの積である。ゲージ群が  $SU(N)$  である場合には、同じサイクルが二つ重なっている場合と一つのサイクルが同じところを二週している場合はカラー添え字のつぶし方が異なり、異なる演算子を与えるが、ここで考えているような  $U(1)$  ゲージ群の場合はこのような二つのサイクルは区別されない。

全てのサイクルが上記の 3 つで与えられるということは、任意のメソン演算子が 3 つの演算子の正則関数で与えられるということを意味している。つまり、(463) の形で表される任意の演算子  $\mathcal{O}$  は

$$\mathcal{O} \sim \mathcal{O}_\alpha^{n_\alpha} \mathcal{O}_\beta^{n_\beta} \mathcal{O}_\gamma^{n_\gamma}, \quad n_\alpha, n_\beta, n_\gamma \in \mathbf{Z} \tag{465}$$

のように与えられる。ここで、べきは負にもなりえることに注意しよう。記号 “ $\sim$ ” は  $F$ -term 条件による等価関係を用いていること、すなわちカイラルリング上の関係式であることを表している。

モジュライ空間上の点は、ゲージ不変演算子の期待値によって区別することができるが、任意の演算子が上記のように 3 つの演算子で書けてしまうということはモジュライ空間が複素 3 次元であることを意味しており、上記の 3 つの演算子はその上の複素座標として用いることができる。

## 6.7 $U(1)$ 対称性とフロー

次に、大域的  $U(1)$  対称性のブレンタイリング上での表現について考えてみよう。 $U(1)$  対称性を与えるには、カイラル場  $\Phi_I$  に対する  $U(1)$  charge  $Q_I$  を与えればよい。これはブレンタイリング上の辺への数の割り当てであると考えられる。ここではこの数を「辺に沿った流れ」として解釈すると便利である。つまり、 $\Phi_I$  のチャージ  $Q_I$  を、辺  $I$  の上を「黒丸から白丸に」向かって流れる流れの量と解釈するのである。このように解釈すると、ゲージ不変演算子の  $U(1)$  チャージは対応するサイクルを横切る流れの総量と解釈することができる。

$P$  を（必ずしも閉じていなくても良い）辺を横切る矢印を組み合わせることで構成されたパス、 $f$  を辺上を流れるフローとしよう。このとき、それらの内積

$$f \cdot P \tag{466}$$

を  $P$  を横切る流れの量として定義する。向き付けは図 37 のように定義する。 $P[O]$  を（ゲージ不変とは

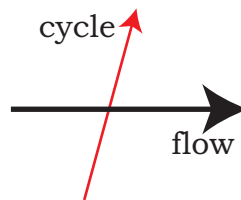


図 37: この図の場合、サイクルを横切る流れは正であると定義する。

限らない) ある演算子  $O$  に対応するパス、 $f[U(1)]$  をある  $U(1)$  対称性に対応する flow とすれば、

$$(\mathcal{O} \text{ の } U(1) \text{ charge}) = f[U(1)] \cdot P[\mathcal{O}] \tag{467}$$

が成り立つ。

ある  $U(1)$  変換が理論の対称性であるためには、その変換が  $F$ -term 条件を変化させないことが必要である。このためには、超ポテンシャルの各項を不変に保つ（フレーバー対称性の場合）か、全ての項を同じ位相で回転させる（ $R$ -対称性の場合）ことが必要である。超ポテンシャルの各項はそれぞれの頂点を囲むサイクルによって表されるから、フレーバー対称性は各頂点からの湧き出しや吸い込みがない、保存流によって表される。一方  $R$  対称性の場合には、保存流でなくても良いが、各黒丸からの湧き出し量と各白丸への吸い込み量が全て等しい必要がある。この条件を満足する流れを regular flow と呼ぶことにする。保存流はもちろん regular flow の特殊な場合である。

$U(1)$  ゲージ対称性も同様に regular flow を用いて表すことができるはずである。しかも、 $U(1)$  ゲージ対称性は超ポテンシャルを不変に保つので、保存流として表すことができる。ゲージ群がそれぞれの面に対応しており、そのゲージ群に結合するカイラル場がその面の辺に対応することより、ある面の  $U(1)$  ゲージ対称性に対応する保存流はその面の周りを一周する流れとして表されることがわかる。 $SU(N)$  の場合の基本表現（矢印の頭）を  $U(1)$  電荷  $+1$ 、反基本表現（矢印の尾）を  $U(1)$  電荷  $-1$  と規格化すれば、対



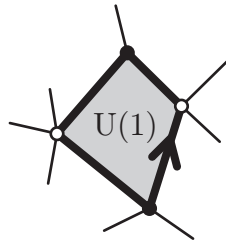


図 38:  $U(1)$  ゲージ対称性に対応する保存流

応する保存流は面の周りを反時計回りに流れる、流量 1 の流れとして表される。ゲージ群が  $SU(N)$  の場合には、この保存流もやはり大域的対称性を与えるが、このような対称性はいかなるメソン演算子にも作用しない。この対称性は  $\det \Phi_I$  のようなバリオン演算子にのみ作用し、このことからこのような対称性はバリオンの  $U(1)$  対称性と呼ばれる。

ここでは  $U(1)$  対称性を古典的な対称性としてのみ議論してきた。量子効果 (フェルミオンの 1-ループ効果) まで含めると、これら  $U(1)$  対称性の一部のみが破れずに残る。これについては次の節で議論する。

## 6.8 アノマリーのない $U(1)$ 対称性

一般に、ブレーンタイリングによって与えられるゲージ理論はカイラルであるため、常にアノマリーの相殺について気をつける必要がある。

大域的対称性とブレーン系の関係については [32] で詳しく述べられている。

まず、 $U(1)SU(N)^2$  アノマリーについて考えてみよう。 $U(1)$  対称性がゲージノに作用しないフレーバー対称性である場合このアノマリーには bi-fundamental field のみが寄与する。bi-fundamental field の  $U(1)$  電荷を  $C_I$  とすれば、その相殺条件は次の式によって与えられる。

$$\sum_I Q_{aI}^2 C_I = 0. \quad (468)$$

つまり、それぞれの面において、それを囲む辺に割り当てられた  $C_I$  の総和が 0 になっていればよい。この条件はそれぞれの zig-zag path に沿った保存流を考えれば満足されている。なぜなら zig-zag path が面に接する際に、必ず連続する二つの辺を通り、その二つの辺がアノマリーに対して逆の寄与をするからである。証明は省くが、アノマリー相殺条件 (468) を満足する  $C_I$  は必ず zig-zag path に沿った流れの重ねあわせとして与えることができ、次のように書くことができる。

$$C_I = \text{sign}(\mu, \nu)(C_\mu - C_\nu) \quad (469)$$

ただし、 $\mu$  と  $\nu$  は辺  $I$  を通る zig-zag path であり、 $C_\mu$  はそれぞれの zig-zag path 上の流れの量を表す。

$C_I$  は  $C_\mu$  の差によって与えられるので、全ての  $C_\mu$  を定数分だけずらしてもそれは  $C_I$  を変化させない。従って、フレーバー対称性の個数は

$$\text{フレーバー対称性の数} = \text{zig-zag path の数} - 1 \quad (470)$$

によって与えられる。

これらの  $U(1)$  対称性の中で、メソン演算子に作用するのは二つだけである。それら二つの対称性は特にメソン対称性と呼ばれる。それら以外はバリオン演算子にのみ作用し、バリオン対称性と呼ばれる。メソン対称性には常にバリオン対称性を混合する自由度が存在することに注意すること。

メソン演算子はモジュライ空間上の座標を与えるからメソン対称性はモジュライ空間のアイソメトリーを表す。これに対し、バリオン対称性はカラビヤウ空間上に存在する RR 場のゲージ対称性と関係している。すなわち、 $X_5$  を Sasaki-Einstein 多様体とすると、 $H^3(X_5)$  の生成元  $\omega_i$  を用いて

$$C_4 = A_1^i \wedge \omega_i \quad (471)$$

のように定義される  $b_2$  個のゲージ場  $A_1^i$  がバリオン対称性の電荷に結合する  $AdS$  上のゲージ場である。

$H_3(X_5)$  の次元はポアンカレ双対性より 2-サイクルのホモロジーの次元に等しい。このホモロジーの次元はトーリック図形の周上の頂点の数を  $N$  とすると  $N - 3$  であることが以下のようにしてわかる。

まず、 $X_5$  はトーリック性を用いてある多角形上の  $T^3$  fibration として与えることができる。多角形は dual cone の断面であり、その辺はトーリック図形の周上の頂点にそれぞれ対応している。それぞれの辺の上では  $T^3$  のうちのサイクルがつぶれているが、どのサイクルがつぶれているかはトーリック図形上の対応する頂点の座標によって決まる。2 サイクルは多角形内部の junction として表すことができる。こ

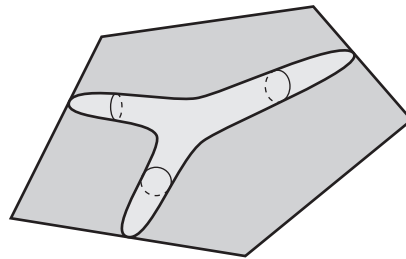


図 39: トーリック Sasaki-Einstein 多様体上の 2-サイクル

の junction を構成する string はファイバーの一つのサイクルにまきついている。これを string の charge と解釈することができる。この charge が多角形の辺で shrink するサイクルに一致している場合、string はその辺に端を持つことができる。junction はそれぞれの辺から何本の string が伸びているかを指定することで指定できるが、これらの本数の間には charge の保存則を表す 3 つの条件が課されている。従って独立な 2-cycle の数は  $n - 3$  である。

$R$ -対称性の場合には、ゲージノの寄与を考える必要があるため、アノマリー相殺条件が次のように変化する。

$$\sum_I Q_{aI}^2 R_I = 2 \quad (472)$$

この条件を満足する  $R_I$  も、zig-zag path を利用して次のように与えることができる。

$$\pi R_I = \text{sign}(\mu, \nu)(\phi_\mu - \phi_\nu) \quad (473)$$

ただし今度は  $\phi_\mu$  は zig-zag path の向きを表す角度変数であり、その差は  $-\pi$  から  $\pi$  までの範囲になるように定義する。 $\text{sign}(\mu\nu)$  の定義とあわせて考えると、このように与えた  $R$ -charge は必ず 0 から 1 の間に収まることになる。このように与えた  $R_I$  がアノマリー相殺条件 (472) を満足することは多角形の外角の和が  $2\pi$  になることを用いれば簡単に示すことができる。

$\phi_\mu$  は zig-zag path の方向を表す角度と述べたが、これは実際に zig-zag path の方向を表す角度ではなくても大小関係 ( $S^1$  上の順序) を変えない範囲で自由に選ぶことができる。この自由度は、 $U(1)_R$  対称性とフレーバー対称性の混合の自由度を表している。

## 6.9 パーフェクトマッチングとアイソメトリー

ここでの目標は、 $U(1)$  対称性がメソン演算子にどのように作用するかを明らかにすることである。前節で述べたように、ブレンタイリングによって記述されるゲージ理論は古典的には

$$G = U(1)_R \times U(1)_F^2 \times U(1)_B^{n_F-1} \quad (474)$$

量子論的には

$$G = U(1)_R \times U(1)_F^2 \times U(1)_B^b \quad (475)$$

という対称性を持つ。ただし  $b$  は zigzag path の本数から 3 を引いたものである。

メソン演算子のみを考える場合にはバリオン対称性は空回りをしている。また、アノマリーについては、メソン演算子への作用に影響しないバリオン対称性の部分にのみ条件を課す。従って、ここでの議論には古典的な対称性を用いても量子論的な対称性を用いても同じ結果が得られる。

これらの  $U(1)$  対称性はいずれも regular flow によって表される。これらの regular flow はベクトル空間をなすが、その生成元として「パーフェクトマッチング」を用いるのが便利である。

パーフェクトマッチングとは、bipartite graph 上の辺の部分集合で、任意の頂点の周りの辺に注目したときに必ずその部分集合に含まれる辺が一本だけ含まれているようなものをさす。すなわち、全ての頂点を過不足なく白と黒の対にするような辺の集合である。SPP 理論のブレンタイリングにおける全てのパーフェクトマッチングを図 40 に与えておいた。パーフェクトマッチングは、そこに含まれる辺の上に流量 1

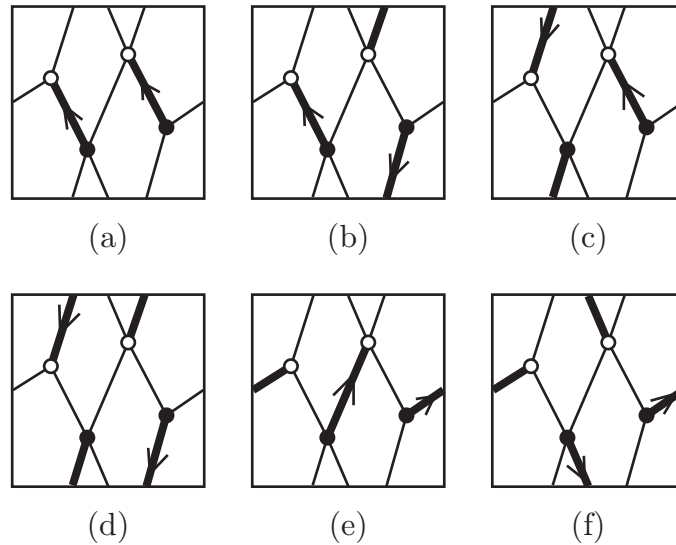


図 40: SPP のブレンタイリングのパーフェクトマッチング

の黒から白への流れを割り当てることで regular flow として解釈することができる。以下ではパーフェクトマッチングとそれに対応する regular flow を区別せず、どちらもパーフェクトマッチングと呼ぶことにする。証明は省くが、任意の regular flow をパーフェクトマッチングの線形結合として表すことができる。

一般には、パーフェクトマッチングは全てが独立というわけではない。たとえば図 40 のパーフェクトマッチングは

$$(a) - (b) - (c) + (d) = 0 \quad (476)$$

という関係式を満足している。

パーフェクトマッチングは、 $F$ -term 条件を解くためにも用いることができる。あるブレンタイリング上のパーフェクトマッチングを  $\mu = 1, 2, \dots$  でラベルし、それぞれに対応する regular flow を  $f_\mu$  と置

こう。また、カイラル場  $\Phi_I$  に対応するパスを  $P_I = P[\Phi_I]$  とする。(これは辺  $I$  を横切る矢印に他ならない。) このとき、 $F$ -term 条件を満足する場  $\Phi_I$  は次のように与えることができる。

$$\Phi_I = \prod_{\mu} \rho_{\mu}^{f_{\mu} \cdot P_I} \quad (477)$$

ただし、 $\rho_{\mu}$  は任意の複素数であり、パーフェクトマッチングごとに導入された変数である。これが  $F$ -term 条件を満足することは、超ポテンシャルの任意の項 (これは以前に定義された  $\mathcal{O}_{\gamma}$  である) が (477) を代入すると

$$\mathcal{O}_{\gamma} = \prod_{\mu} \rho_{\mu} \quad (478)$$

と表されることから明らかである。逆に、 $F$ -term 条件の任意の解が常に上記のように分解できることも証明することができる。

$F$ -term 条件の解を (477) のように分解してしまえば、フロー  $f_{\mu}$  に対応する  $U(1)$  対称性は単に  $\rho_{\mu}$  をチャージ 1 でまわす  $U(1)$  回転であると解釈することができる。

## 6.10 メソン演算子とモジュライ空間

前の節において、メソン演算子と  $U(1)$  対称性がブレンタイリング上で「サイクル」と「フロー」として表されることを見た。これらを道具として用いることで、モジュライ空間のトーリックデータをブレンタイリングから簡単に読み取ることができる。

§5.5 において議論したように、メソン演算子が全て与えられると、トーリックデータはそれら全てのチャージを非負とするようなアイソメトリーの生成子として与えられる。パーフェクトマッチングは全ての辺の流れが非負 (即ち 0 または黒から白) であるからこの条件を満足することは明らかである。また、任意のメソン演算子に対して非負のチャージを与えるような  $U(1)$  対称性はパーフェクトマッチングによって生成される、すなわちパーフェクトマッチングの非負係数の線形結合として与えられることが示される。従って、パーフェクトマッチングに対応した  $U(1)$  対称性をそのままアイソメトリー  $s_I$  と同一視することができる。ここでは、パーフェクトマッチング  $\mu$  に対応するキリングベクトルを  $s_{\mu}$  としよう。

$s_{\mu}$  のうち、線形独立なのは 3 つだけである。これは、パーフェクトマッチングの線形結合の多くはバリオンの対称性を与え、フレーバー対称性と R-対称性を与えるものが 3 つだけであることに対応している。従って、パーフェクトマッチングから  $s_{\mu}$  を得るには、トーリック多様体の 3 個のアイソメトリーに対応した 3 次元空間への射影を行う必要がある。

そのためには、アイソメトリーがメソン演算子への作用として与えられること、そして任意のメソン演算子が 3 つのメソン演算子 (464) によって (465) のように表されることを思い出せばよい。つまり、 $f_{\mu}$  が与えられたときにそこから 3 次元空間への射影を、3 つの演算子のチャージを用いて

$$f_{\mu} \rightarrow s_{\mu} = \begin{pmatrix} f_{\mu} \cdot \alpha \\ f_{\mu} \cdot \beta \\ f_{\mu} \cdot \gamma \end{pmatrix} \quad (479)$$

によって定義することができる。

このベクトルの 3 つの成分のうち最後のものはパーフェクトマッチングやサイクル  $\gamma$  の定義より常に 1 であることがわかる。これは、このトーリックデータで与えられる多様体がカラピヤウであることを意味している。

具体例として SPP の場合を考えてみよう。図 41 に 6 つのパーフェクトマッチングとそこから読み取ることのできるトーリックデータが描かれている。実際にトーリックデータを読み取る際には、ブレンタ

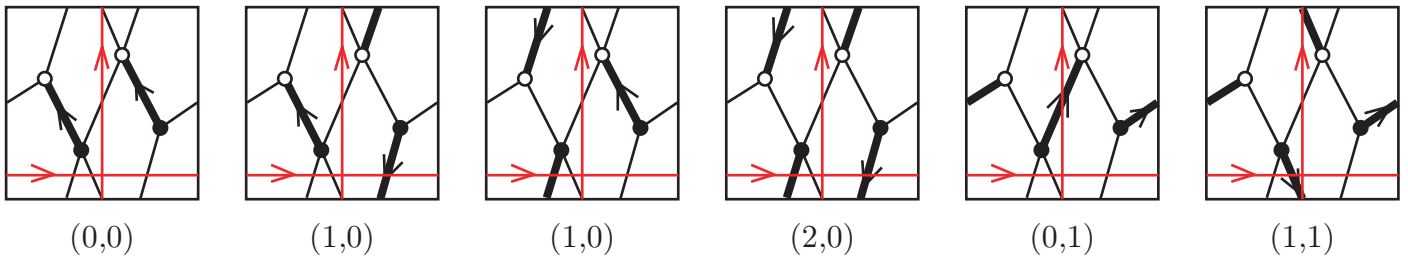


図 41:

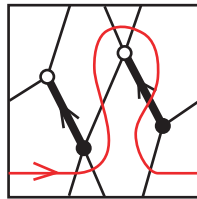


図 42:

イリング上で  $\alpha$  サイクルと  $\beta$  サイクルを具体的に決める必要があるが、この取り方には任意性がある。例えば  $\alpha$  サイクルとして図 42 にあるサイクルを取ることもできる。この場合、トーリックデータの第一成分は全てのパーフェクトマッチングに対して 1 だけ増加する。このように、トーリックデータの定数部分には任意性があり、トーリック図形の平行移動に対応している。

このような、平行移動に対応する任意性によらない量として、トーリック図形上の二つの点の相対位置を見てみよう。たとえば、二つのパーフェクトマッチング  $\mu$  と  $\nu$  に対応する点の相対座標  $s_\mu - s_\nu$  は二つのフローの差  $f_\mu - f_\nu$  に対応している。パーフェクトマッチングの定義より、このフローが保存流であることは明らかである。しかも、実際にやってみるとわかることであるが、トーリック図形の外周上のある辺の両端に対応した二つのパーフェクトマッチングの差はその辺の長さと同じ本数のジグザグパスをあたえ、それらのジグザグパスは辺と垂直な方向にトーラスにまきついている。例えば、 $(1,1) - (2,0)$  を描いてみると、図 43 の (a) のように辺に垂直な  $(1,1)$  サイクルに巻きついたジグザグパスを与える。また、長さが 2 の辺に対して  $(2,0) - (0,0)$  を計算してみると、(b) のように同じサイクルに巻きついた二つのジグザグパスが現れる。実は、これらのジグザグパスは、ももとのプレーン系に戻ってみれば D5-brane

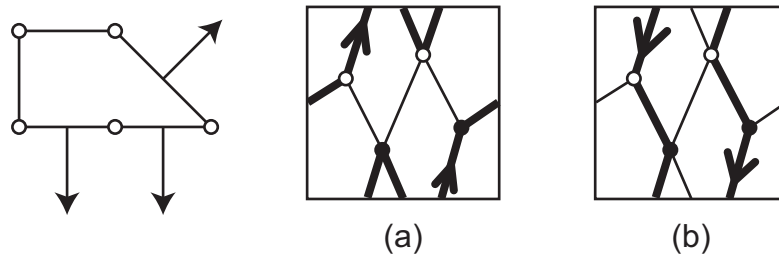


図 43:

上の NS5-brane の端を表すサイクルに他ならない。例えば図 33 の左側の図のサイクルのうち、右上へ向かうものが図 43 の (a) に、下へ向かう二つのサイクルが図 43 の (b) に対応している。

すなわち、以前は web-図形を NS5-brane と解釈してプレーンの形状を読み取ることでプレーンタイリングを得、そこからゲージ理論を読み取ったが、今度はそれとは逆にプレーンタイリングから読み取ったゲージ理論のモジュライ空間としてトーリックデータおよび web-図形が得られることが示されたわけで

ある。

## 参考文献

- [1] T. H. Buscher, Phys. Lett. B194 (1987) 59, B201 (1988) 466.
- [2] M. Cvetič, H. Lu, C. N. Pope and K. S. Stelle, Nucl. Phys. B **573**, 149 (2000) [arXiv:hep-th/9907202].
- [3] B. Kulik and R. Roiban, JHEP **0209**, 007 (2002) [arXiv:hep-th/0012010].
- [4] I. A. Bandos and B. Julia, JHEP **0308**, 032 (2003) [arXiv:hep-th/0303075].
- [5] R. Benichou, G. Policastro and J. Troost, arXiv:0801.1785 [hep-th].
- [6] E. Bergshoeff, C. M. Hull and T. Ortin, Nucl. Phys. B **451**, 547 (1995) [arXiv:hep-th/9504081].
- [7] T. Nakatsu, K. Ohta, T. Yokono and Y. Yoshida, Nucl. Phys. B **519**, 159 (1998) [arXiv:hep-th/9707258].
- [8] Dieter R. Brill “Electromagnetic Fields in a Homogeneous, Nonisotropic Universe ”, Phys. Rev. **133**, B845 (1964)
- [9] C. N. Pope “Axial-vector anomalies and the index theorem in charged Schwarzschild and Taub-NUT spaces”, Nucl.Phys. B141, 432 (1978)
- [10] A. Giveon and D. Kutasov, Rev. Mod. Phys. **71**, 983 (1999) [arXiv:hep-th/9802067].
- [11] A. Karch, D. Lust and D. J. Smith, Nucl. Phys. B **533**, 348 (1998) [arXiv:hep-th/9803232].
- [12] A. Hanany and E. Witten, Nucl. Phys. B **492**, 152 (1997) [arXiv:hep-th/9611230].
- [13] E. Witten, Nucl. Phys. B **500**, 3 (1997) [arXiv:hep-th/9703166].
- [14] S. Elitzur, A. Giveon and D. Kutasov, Phys. Lett. B **400**, 269 (1997) [arXiv:hep-th/9702014].
- [15] E. Witten, Nucl. Phys. B **507**, 658 (1997) [arXiv:hep-th/9706109].
- [16] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **584**, 69 (2000) [Erratum-ibid. B **608**, 477 (2001)] [arXiv:hep-th/9906070].
- [17] O. Lunin, arXiv:0802.0735 [hep-th].
- [18] M. Grana and J. Polchinski, Phys. Rev. D **63**, 026001 (2001) [arXiv:hep-th/0009211].
- [19] S. Kachru, M. B. Schulz and S. Trivedi, JHEP **0310**, 007 (2003) [arXiv:hep-th/0201028].
- [20] O. DeWolfe and S. B. Giddings, Phys. Rev. D **67**, 066008 (2003) [arXiv:hep-th/0208123].
- [21] F. Cachazo, K. A. Intriligator and C. Vafa, Nucl. Phys. B **603**, 3 (2001) [arXiv:hep-th/0103067].
- [22] A. Hanany and K. D. Kennaway, “Dimer models and toric diagrams,” arXiv:hep-th/0503149.
- [23] S. Franco, A. Hanany, K. D. Kennaway, D. Vegh and B. Wecht, JHEP **0601** (2006) 096, arXiv:hep-th/0504110.

- [24] S. Franco, A. Hanany, D. Martelli, J. Sparks, D. Vegh and B. Wecht, JHEP **0601** (2006) 128, arXiv:hep-th/0505211.
- [25] B. Feng, Y. H. He, K. D. Kennaway and C. Vafa, arXiv:hep-th/0511287.
- [26] S. Franco and D. Vegh, JHEP **0611**, 054 (2006) [arXiv:hep-th/0601063].
- [27] K. D. Kennaway, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 2977 (2007) [arXiv:0706.1660 [hep-th]].
- [28] M. Yamazaki, arXiv:0803.4474 [hep-th].
- [29] Miguel Abreu, Kahler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates, arXiv:math/0004122
- [30] Y. Imamura, arXiv:hep-th/0605097.
- [31] Y. Imamura, H. Isono, K. Kimura and M. Yamazaki, Prog. Theor. Phys. **117**, 923 (2007) [arXiv:hep-th/0702049].
- [32] Y. Imamura, JHEP **0612**, 041 (2006) [arXiv:hep-th/0609163].