M理論の基礎

ノートのタイトル　2010/11/05

目次

1 11 dim SUGRA

1.1 M理論とは

統一理論を作る方法のひとつとして、最も古くからあるのは、高次元の時空を考えることである。

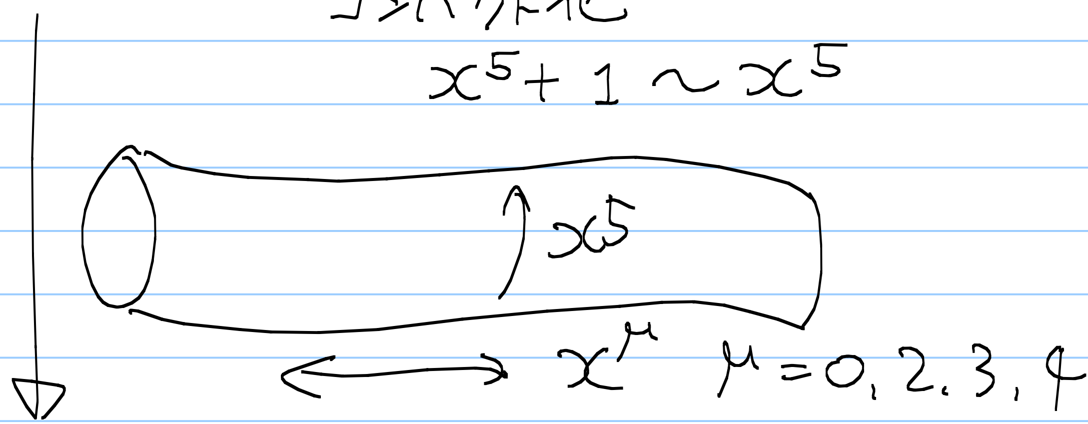
(Kaluza−Klein)

5次元の重力理論 g_{MN}

$$M, N = 0, 1, 2, 3, 5$$

コンパクト化

$$x^5 + 1 \sim x^5$$



4次元の重力理論 $g_{\mu\nu}$

+

電磁場 $A_\mu = g_{\mu 5}$

(+スカラー場 $\varphi = g_{55}$)

この例のように、高次元の理論は
異なる spin の場を統一的にあつかう
のに有用である。

高次元時空を考えるということは、
ローレンツ対称性を拡張することである

$$SO(1,3) \subset SO(1,4)$$

4次元　　　5次元

これにより、SO(1,3) のいくつかの表現 (spin) が SO(1,4) のひとつの表現にまとまる。

しかし

boson (整数スピン) と
fermion (半奇数スピン) を
統一することはできない。

③

boson とfermion を統一するには、その間の対称性である「超対称性」(supersymmetry) を導入する必要がある。

超対称性の例

$$\begin{cases} \phi & \text{複素スカラー場} \\ \psi & \text{ワイルフェルミオン} \end{cases}$$

$$\delta\phi = \xi\psi$$

$$\delta\psi = \partial_\mu\phi\,\sigma^\mu\xi$$

ξ : 変換のパラメータ (スピノル)

できるだけ多くの場 (重力、ゲージ場、フェルミオンなど) を統一したい。

できるだけ次元が高い、超対称性をもつ理論を構成したい。

⇓

11次元超重力理論 (11-dim supergravity)

(Cremmer - Sherk - Julia)

問題点

量子論的に定義できるのか?

重力はくり込みができない。
(量子論において現れる発散が除去できない。)

重力の量子論の有力こうほ
||
超弦理論
(superstring theory)

Superstringは

- 10次元の理論
- ひもを基本的自由度とし、ひもの振動モードとして重力場をはじめとしていろいろな場があらわれる。

ギモン
11次元SUGRAとの関係は？

Wittenの提案 ('94)

- M理論と呼ばれる11次元の理論が存在する
- 低エネルギーでは、有効理論として11次元SUGRAが実現される。
- S^1コンパクト化によって、超弦理論を与える。

M理論 = 弦理論の統一理論

- 弦理論は、弦の振動モードから重力場があらわれることは簡単に確かめられる。

- M理論においては membrane の振動モードとして重力場があらわれると期待されるが、未だに示されてはいない。

- 従って、M理論の解析は、低エネルギー有効作用である超重力理論を用いて行われることが多い。

そこで、まずは 11次元 SUGRA についてみておこう。

1.2 11次元超重力理論

参考図書 超重力理論入門 (藤井 他)

11次元超重力理論の作用は

$$S=\int d^{11}x\, e\left[R-\frac{1}{2\cdot 4!}K_{\mu\nu\rho\sigma}K^{\mu\nu\rho\sigma}\right.$$

$$\left.-4\left(\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_\rho\right)+\bar{\psi}_\mu\gamma^{[\mu}\cancel{K}_4{}^{\nu]}\psi_\nu\right]$$

$$-\frac{1}{3!}\int A_3\wedge K_4\wedge K_4$$

$$K_4=dA_3$$

と与えられる。

この作用は次の変換のもとで不変

$$\delta\psi_\mu=D_\mu\xi+\frac{1}{24}\gamma_\mu\cancel{K}_4\xi-\frac{1}{8}\cancel{K}_4\gamma_\mu\xi$$

$$\delta e_\mu^m=2\left(\bar{\xi}\gamma^m\psi_\mu\right)$$

$$\delta A_{\mu\nu\rho}=2\left[\left(\bar{\xi}\gamma_{\mu\nu}\psi_\rho\right)+\left(\bar{\xi}\gamma_{\nu\rho}\psi_\mu\right)+\left(\bar{\xi}\gamma_{\rho\mu}\psi_\nu\right)\right]$$

ただし、作用については ψ_μ の4次の項を無視した。

交換則については $\delta\psi_\mu$ において、$\psi\psi\xi$ を含む項を無視した。

この理論について詳しく見る前に
数学的準備をしておこう。

1.3 スピノルとディラック行列

計量

$$\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1, \underbrace{+1, \cdots, +1}_{10\text{コ}})$$

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{\ m} e_\nu^{\ n} \eta_{mn}$$

$m, n, \ldots$ 局所座標

$\mu, \nu, \ldots$ 大域座標

$$g = \det g_{\mu\nu}$$

$$e = |\det e_\mu^{\ m}|$$

11次元のスピノルは $2^5 = 32$ 成分

ディラック行列は次の式をみたす 32×32 行列

$$\{\gamma_m, \gamma_n\} = 2\eta_{mn}$$

$\gamma_\mu = e_\mu^{\ m} \gamma_m$ なども用いる。

Spinor 添字 $a, b, c, \cdots$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \psi \rightarrow (\gamma_\mu)_a{}^b (\gamma_\nu)_b{}^c \psi_c$$

Charge Conjugation

$$C^T = -C \qquad C^{ab} = -C^{ba}$$

$$(C\gamma_\mu)^T = C\gamma_\mu \qquad C^{ab}(\gamma_\mu)_b{}^c = C^{cb}(\gamma_\mu)_b{}^a$$

スピノル添字の上げ下げはCで行う。

$$\psi^a = C^{ab}\psi_b$$

$$\psi_a = (C^{-1})_{ab}\psi^b$$

C自身も同様に添字を上げ下げできる。

$$C_a{}^b = (C^{-1})_{ac} C^{cb} = \delta_a^b$$

$$C_{ab} = (C^{-1})_{bc} C_a{}^c = (C^{-1})_{ba}$$

これを用いると、

$$\psi^a = C^{ab}\psi_b$$

$$\psi_a = \psi^b C_{ba}$$

Rule

Cを用いて
左上と右下で
つぶす

11次元ではMajorana Spinorが定義できる。

$$\bar{\psi}^a = \psi^a$$

$\bar{\psi}$はDirac共役

$$\bar{\psi} \propto \psi^\dagger \gamma^0$$

比例定数はマヨラナスピノル η と χ（グラスマン数）の積 $(\eta\chi) = \eta^a \chi_a$ が実になるようにとる。

$\eta\chi$ が実になるかどうかは、

- $\bar{\psi} = \square\, \psi^\dagger \gamma^0$ の係数
- C の定義（phaseをどうとるか）
- グラスマン数の積の複素共役を

$$\begin{cases} (ab)^* = b^* a^* \\ (ab)^* = a^* b^* \end{cases}$$ どちらにとるか

に依存する。

ここではこれらそれぞれは特に定めず、
$(\eta\chi)$ が実になるように取ることだけを決めておく。
このとき、間に γ 行列をはさんだ

$$\eta\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_n}\chi$$

も実である。

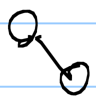
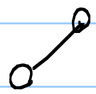
転置公式

$$\begin{cases} C^{ab} = -C^{ba} \\ (\gamma_\mu)^{ab} = (\gamma_\mu)^{ba} \end{cases}$$

を用いると、

グラスマン奇のスピノル η と χ に対して

$$\eta\chi = \eta^a\chi_a = C^{ab}\eta_b\chi_a$$
$$= -\eta_b C^{ba}\chi_a = -\eta_b\chi^b$$

 を  に変えると負号が出る。

$$(\eta\chi) = \eta^a \chi_a$$

$$= -\chi_a \eta^a$$ グラスマン数でマイナス

$$= \chi^a \eta_a$$ でマイナス

$$= (\chi\eta)$$

$$(\eta\gamma^\mu\chi) = \eta^a (\gamma^\mu)_a{}^b \chi_b$$

$$= -\chi_b (\gamma^\mu)^b{}_a \eta^a$$ グラスマン数でマイナス

$$= -\chi^b (\gamma^\mu)_b{}^a \eta_a$$ 2回

$$= -(\chi\gamma^\mu\eta)$$

同様にして、

$$(\eta\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}\chi) = (-)^n(\chi\gamma^{\mu_n}\cdots\gamma^{\mu_1}\eta)$$

つまり、形式的に γ 行列は
反対称行列のように扱える。

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} = \frac{1}{6}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \cdots)$$

11次元の完全反対称テンソルは
次のようにとる。

$$\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{11}} = \underbrace{\mathcal{E}^{\mu_1\cdots\mu_{11}}}_{\text{実数になる。}}\mathbb{1}_{32}$$

テンソル密度は

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}} = e\,\mathcal{E}^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$$

とする。$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$ は成分が ±1 であり、
計量によらない。

$\epsilon^{01\cdots 9\,11}$ が $+1$ か -1 かは決めない。

15

n階反対称テンソル $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対して

$$\cancel{A}_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1\cdots\mu_n} \gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}$$

n個のγ行列の積は、γ行列の反対称積によって分解することができ、

n階、$n-2$階、$n-4$階のγ行列を含む。

(例)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = \gamma^{\mu\nu\rho} + \gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu}$$

フェルミオンに対するWickの定理を用いて計算できる。

propagator $= g^{\mu\nu}$

正規順序積 $=$ 反対称積

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho} = \gamma^{\mu\nu\rho} + \gamma^{\mu}g^{\nu\rho} - \gamma^{\nu}g^{\mu\rho}$$

（μとνの縮約はとらない。）

特定の階数の反対称積をとり出す記号として$\langle\cdots\rangle_n$を用いる。

たとえば

$$\langle\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\rangle_3 = \gamma^{\mu\nu\rho}$$

$$\langle\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\rangle_1 = \gamma^{\mu}g^{\nu\rho} - \gamma^{\nu}g^{\mu\rho} + \gamma^{\rho}g^{\mu\nu}$$

1.4 外微分形式

超重力理論では、反対称テンソルを扱うことが多いので、反対称テンソルを表すのに微分形式を用いるのがよい。

n階反対称テンソル $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対して、n-form A_n を次のように定義する。

$$A_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1\cdots\mu_n} dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}$$

dx^μ は基底であり、$\wedge$ は wedge 積である。$\wedge$ は反対称な積であり

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = - dx^\nu \wedge dx^\mu$$

A_n に対して $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ をその成分と呼ぶ。

18

$u_1 = u_\mu dx^\mu$, $v_1 = v_\mu dx^\mu$ のとき

2-form

$$u_1 \wedge v_1 = u_\mu v_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$= \frac{1}{2}(u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

の成分は、

$$u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu$$

となり、添字が自動的に反対称化される。

「外微分演算子」を次のように定義

$$d = dx^\mu \partial_\mu$$

これを用いると、1-form $A_1 = A_\mu dx^\mu$

から 2-form

$$F_2 = d \wedge A_1$$

を定義できる。この成分は、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

であり、ゲージ場のpotential A_μ
と場の強さ $F_{\mu\nu}$ の関係である。

ウェッジ積の記号はしばしば省略される。

$$F_2 = dA_1$$

A_m と B_n を入れかえると、

$$A_m \wedge B_n = (-)^{mn} B_n \wedge A_m$$

特に、外微分演算子を2回作用させると
0になる。

$$d \wedge d = 0$$

A_μ に対するゲージ変換 $A_\mu = \partial_\mu \lambda$ は

$$\delta A_1 = d\lambda \qquad (\lambda \text{ は } 0\text{-form つまりただの関数})$$

と書ける。

$\delta F_2 = 0$（ゲージ不変）は $d^2 = 0$ より明らか。

あるn次元空間上での n-formの積分は

$$\int A_n \equiv \int d^n x \frac{e}{n!} E^{\mu_1 \cdots \mu_n} A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$$

$$= \int d^n x \frac{1}{n!} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_n} A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$$

によって定義される。これはmetricに依らない。

たとえば、11次元超重力理論に含まれる項は

$$K_4 = dA_3 \longrightarrow K_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma} \pm \text{あと3項}$$

$$-\frac{1}{3!}\int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4$$

$$= -\frac{1}{3!3!4!4!}\int \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_{11}} A_{\mu_1\mu_2\mu_3} K_{\mu_4 \cdots \mu_7} K_{\mu_8 \cdots \mu_{11}}$$

1-5 一般座標変換

ある点の座標 x^μ を x'^μ にとり直す座標変換において、スカラー場の変換は

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$$

無限小変換

$$x^\mu = x'^\mu + \epsilon^\mu$$

に対しては、

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x'^\mu + \epsilon^\mu)$$

$$= \phi(x'^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi$$

従って

$$\delta_{gc}(\epsilon^\mu) = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi$$

1-form $A_1 = A_\mu dx^\mu$ に対しては、

$$A'_\mu(x')dx'^\mu = A_\mu(x)dx^\mu$$

$$= A_\mu(x'+\epsilon)d(x'^\mu+\epsilon^\mu)$$

$$= A_\mu(x')dx'^\mu + \epsilon^\nu\partial_\nu A_\mu dx'^\mu$$

$$+ A_\mu dx^\nu \partial_\nu \epsilon^\mu$$

$$= [A_\mu + \epsilon^\nu\partial_\nu A_\mu + A_\nu\partial_\mu\epsilon^\nu]dx'^\mu$$

$$\therefore \delta^\circ_{gc} A_\mu = \epsilon^\nu\partial_\nu A_\mu + A_\nu\partial_\mu\epsilon^\nu$$

$$= \epsilon^\nu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + \partial_\mu(\epsilon^\nu A_\nu)$$

この第2項はゲージ変換

$$\delta_{gauge}(\lambda)A_\mu = \partial_\mu\lambda$$

の形をしている。

そこで

$$\delta_{gc} = \delta^{0}_{gc} - \delta_{gauge}(\epsilon^{\nu} A_{\nu})$$

によって一般座標変換を定義し直すと

$$\delta_{gc} A_{\mu} = \epsilon^{\nu} F_{\nu\mu}$$

のように、共変な形になる。

ゲージ場の一般座標変換を行うときは、このように座標のずれに伴うゲージ変換を常に同時に行うことにする。

1-5 捩率と曲率

局所座標のベクトル v^m に対する
共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu v^m = \partial_\mu v^m + \omega_\mu{}^m{}_n v^n$$

ただし、$\omega_{\mu mn}$ は Spin 接続である。
これらは 1-form として

$$Dv^m = dv^m + \omega^m{}_n v^n$$

のようにも書く。

$$\omega_{mn} = dx^\mu \omega_{\mu mn}$$ など。

さらに、ω_{mn} を行列として表し、

$$Dv^m = dv^m + (\omega v)^n$$

あるいは

$$D = d + \omega$$

のようにも表す。

Spinor ψに対する共変微分は、

$$D\psi_a = \partial\psi_a + \frac{1}{4}\omega_{mn}(\gamma^{mn})_a{}^b\psi_b$$

大域座標の添字に対しては、
共変化は行わない。

$$D_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu$$

これはテンソルにはならない。
しかし添字を反対称化した

$$\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu \partial_\mu$$

はテンソルであることが確かめられる。
実は、超重力理論においては
このように反対称化されたものだけが
あらわれる。

たとえばラグランジアン中にある項

$$-4(\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho)$$

に含まれる共変微分

$$D_\nu \psi_\rho = \partial_\nu \psi_\rho + \frac{1}{4}\omega_{\nu mn}\gamma^{mn}\psi_\rho$$

$$(-\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\psi_\sigma \text{ という項はない})$$

は、そのままでは共変ではないが、ラグランジアン中では添字が反対称化されているので問題はない。

vielbein $e^m = dx^\mu e_\mu^m$ に対して、

捩率 $T^m = \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^m$ を

$$T = De$$

によって定義する。

多脚場仮説

$$\nabla_\mu e_\nu^m \equiv D_\mu e_\nu^m - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^m$$

を用いると、

$$T_{\mu\nu}{}^m = D_\mu e_\nu^m - D_\nu e_\mu^m$$
$$= (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho) e_\rho^m$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$: affine connection

リーマン時空では、$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ と仮定される。しかし、supergravity ではこの仮定はおかない。

→ リーマン・カルタン時空

$$T_{\mu\nu}^m = 2(\psi_\mu \gamma^m \psi_\nu)$$

フェルミオンの高次の項を無視する計算では $T_{\mu\nu}^m = 0$ と思っても問題ない。

1-6 不変性の確認

準備がととのったので、作用が超対称変換のもとで不変であることを確認しておく。

(ただしフェルミオンについて2次まで)

ラグランジアンは以下のものの和

$$\mathcal{L}_E = eR$$

$$\mathcal{L}_\psi = -4e(\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho)$$

$$\mathcal{L}_K = -\frac{e}{2\cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{3!3!4!4!} \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}} A_{\mu_1\mu_2\mu_3} K_{\mu_4\cdots\mu_7} K_{\mu_8\cdots\mu_{11}}$$

$$\mathcal{L}_Y = e\bar{\psi}_\mu \gamma^{[\mu} \cancel{K}_4 \gamma^{\nu]} \psi_\nu$$

変換は、

$$= e\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^\mu K_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} \psi_\nu$$

$$\delta_{\psi 1} \psi_\mu = D_\mu \xi$$

$$\delta_{\psi 2} \psi_\mu = \frac{1}{24} \gamma_\mu \cancel{K}_4 \xi - \frac{1}{8} \cancel{K}_4 \gamma_\mu \xi$$

$$\delta_e \, e_\mu^m = 2(\bar{\xi} \gamma^m \psi_\mu)$$

$$\delta_A \, A_{\mu\nu\rho} = 2\left[(\bar{\xi}\gamma_{\mu\nu}\psi_\rho) + (\bar{\xi}\gamma_{\nu\rho}\psi_\mu) + (\bar{\xi}\gamma_{\rho\mu}\psi_\nu)\right]$$

不変性を示すためにチェックすべきなのは、

K_φを含まない

$$\delta_e \mathcal{L}_E + \delta_{\psi 1}\mathcal{L}_\psi = 0 \quad -①$$

K_φの1次

$$\delta_A \mathcal{L}_K + \delta_A \mathcal{L}_Y + \delta_{\psi 2}\mathcal{L}_\psi = 0 \quad -②$$

K_φの2次

$$\delta_e \mathcal{L}_K + \delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y + \delta_A \mathcal{L}_{CS} = 0 \quad -③$$

①について、

$$\delta_{\psi 1}\mathcal{L}_\psi = -8e\left(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu D_\rho \xi\right)$$

$$= -4e\left(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} [D_\nu, D_\rho] \xi\right)$$

$[D_\nu, D_\rho]\xi = \frac{1}{4} R_{\nu\rho mn}\gamma^{mn}\xi$ を用いて、

$$= -e\left(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{mn}\xi\right) R_{\nu\rho mn}$$

30

$\langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_{5,3}$ の部分は $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ よりOになることがわかる。

$$\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_E = -e(\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_1 \xi) R_{\nu\rho mn}$$

$$= 4e\left(R^\mu_m - \frac{1}{2} e^\mu_m R\right)(\bar{\xi} \gamma^m \psi_\mu)$$

これは、

$$\delta_e \mathcal{L}_E = -2e\left(R^\mu_m - \frac{1}{2} e^\mu_m R\right) \delta e^m_\mu$$

と cancel する。

② について、

$$\delta_{\psi 2} \mathcal{L}_U = -8 \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \left(\frac{1}{24} \gamma_\rho \cancel{K}_4 \xi - \frac{1}{8} \cancel{K}_4 \gamma_\rho \xi \right)$$

$$\text{第1項} = -\frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho D_\nu \cancel{K}_4 \xi$$

$$= -3 \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} D_\nu \cancel{K}_4 \xi$$

31

$$第2項 = (\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \cancel{K}_4 \gamma_\rho \xi)$$

$$= \frac{1}{2}(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho D_\nu \cancel{K}_4 \gamma_\rho \xi)$$

$$+ \frac{1}{2}(\psi_\mu \gamma^\rho \gamma^{\mu\nu} D_\nu \cancel{K}_4 \gamma_\rho \xi)$$

$$= \frac{3}{2}(\psi_\mu D_\nu \gamma^{\mu\nu} \cancel{K}_4 \xi)$$

$$+ \frac{1}{2}(\psi_\mu \gamma^\rho \gamma^{\mu\nu} D_\nu \cancel{K}_4 \gamma_\rho \xi)$$

$$第1項+第2項 = -\frac{3}{2}(\psi_\mu D_\nu \langle \gamma^{\mu\nu} \cancel{K}_4 \rangle_{6,4,2} \xi)$$

$$+ \frac{1}{2}(\psi_\mu \gamma^\rho D_\nu \langle \gamma^{\mu\nu} \cancel{K}_4 \rangle_{6,4,2} \gamma^\rho \xi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^\rho \langle\ \rangle_6 \gamma_\rho = -\langle\ \rangle_6 \\ \gamma^\rho \langle\ \rangle_4 \gamma_\rho = 3\langle\ \rangle_4 \\ \gamma^\rho \langle\ \rangle_2 \gamma_\rho = 7\langle\ \rangle_4 \end{array}\right)$$ を用いて、

$$= -2(\psi_\mu D_\nu \langle \gamma^{\mu\nu} \cancel{K}_4 \rangle_6 \xi)$$

$$+ 2(\psi_\mu D_\nu \langle \gamma^{\mu\nu} \cancel{K}_4 \rangle_2 \xi)$$

$$= -2(\psi_\mu D_\nu \langle \gamma^\mu \cancel{K}_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} \xi)$$

これを

$$\delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y = 2e\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^\mu \cancel{K}_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} D_\nu \xi$$

とあわせると、

$$\delta_{\psi 1}\mathcal{L}_Y + \delta_{\psi 2}\mathcal{L}_4 = -2e\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^\mu (D_\nu \cancel{K}_4)\gamma^\nu \rangle_{6,2}\xi$$

K_4 のビアンキ恒等式

$$D_{[\mu} K_{\nu\rho\sigma\tau]} = 0$$

を用いると $\langle\cdots\rangle_6$ 部分は0.

$$= -2e\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^\mu (D_\nu \cancel{K}_4)\gamma^\nu \rangle_2 \xi$$

$$= -\frac{2}{24} e\bar{\psi}_\mu \langle \gamma^\mu \gamma_{\rho\sigma\tau\nu} \gamma^\nu \rangle_2 \xi\, D_\nu K^{\rho\sigma\tau\nu}$$

$$= -e(\bar{\psi}_\mu \gamma_{\sigma\tau} \xi) D_\nu K^{\mu\sigma\tau\nu}$$

$$= eK^{\mu\nu\sigma\tau} D_\nu (\bar{\xi}\gamma_{\tau\sigma}\psi_\mu)$$

$$= \frac{e}{6} K^{\mu\nu\sigma\tau} D_\nu \delta A_{\tau\sigma\mu}$$

$\delta_A \mathcal{L}_K$ と cancel

③ K_4を2つ含むのは、

$$\delta_{\psi_2}\mathcal{L}_\gamma = e\psi_\mu\left(\gamma^\mu \cancel{K}_4 \gamma^\nu - \gamma^\nu \cancel{K}_4 \gamma^\mu\right)\left(\frac{1}{24}\gamma_\nu \cancel{K}_4 - \frac{1}{8}\cancel{K}_4\gamma_\nu\right)\xi$$

$$= \frac{1}{8} e\psi_\mu\left(\cancel{K}_4\gamma^\mu\cancel{K}_4 + \gamma^\nu\cancel{K}_4\gamma^\mu\cancel{K}_4\gamma_\nu\right)\xi$$

$$= e\psi_\mu\langle\cancel{K}_4\gamma^\mu\cancel{K}_4\rangle_9\,\xi$$

$$- e\psi_\mu\langle\cancel{K}_4\gamma^\mu\cancel{K}_4\rangle_1\,\xi$$

$\langle\cdots\rangle_9$ は $\delta_A\mathcal{L}_{CS}$ と相殺

$\langle\cdots\rangle_1$ は $\delta_e\mathcal{L}_K$ と相殺

これで $\delta\mathcal{L}=0$ が（ψ^2までのオーダーで）示された。

ψ^4項まで考慮する場合は、よりsystematicな方法（superspace）を用いるのがよい。

2 M-brane

2-1 電荷と磁荷

作用 S は次のゲージ変換のもとで不変

$$\delta A_3 = d\Lambda_2$$

あるいは

$$\delta A_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \Lambda_{\rho\mu} + \partial_\rho \Lambda_{\mu\nu}$$

つまり、A_3 はゲージ場であり、

Maxwell 場 A_1 を拡張したものになっている。

Maxwell場 $\left\{ \begin{array}{l} \text{電荷} \\ \text{磁荷} \end{array} \right.$ と結合する。

A_3 に対する電荷、磁荷は何であろうか?

まず Maxwell 場の場合を復習しよう。

Maxwell理論において、

ゲージ場の作用は

$$S_{em} = \int d^4x \left(\frac{\varepsilon}{2} \mathbb{E}^2 - \frac{1}{2\mu} \mathbb{B}^2 \right)$$

と与えられる。ただし、

$\mathbb{E}$: 電場の強さ

$\mathbb{B}$: 磁束密度

電束密度 $\mathbb{D}$ と磁場の強さ $\mathbb{H}$ は

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathbb{E}}, \quad \mathbb{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathbb{B}}$$

によってきまる。これは次のようにも書ける。

$$\delta L = \int d^3x \, \mathbb{D}\delta\mathbb{E} - \mathbb{H}\delta\mathbb{B}$$

ローレンツ対称性を見易くするためには

$$\begin{cases} F_{i0} = E_i \\ F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \end{cases}$$

によって $F_{\mu\nu}$ を定義するのがよい。

このとき

$$\delta S = \int \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\mu\nu} \, \delta F_{\rho\sigma}$$

$$= \int \tilde{F}_2 \wedge \delta F_2$$

によって $\tilde{F}_2$ を定義すれば、

$$\tilde{F}_{i0} = H_i$$

$$\tilde{F}_{ij} = -\epsilon_{ijk} D_k$$

となる。

ある粒子のチャージが

$$g = \oint D \cdot dS = \oint \tilde{F}_2$$

によって与えられることは以下のようにして示される。

$$S = S_{em} + S_{ele}$$

$$= S_{em}[F_2] + q\int_C A_1$$

$$= S_{em}[F_2] + q\int_4 \delta_3(C) \wedge A_1$$

ただし、$\delta_3(C)$ は粒子の位置を表す

δ-関数的な 3-form

$(x^1, x^2, x^3) = (x^1_0, x^2_0, x^3_0)$ に

静止した粒子であれば、

$$\delta_3(C) = \delta(x^1 - x^1_0)\,dx^1 \wedge \delta(x^2 - x^2_0)\,dx^2 \wedge \delta(x^3 - x^3_0)\,dx^3$$

S を A_1 で変分すると、

$$\delta S = \delta S_{em}[F_2] + q\int_4 \delta_3(C) \wedge \delta A_1$$

$$= \int_4 \tilde{F}_2 \wedge d\delta A_1 + q\int_4 \delta_3(C) \wedge \delta A_1$$

$$= \int_4 \left(-d\tilde{F}_2 + q\delta_3(C)\right) \wedge \delta A_1$$

よって、運動方程式は、

$$d\tilde{F}_2 = g\,\delta_3(c)$$

この両辺を、粒子を含むボール状の空間B

で積分すると

$$\int_B d\tilde{F}_2 = g$$

さらに、ストークスの定理

$$\int_B d\omega = \oint_{\underbrace{\partial B}_{\text{Bの表面}}} \omega$$

を用いると

$$g = \oint_{\partial B} \tilde{F}_2$$

$$= \oint_{\partial B} \mathbb{D}\cdot d\mathbb{S}$$

得られる。

磁荷については、このような積分を用いて定義する。すなわち、ある粒子のまわりの積分が

$$\oint F_2 = \oint B \cdot dS = g_m$$

であるとき、g_m をその粒子の磁荷であるという。

磁荷とゲージ場の作用を書くには、双対場 $\tilde{F}_2 = d\tilde{A}_1$ を用いる必要がある。

$$S_m = g_m \int \tilde{A}_1$$

40

ゲージ場の作用

$$S_{em}[F_2]$$

を双対場を用いて書くには、ルジャンドル変換

$$\tilde{S}_{em}[\tilde{F}_2] = S_{em}[F_2] - \int \tilde{F}_2 \wedge F_2$$

とすればよい。

$L(\mathbb{E}, \mathbb{B})$ に対して、

$$\delta L = \int d^3\mathbb{r} \left(\mathbb{D} \cdot \delta \mathbb{E} - \mathbb{H} \cdot \delta \mathbb{B} \right)$$

$\tilde{L} = L - \mathbb{D} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{B}$ を定義すると

$$\delta \tilde{L} = \int d^3\mathbb{r} \left(\mathbb{B} \cdot \delta \mathbb{H} - \mathbb{E} \cdot \delta \mathbb{D} \right)$$

となり、$\tilde{L}(\mathbb{H}, \mathbb{D})$ であることがわかる。

2-2 ブレーン

質量 m

チャージ q をもつ粒子の作用は

$$S_{ele} = -m\int ds + q\int A_\mu dx^\mu$$

である。積分は粒子の世界線上で行われる。

世界線上のパラメータ(座標)を σ とすると、

$$S_{ele} = -m\int\sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}g_{\mu\nu}}\,d\sigma + q\int A_\mu\frac{dx^\mu}{d\sigma}d\sigma$$

と書くこともできる。

4次元の A_μ $\longrightarrow$ 11次元の $A_{\mu\nu\rho}$

の一般化を考える。

ゲージ場との結合項に注目する。

Maxwell理論のA_μを11-dim SUGRAの

$A_{\mu\nu\rho}$におきかえた場合、最も自然な

拡張は

$$g\int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}d\sigma \longrightarrow g\int A_{\mu\nu\rho}\frac{dx^\mu}{d\sigma^0}\frac{dx^\nu}{d\sigma^1}\frac{dx^\rho}{d\sigma^2}d^3\sigma$$

である。このとき積分は$(\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2)$を

座標とする3次元の面上で行われる。

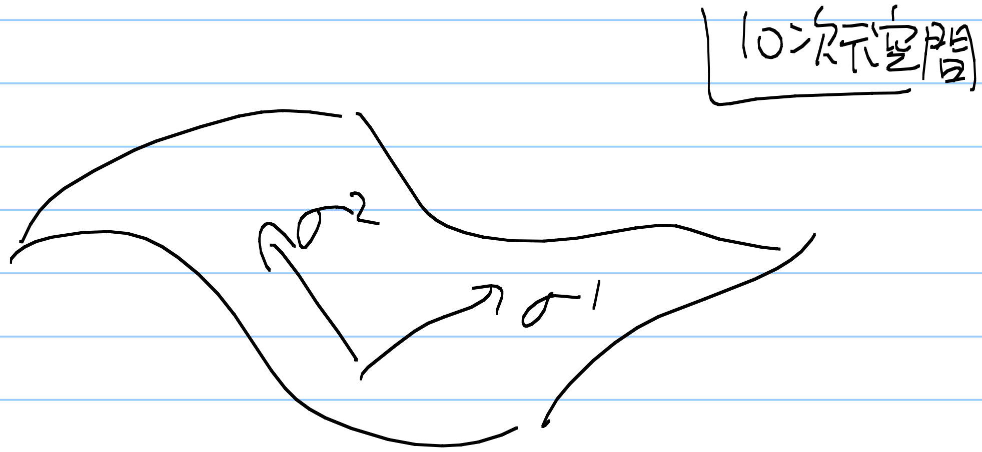
この作用を単に

$$S = g\int A_3$$

とも表す。

従って、A_3に対して電荷をもつ物体は

membraneである。



この membrane のことを特に
M2-brane と呼ぶ。

p-brane … 空間 p 次元にひろがったもの

0-brane = particle
1-brane = string
2-brane = membrane.

質量を含む項については、

$$S = -m\int ds = -m\ (\text{world line の長さ})$$

↓

$$S = -T\ (\text{world volume の体積})$$

$$= -T\int d^3\sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}$$

$G_{\alpha\beta}$: M2-brane 上の計量

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^\beta} g_{\mu\nu}$$

のように拡張するのが自然である。
この作用を 南部-後藤作用と呼ぶ。

T は M2-ブレーンの張力を表している。
南部-後藤作用で表わされるブレーンにおいては

張力 ＝ エネルギー密度

である。

$A_{\mu\nu\rho}$に対する磁荷を考えるには、
双対場を定義する。

超重力理論の作用に含まれるゲージ場の
運動項は

$$S = \int d^{11}x \left(- \frac{e}{2\cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int *K_4 \wedge K_4$$

であるから、

$$\delta S = \int *K_4 \wedge \delta K_4$$

であり

$$K_7 = *K_4$$

が双対場である。ポテンシャルを

$$K_7 = dA_6 \quad (\text{\textit{せい}})$$

によって定義すれば、

磁荷との結合は、

$$S_m = g_m \int A_6$$

によって与えられる。この積分は6次元の空間上で定義されるから、これは 5-brane を表している。
この 5-brane は M5-brane と~~呼~~ばれる。

これで、M-theory の登場人物がそろった。

$$\text{M-theory} \begin{cases} \text{11-dim SUGRA} \\ \text{M2-brane} \\ \text{M5-brane} \end{cases}$$

2種類のブレーンの性質をくわしく見ていこう。

2-3 Diracの量子化条件.

M2-braneとM5-braneのチャージをg_{M2}とg_{M5}とする。すなわち、これらbraneとゲージ場との結合を

$$S_{M2}=g_{M2}\int A_3 \qquad S_{M5}=g_{M5}\int A_6$$

とする。

g_{M2}, g_{M5}はブレーンの最も基本的な性質をあらわすパラメータである。

量子論的な無矛盾性は、これらがディラックの量子化条件をみたすことを要求する。

M2-braneの作用は次の項を含む

$$S_{M2} = g_{M2} \int_N A_3$$

NはM2-braneのworldvolumeである。これはゲージ不変である。そのことは以下のようにして示すことができる。

まずN₀を基準として、Nはそこから連続変形によって得られると仮定する。その場合

$$S_N - S_{N_0} = g_{M2} \int_N A_3 - g_{M2} \int_{N_0} A_3$$

$$= g_{M2} \int_X dA_3$$

$$= g_{M2} \int_X K_4$$

ただし X は N_0 と N まで動かすときに掃く4次元の空間であり、途中でストークスの定理を用いた。

最後の表式は明らかにゲージ不変である。この作用は、N と N_0 を決めたときに一意的に決まるだろうか？

N と N_0 が与えられたとしても、その間をつなぐ X には無数の可能性がある。

量子論において、作用は

$$\int D\phi \cdots \ e^{iS/\hbar}$$

の形であらわれるから、S が $2\pi\hbar = h$ の整数倍だけずれたものは、物理的に同じである。

50

従って、NとN₀をつなぐ2つのX（X₁とX₂）に対して、次の式が成り立てばよい。

$$g_{M2}\int_{X_1} K_4 - g_{M2}\int_{X_2} K_4 = nh \qquad n\in\mathbb{Z}$$

あるいは、X₁とX₂からできる閉4次元空間をYとして

$$g_{M2}\oint_{Y} K_4 = nh$$

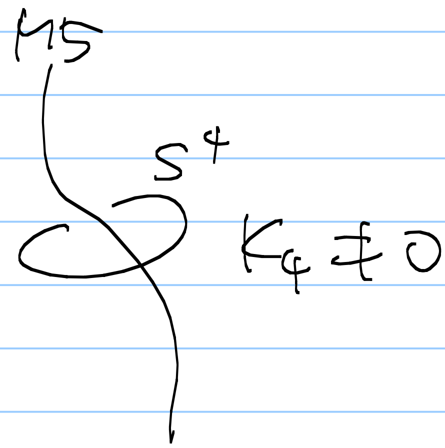
これが任意のYに対して成り立たなければならない。

これをフラックスの量子化条件と呼ぶ。

M5−braneが存在し、そのチャージによって
そのまわりのゲージ場が誘起されている
状況を考えよう。

次の式が成り立つ。

$$\oint_{S^4} K_4 = g_{M5}$$



これをフラックスの量子化条件と組み
合わせることにより、

$$g_{M2}\, g_{M5} = n h$$

が得られる。整数 n は決まらないが、
「存在し得るものは存在する」と考えると、
$n=1$ととるのが自然である。

$$g_{M2}\, g_{M5} = h \ (=1)$$

52

実は、さらに詳しく調べると、

$$g_{M2} = g_{M5} = 1$$

でなければならないことがわかる。

これはあとで示すこととし、しばらくはこれを仮定として認めることにする。

2-4 ブレーンの微小振動

ゲージ場のない背景上のブレーンを考えよう。

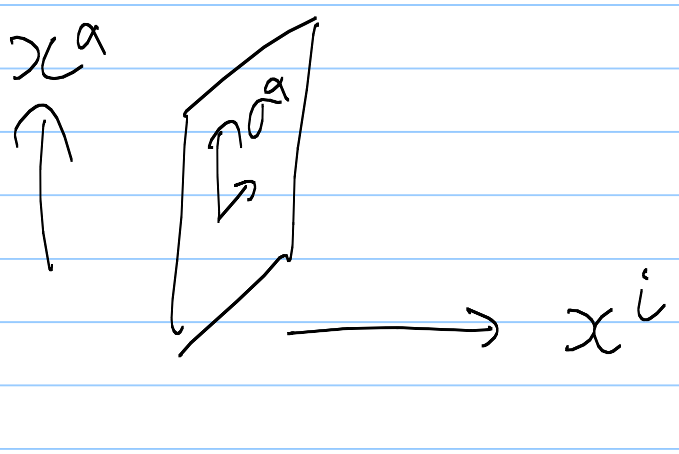
ここでは時空の次元をDとし、ブレーンの次元を$p+1$（すなわちp-brane）とする。

ブレーンの作用は

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}$$

である。

一般のブレーンの運動を扱うのはむずかしいので、p-braneがx^α $(\alpha=0,\cdots,p)$方向に広がっており、x^i $(i=p+1,\cdots,D-1)$方向に微小振動している状況を考える。



ブレーン上の座標 σ^α $(\alpha=0,\dots,p)$ を次のようにとる。

$$\sigma^\alpha = x^\alpha$$

このとき、brane上の計量は、

$$G_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\beta}$$

この第2項が微小だと思って作用を展開すると、

$$S = -T\int d^{p+1}\sigma \left(1+\frac{1}{2}\partial_\alpha x^i \partial^\alpha x^i + O(\partial x^4)\right)$$

第1項は定数なので無視できる。第2項はスカラー場の運動項とみなすことができる。

$$\phi^i = T^{1/2} x^i$$

を定義すると、

55

$$S = \int d^{p+1}\sigma \left[-\frac{1}{2}\partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i + T\mathcal{O}\left((T^{-1/2}\partial x)^4 \right) \right]$$

この第2項はTの負べきを含む。
低エネルギーの極限、あるいは
$T \to \infty$ の極限を考えれば、

$$S = \int d^{p+1}\sigma \left(-\frac{1}{2}\partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i \right)$$

となり、p+1次元時空上の
D−(p+1)コのmasslessスカラー場
の理論が得られる。

このスカラー場は、どんなブレーン上にも
存在する。さらに、Mーブレーン上には
これら以外の場も存在している。

Mブレーン上にどのような場が存在するか
を明らかにすることは、Mブレーンを調べる
上で重要である。

2-5 Open M2-brane

Maxwell方程式から電荷の保存則が得られることはよく知られている。

外微分形式で表したMaxwell方程式は、

$$d\tilde{F}_2 = J_3 \quad ☆$$

4元カレント

ただし J_3 は $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^\sigma$ を成分とする3-formで、荷電粒子の場合には、

$$J_3 = g\,\delta_3(C)$$

である。☆ の両辺に d を作用させると、

$$0 = dJ_3$$

となり、これは保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ を与えている。

又は、荷電粒子のworld lineが途中でとぎれないことを表しているとみなすこともできる。

たとえば、$x^i = 0$にある粒子が$x^0 = 0$にとつぜん現れたとすると

$$\delta_3(c) = \underbrace{\theta(x^0)}_{\text{step function}}\delta(x^1)dx^1\wedge\delta(x^2)dx^2\wedge\delta(x^3)dx^3$$

これに外微分を作用させると、

$$d\theta(x^0) = \frac{\partial\theta(x^0)}{\partial x^0}dx^0$$
$$= \delta(x^0)\,dx^0$$ を用いて

$$d\delta_3(c) = \delta(x^0)dx^0\wedge(\quad \text{''} \quad)$$

となり、保存則をみたさない。

→禁止される。

58

同様な解析をM-braneに対しても行ってみよう。

SUGRA作用のゲージ場部分は、

$$S=\int\left(\frac{1}{2}*K_4\wedge K_4-\frac{1}{6}A_3\wedge K_4\wedge K_4\right)$$

A_3に対する運動方程式を求めるために変分すると、

$$\delta S=\int\left(*K_4\wedge d\,\delta A_3-\frac{1}{3}\delta A_3\wedge K_4\wedge K_4\right)$$

運動方程式、ビアンキ恒等式は

$$\begin{cases} dK_4=0 \\ dK_7=\frac{1}{2}K_4\wedge K_4 \end{cases}$$

ただし、$K_7=*K_4$である。

2番目の式を K_7 に対するビアンキ恒等式だと思えば

$$K_7 = dA_6 + \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4$$

と表すことができる。

K_4, K_7 を不変にするゲージ変換は

A_3ゲージ変換 $\begin{cases} \delta A_3 = d\Lambda_2 \\ \delta A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4 \end{cases}$

A_6ゲージ変換 $\begin{cases} \delta A_3 = 0 \\ \delta A_6 = d\Lambda_5 \end{cases}$

である。

さきほどの式にブレーンのchargeの効果をとり込むと、

$$\begin{cases} dK_4 = J_5^{M5} \\ dK_7 = J_8^{M2} + \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4 \end{cases}$$

チャージの保存則を得るために、
Maxwell 理論の場合のまねをして
2の両辺に外微分を作用させよう。

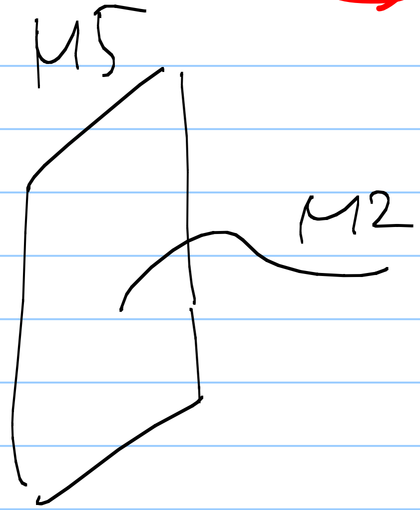
$$
\begin{cases}
0 = dJ_5^{M5} \\
0 = dJ_8^{M2} + dK_4 \wedge K_4 \\
\quad = dJ_8^{M2} + J_5^{M5} \wedge K_4
\end{cases}
$$

ひとつ目の式は、M5-brane の current
が保存し、M5-brane は端をもたない
ことを意味している。

一方、2つ目の式は、M2-brane のカレント
の保存則が M5-brane が存在するところ
で破れてもよいこと、つまり、

M2-brane が M5-brane に端をもてる
ことを意味している。

このような、端をもつM2-braneはopen M2-braneと~~呼~~呼ばれる。



open M2-braneとゲージ場A_3の結合は、

$$S = \int_{M2} A_3 \qquad (g_{M2}=1 \text{ とした})$$

ゲージ変換 $\delta A_3 = d\Lambda_2$ を行うと、

$$\delta S = \int_{M2} d\Lambda_2$$

$$= \int_{\partial M2} \Lambda_2$$ …ゲージ不変でない。

この問題を解決するには、M2-braneの境界に

$$S = \int_{\partial M2} b_2$$

のように結合する場 b_2 があって、
A_3 ゲージ変換のもとで、

$$\begin{cases} \delta A_3 = dA_2 \\ \delta b_2 = -A_2 \end{cases}$$

と変換されるとすればよい。

11次元 SUGRA には、このような場は存在しないから、b_2 は M5-brane 上の場とみなす必要がある。

次に M5-brane と A_6 の結合を考えてみよう。

$$S = \int A_6 \qquad (g_{M5} = 1 \text{とした})$$

今度もやはり A_3ゲージ変換

$$\delta A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2\wedge K_4$$

のもとで不変ではない。

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \Lambda_2\wedge K_4$$

これも b_2 を用いた coupling を導入し

$$S = \int\left(A_6 - \frac{1}{2}b_2\wedge K_4\right)$$

$$= \int\left(A_6 + \frac{1}{2}H_3^0\wedge A_3\right)$$

(ただし $H_3^0 = db_2$)

とすれば解決できる。

H_3^0は b_2 の場の強さであり、

b_2ゲージ変換 $\delta b_2 = d\lambda_1$ のもとで

不変

A_3ゲージ変換のもとで不変ではない。

$$\delta H_3^0 = - dA_2$$

ゲージ不変な場の強さは

$$H_3 = db_2 + A_3$$

によって定義される。

H_3のビアンキ恒等式は、

$$dH_3 = K_4$$

b_2の作用は次のような形をしているだろう。

$$S_{M5} = \int \left(a * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2} H_3 \wedge A_3 + A_6 \right)$$

aは定数。これから決める。

2-6 b_2の作用

ゲージ場b_2はM2-braneの境界$\partial M2$と
電気的に結合した。

それでは磁気的に結合するものは?
双対場 $\tilde{H}_3 = *H_3$ も H_3と同じ
3-formなので、$\tilde{b}_2$は 2-form
→ 1+1次元のものにcoupleする。

しかし、そのようなものは見当たらない。

実は、$\tilde{H}_3$とH_3は同じもの。
b_2に対しては、電荷と磁荷の
区別はない。

$\tilde{H}_3 = H_3$という条件を課せるためには、
H_3の作用を$\tilde{H}_3$で書きかえたときに、
不変であればよい。

66

H_3で書かれた作用は、

$$S_{M5}=\int\left(a*H_3\wedge H_3+\frac{1}{2}H_3\wedge A_3+A_6\right)$$

電磁双対変換 $H_3\to\tilde{H}_3$を行うには、

H_3を独立場として扱うために、

ラグランジュ未定乗数を用いて、

$$S'=\int\frac{1}{2}\tilde{b}_2\wedge(dH_3-K_4)$$

を導入する。$\tilde{b}_2$に対する運動方程式

が H_3に対するビアンキ恒等式を与え、

$$H_3=db_2+A_3$$

と書けることを保障するから、H_3を

独立な場として扱うことができる。

H_3に対する運動方程式は、

$$2a*H_3-\frac{1}{2}A_3-\frac{1}{2}d\tilde{b}_2=0$$

⑥⑦

従って、$\tilde{H}_3 = d\tilde{b}_2 + A_3$ を定義すると、

$$H_3 = * \frac{1}{4a}\tilde{H}_3$$

これを代入すると、

$$S_{M5} = \int \left(-\frac{1}{16a} * \tilde{H}_3 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{8a} * \tilde{H}_3 \wedge A_3 + A_6 \right)$$

$$S' = -\int \frac{1}{2} d\tilde{b}_2 (H_3 - A_3)$$

$$= -\int \frac{1}{2}(\tilde{H}_3 - A_3)\left(* \frac{1}{4a}\tilde{H}_3 - A_3\right)$$

$$= \int \left(\frac{1}{8a} * \tilde{H}_3 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{2}\tilde{H}_3 \wedge A_3 + \frac{1}{8a} A_3 \wedge * \tilde{H}_3 \right)$$

$$S_{M5} + S' = \int \left(\frac{1}{16a} * \tilde{H}_3 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{2}\tilde{H}_3 \wedge A_3 + A_6 \right)$$

もし $a = \frac{1}{4}$ であれば、はじめに与えた action と全く同じ形、、

M5-brane上のゲージ場の作用（H_3の2次まで）

$$S_{M5}=\int\left(\frac{1}{4}*H_3\wedge H_3+\frac{1}{2}H_3\wedge A_3+A_6\right)$$

$$*H_3=H_3$$

ブレーン上の自由度をまとめておく。

	自由度の数
M2-brane	
スカラー場×8	8
M5-brane	
スカラー場×8	5
自己双対 2-form場 ×1	3

どちらも8個ずつのbosonicな自由度がある。

実はさらに8個の自由度をもつフェルミオンが存在する。

2-7 ブレーンの束縛状態

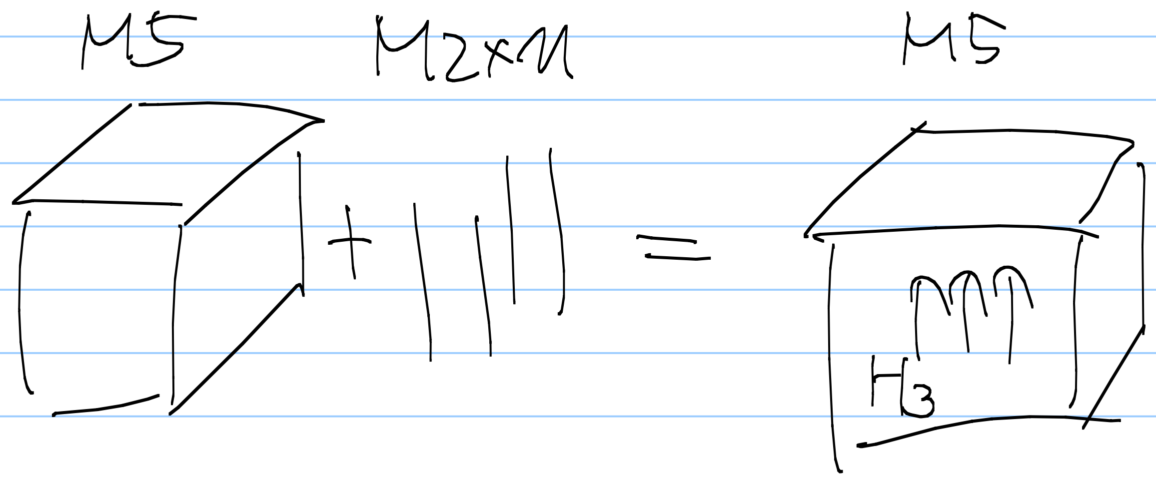
M5-brane作用の中からA_3を含む項をぬき出すと、

$$S=\int\frac{1}{2}\left(H_3^0+*H_3^0\right)\wedge A_3$$
$$=\int H_3^0\wedge A_3$$

ただし、A_3について高次の項は無視した。

この項の存在は、M5-brane上にflux H_3^0が存在すると、M2-braneのchargeをもつことを意味する。

M5上にfluxがある場合、それはM2-braneがM5-braneに吸収された束縛状態であるとみなすことができる。



何枚のM2-braneが吸収されているかは、fluxの積分で決まる。

$$\oint H_3 = n$$

(fluxの量子化条件のためにこれは整数)

本当に束縛状態になっているかどうかは、どちらのエネルギーが低いかで決まる。

→ あとで計算する。

2-8 理論の一意性

超重力理論の作用は、場の再定義の自由度を除き1つしかない。

しかし、brane を導入するとその charge をどのように取るかという自由度があらわれる。

ブレーンの charge が異なれば、それらは異なる理論である。

しかし、ここまでの議論をふり返ると、

$$g_{M2} = g_{M5} = 1$$

でなければならないことがわかる。

まずディラックの量子化条件より、

$$\begin{cases} g_{M2} = g \\ g_{M5} = \dfrac{1}{g} \end{cases}$$

とおける。

$$S_{M2} = g\int_{M2} A_3 , \qquad S_{M5} = \frac{1}{g}\int_{M5} A_6$$

open M2-brane の作用をゲージ不変に保つために

$$S = \int_{\partial M2} b_2$$

を導入。A_3 ゲージ変換は、

$$\begin{cases} \delta A_3 = d\Lambda_2 \\ \delta A_6 = -\dfrac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4 \\ \delta b_2 = -g\Lambda_2 \end{cases}$$

M5-brane 作用がゲージ不変であるためには

$$S=\int\left(\frac{1}{g}A_6+\frac{1}{2g}H_3\wedge A_3+a*H_3\wedge H_3\right)$$

双対変換をすると、

$$S=\int\left(\frac{1}{g}A_6+\frac{1}{2g}\tilde{H}_3\wedge A_3+\frac{1}{16ag^6}*\tilde{H}_3\wedge\tilde{H}_3\right)$$

よって、$\tilde{H}_3=H_3$と矛盾しないためには

$$a=\frac{1}{16ag^6}\rightarrow a=\frac{1}{4g^3}$$

さらに、A_3とフラックスH_3^0の結合をぬき出せば、

$$S=\frac{1}{g^2}\int H_3^0\wedge A_3$$

すなわち、H_3^0のフラックス1本あたり$\frac{1}{g^2}$のM2-brane chargeをもつ。

これが、もとの M2-brane charge g と

一致するためには

$$\frac{1}{g^2} = g$$

つまり、$g = 1$ でなければならない。

M理論の基礎 part 2 ①

3-1 超対称代数

ほとんど平坦である背景上に微小な場がある状況を考える。この場合、変換パラメータ ξ^a を座標によらない定数とした、大域的超対称性を考えることができる。そのgenerator を Q_a としよう。

Q_a は 32成分をもつ Spinor であり、それぞれの成分はグラスマン偶、エルミート。

Q の反交換関係 $\{Q_a, Q_b\}$ は Spinor 添字の入れかえに対して対称なので

$$(\gamma^\mu)_{ab},\ (\gamma^{\mu\nu})_{ab},\ (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{ab}$$

で展開できる。

②

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = (\gamma_\mu)_{ab} P^\mu + \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\nu})_{ab} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{5!}(\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{ab} Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$$

右辺にあらわれた charge P^μ, $Z^{\mu\nu}$, $Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ は何.

グラスマン偶なので、bosonic sym に対応するはず。

11-dim SUGRAは次の対称性をもっていた。

・一般座標変換

$$\begin{cases} \delta_{gc} e_\mu{}^m = D_\mu \epsilon^m \\ \delta_{gc} A_{\mu\nu\rho} = \epsilon^\lambda K_{\lambda\mu\nu\rho} \\ \delta_{gc} A_6 = \epsilon^\mu K^0_{\mu[6]} + \frac{1}{2}\epsilon^\mu A_{\mu[2]} \wedge K_4 \end{cases}$$

$K^0_7 = dA_6$

・局所ローレンツ変換

$$\begin{cases} \delta_M e_\mu{}^m = e_\mu{}^n \Lambda_n{}^m \\ \delta_M A_3 = 0 \\ \delta_M A_6 = 0 \end{cases}$$

③

・A_3ゲージ変換

$$\begin{cases} \delta_{A_3} e_\mu{}^m = 0 \\ \delta_{A_3} A_3 = d\Lambda_2 \\ \delta_{A_3} A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4 \end{cases}$$

・A_6ゲージ変換

$$\begin{cases} \delta_{A_6} e_\mu{}^m = 0 \\ \delta_{A_6} A_3 = 0 \\ \delta_{A_6} A_6 = d\Lambda_5 \end{cases}$$

実は、$\{Q,Q\}$にあらわれた3つのchargeはこれらと次の関係にある。

$$\begin{cases} \text{SUSY変換} & \delta_{SUSY} = \xi^a Q_a \\ \text{並進対称性} & \delta_{gc} = \epsilon^\mu P_\mu \\ \text{M2 charge} & \delta_{A_3} = \frac{1}{2}\Lambda_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \\ \text{M5 charge} & \delta_{A_6} = \frac{1}{5!}\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma\tau} Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \end{cases}$$

④

このことを場の変換則を用いて確認しておこう。

まず、e_μ^m に対して2回SUSY変換を行うと、

$$\delta_1 e_\mu^m = 2(\xi_1 \gamma^m \psi_\mu)$$

$$\delta_2 \delta_1 e_\mu^m = 2(\xi_1 \gamma^\mu D_\mu \xi_2) + (\xi_1, \xi_2, K_4 \text{を含む項})$$

$$\delta_1 \delta_2 e_\mu^m = 2(\xi_2 \gamma^\mu D_\mu \xi_1) + (\cdots)$$

差をとると

$$[\delta_2 \delta_1] e_\mu^m = 2 D_\mu \epsilon^m + e_\mu^k (-\xi_2 K_k{}^m \xi_1)$$

ただし、

$$\epsilon^m = -(\xi_2 \gamma^m \xi_1)$$

$$(K_{mn})_{\alpha\beta} = \frac{1}{3\cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{mn})_{\alpha\beta} + \frac{2}{3\cdot 2!} K_{\mu\nu mn} (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$$

⑤

これは次のように書ける。

$$[\delta_{susy}(\xi_2), \delta_{susy}(\xi_1)] e_\mu^m$$

$$= \delta_{gc}(-2\xi_2\gamma^m\xi_1)e_\mu^m + \delta_M(-2\xi_2 K_{mn}\xi_1)e_\mu^m$$

弱い場の近似をしているので、右辺第2項を無視できる。

$$[\xi_2 Q \quad \xi_1 Q] e_\mu^m$$

$$= -2\xi_2\gamma^m\xi_1 P_m e_\mu^m$$

これより、

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = -(\gamma^m)_{ab} P_m + \cdots$$

"…"の部分は e_μ^m に作用して0になる部分。

$\delta_{A_3} e_\mu^m = \delta_{A_6} e_\mu^m = 0$ なので e_μ^m の変換からは $Z^{\mu\nu}$, $Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ の項を読みとることはできない。

⑥

A_3に対して同様の計算を行おう。

$$\delta_1 A_{\mu\nu\rho} = 2(\xi_1 \gamma_{\mu\nu} \psi_\rho) + \text{あと2項}$$

$$\delta_2 \delta_1 A_{\mu\nu\rho} = 2(\xi_1 \gamma_{\mu\nu} D_\rho \xi_2) + \text{あと2項}$$

$$+ (\xi_1, \xi_2, K_4 \text{を含む項})$$

1と2を入れかえたものを引くと、

$$\frac{1}{2}[\delta_{SUSY}(\xi_2), \delta_{SUSY}(\xi_1)] A_3$$

$$= \epsilon^\mu K_{\mu[3]} + d\Lambda_2$$

(ただし、ϵ^μはさっきと同じもので

$\Lambda_{\mu\nu} = -(\xi_2 \gamma_{\mu\nu} \xi_1)$)

$$= \delta_{gc}(\epsilon^\mu) A_3 + \delta_{A_3}(\Lambda_2) A_3$$

これより、

$$\frac{1}{2}[\xi_2 Q, \xi_1 Q] = \epsilon^m P_m - \frac{1}{2} \xi_2 \gamma_{\mu\nu} \xi_1 Z^{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = -P_m - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \cdots$$

⑦

さらに、$Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$ の項は A_6 の上での代数を用いて、

$$-\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = P_m + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{5!}\gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau}Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau}$$

が得られる。

重要な点を1つだけ、
$\{QQ\}$ から P があらわれる。

P を局所化（重力を導入）すると、
必然的に Q も局所化される。

（重力があることを知っているので）
超対称性があれば、それは必ず
local 対称性である。
対応するゲージ場 = gravitino

3-2 A_6 のSUSY変換

A_6 のSUSY変換をまだ与えていなかったので、どうやって決めるかを説明しておく。

A_6 は A_3 の dual field として定義される。

つまり、 K_7 に対するビアンキ恒等式
$$\|$$
K_4 に対する運動方程

K_4 に対する運動方程式は、フェルミオンの4つまで入れると、

$$d*(K_4 - \kappa_4) = \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4$$

ただし $\kappa_4 = \bar{\psi}_\mu \gamma^{[\mu} \gamma_{[4]} \gamma^{\nu]} \psi_\nu$

従って、

$K_7 = *(K_4 - \kappa_4)$ と定義すると、

$$dK_7 = \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4$$

⑨

これをビアンキ恒等式と思って解けば

$$K_7 = dA_6 + \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4$$

つまり

$$dA_6 = *(K_4 - K_4) - \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4$$

右辺の超対称変換は知っているので、そこから A_6 の変換をよみとると、

$$\delta A_6 = -2\xi \langle \gamma_6 \gamma^\nu \rangle_5 \psi_\nu$$

(ただしグラビティーノの運動方程式を用いて変形する必要がある。)

3-3 BPS bound.

ここまでは、

$$\delta(\xi^a) = \xi^a Q_a$$

であり、ξ^a はグラスマン数の変換パラメータ

Q_a は変換記号であった。

ここからは Q_a を状態に作用するエルミート演算子であるとみなし、ξ^a は実数の変換パラメータであるとする。

場の変換は $\delta\phi = [\phi, i\xi^a Q_a]$ と与えられる。

代数

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = -(\gamma_m)_{ab} P^m - \frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{ab} Z^{mn} - \cdots$$

から、右辺にあらわれる charge に対する重要な関係式を導くことができる。

11

ここで$(\gamma^0)^{ab} = \delta^{ab}$であるような基底をとる。※に$(\gamma^0)^{ab}$をかけると、

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_a\} = -(\gamma^0)^{ab}(\gamma_m)_{ba} P^m - \cdots$$
$$= (\gamma^0)_a{}^b (\gamma_m)_b{}^a P^m - \cdots$$
$$= \mathrm{tr}(\gamma^0 \gamma_m) P^m - \cdots$$
$$= 32\,\delta^0_m P^m$$
$$= 32 P^0$$

任意の状態ではさむと、

$$\langle | P^0 | \rangle = \frac{1}{32}\sum_a \langle | Q_a Q_a | \rangle$$
$$= \frac{1}{32}\sum_a \left| Q_a | \rangle \right|^2 \geq 0$$

つまり、エネルギーは常に正である。

これは超対称性をもつ理論の一般的性質である。

12

次に行列

$$P_\pm^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[(\gamma^0)^{\alpha\beta} \mp (\gamma^{12})^{\alpha\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\gamma^0)^{\alpha\gamma}\left[1_\gamma{}^\beta \pm (\gamma^{012})_\gamma{}^\delta\right]$$

をかけてみる。

$(\gamma^{012})^2 = 1$ より、

$$\gamma^{012} = \begin{pmatrix} 1_{16} & \\ & -1_{16} \end{pmatrix}$$

$P_\pm = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ のような行列

よって $P_\pm^{\alpha\beta}\{Q_\alpha Q_\beta\}$ を任意の状態ではさむと

$$\langle | P_\pm^{\alpha\beta}\{Q_\alpha, Q_\beta\} | \rangle \geq 0$$

⑬

一方右辺は

$$\frac{1}{2}(\gamma^0 \mp \gamma^{12})^{\alpha\beta}\left(-\gamma_m P^m - \frac{1}{2}\gamma_{mn} Z^{mn} + \cdots\right)_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\gamma^0 \mp \gamma^{12})(\gamma_m P^m + \frac{1}{2}\gamma_{mn} Z^{mn})\right]$$

$$= \frac{32}{2}\left[P^0 \pm Z^{12}\right]$$

つまり、(期待値のいみで)

$$P^0 \pm Z^{12} \geqq 0$$

これが ± どちらでも成り立つから

$$P^0 \geqq |Z^{12}|$$

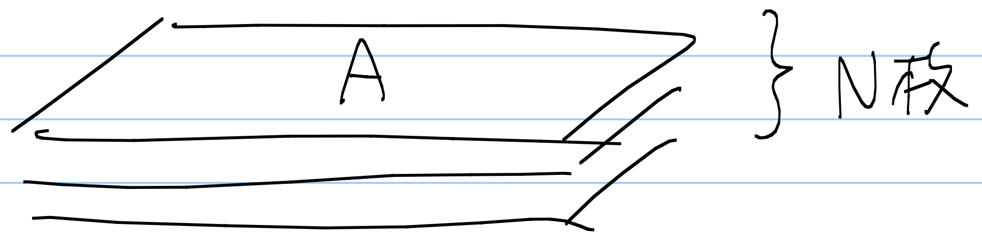
このように、中心電荷をもつものは、

最低でもその絶対値に等しい

エネルギーをもつ。

高いエネルギーをもつ状態はやがてエネルギーを放出して $E=|Z^{12}|$ をみたす状態におちつくと考えられる。この、安定な状態のことを BPS 状態と呼ぶ。

Z^{12} は 12 方向にのびた M2ーブレーンのチャージである。



もし 1,2 方向にのびた面積 A の M2-brane が N 枚あれば

$$Z^{12} = \pm NA$$ (符号は向きによる。)

である。

(15)

一方、このブレーンの張力(エネルギー密度)をT_{M2}とすれば、エネルギーは

$$P^0 = NA\,T_{M2}$$

従って、M2-braneがBPSであると仮定すれば、その張力は

$$T_{M2} = \frac{P^0}{NA} = \frac{|Z^{12}|}{NA} = 1 = \frac{hc}{l_p^3}$$

となる。

まったく同様にして、

$$T_{M5} = 1 = \frac{hc}{l_p^6}$$

N枚のブレーンのcharge と $\mathcal{L}^{12}$ は
ブレーンの位置（ブレーン間のキョリ）には
依存しない。

もしブレーンがBPSであるとすると、
エネルギーもブレーン間のキョリに依存
しないはずである。
→ ブレーン間には力が働かない。

これは、ブレーンがチャージをもつことに
よってブレーン間に働くクーロン力が
ブレーン間の重力と相殺していることを
意味する。

このことからも、張力が計算できる。

電磁気学におけるクーロン力の公式は

$$F = \frac{g_1 g_2}{\varepsilon \times 4\pi r^2}$$

ε：ゲージ場の作用の係数

$$-\frac{\varepsilon}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$4\pi r^2$：電荷をかこむ半径Rの球面

M2-ブレーンの場合には、次のように与えられる。

$$F = \frac{1}{1 \times \frac{\pi^4}{3} r^7}$$

1 ← M2-ブレーンのチャージ

$-\frac{1}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma}^2$ の係数

M2-braneをかこむ半径rの7次元球面の面積

2枚のブレーンの間の重力も同様に計算できて、

$$F = -\frac{\overbrace{T_{M2}^{2}}^{\text{ブレーンの張力}}}{\underbrace{1}_{\sqrt{g}R\text{の係数}} \times \underbrace{\frac{\pi^4}{3} r^7}_{S^7\text{の面積}}}$$

この2つがcancelすることより、

$$\frac{1}{1 \times \frac{\pi^4}{3} r^7} = \frac{T_{M2}^{2}}{1 \times \frac{\pi^4}{3} r^7}$$

$$T_{M2} = 1$$

3-4 BPS状態におけるSUSY

BPS状態 は、超対称性が部分的に残っているという重要な性質をもつ。

すなわち、適当な ξ^a をとることにより、

$$\xi^a Q_a |BPS\rangle = 0$$

となる。

$P^0 = Z^{12}$ をみたすBPS状態を考える。

$$\frac{1}{2}\langle BPS| \{Q_a, Q_b\} |BPS\rangle$$

$$= \langle BPS| P^0(\gamma^0 - \gamma_{12})_{ab} |BPS\rangle$$

$$= \langle BPS| P^0[\gamma^0(1-\gamma_{012})]_{ab} |BPS$$

$\xi^a \xi^b$ をかけると、

$$\left| \xi^a Q_a |BPS\rangle \right|^2 = -\langle BPS|P^0|BPS\rangle \xi\gamma^0(1-\gamma_{012})\xi$$

∴ もし $(1-\gamma_{012})\xi = 0$ であれば

$$\xi^a Q_a |BPS\rangle$$

20

$(1-\gamma_{012})\xi=0$ という条件は、32個のξの成分のうち、16個の成分が0、それ以外は0でなくてもよいことを表している。

つまり、16個のSUSY変換は破れていない。
このような状態は 1/2 BPS であるといわれる。

もしbraneの向きが逆で、$Z^{12}=-P^0$であれば、条件は $(1+\gamma_{012})\xi=0$となり、残るSUSYと破れるSUSYが逆になる。

M5-braneについても全く同様のことがいえる。
すなわち、12345方向にひろがったBPSなM5-braneについて、1/2 SUSYが破れずに残り
その条件は

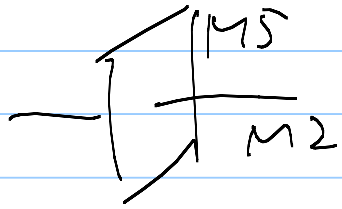
$$(1\pm\gamma_{012345})\xi=0$$

より少ないSUSYが残る状態も存在する。

12方向のM2-braneと

13456方向のM5-braneがある場合を

考える



0	1	2	3	4	5	6	7~11
○	○	○					
○	○		○	○	○	○	

このとき、SUSY代数は

$$\frac{1}{2}\{Q_a Q_b\} = (\gamma^0 P^0 - \gamma_{12} Z^{12} - \gamma_{13456} Z^{13456})_{ab}$$

$$= [(P^0 - \gamma_{012} Z^{12} + \gamma_{013456} Z^{13456})\gamma^0]_{ab}$$

両辺に $\xi^a \xi^b$ をかけて、任意の状態ではさむと

$$\langle \xi Q \xi Q \rangle = \langle \xi (P^0 - \gamma_{012} Z^{12} + \gamma_{013456} Z^{13456}) \xi \rangle$$

左辺 ≥ 0 が ξ によらず成り立つ

右辺の3つの項は可換なので同時対角化可能

対角化すると、

$$\xi \left[P^0 \begin{pmatrix} 1_8 & & & \\ & 1_8 & & \\ & & 1_8 & \\ & & & 1_8 \end{pmatrix} - Z^{12} \begin{pmatrix} 1_8 & & & \\ & 1_8 & & \\ & & -1_8 & \\ & & & -1_8 \end{pmatrix} + Z^{13456} \begin{pmatrix} 1_8 & & & \\ & -1_8 & & \\ & & 1_8 & \\ & & & -1_8 \end{pmatrix} \right] \xi$$

これが ξ によらず非負であるためには、行列の固有値が全て非負でなければならない。

$$-e\ P^0 \geq |Z^{12}| + |Z^{13456}|$$

— BPS bound

等号が成り立つ場合を考えよう。

$Z^{12} > 0 \quad Z^{13456} > 0 , \quad P^0 = Z^{12} + Z^{13456}$

の場合

ここが0

$$\langle BPS | \xi Q \xi Q | BPS \rangle = \langle BPS | P^0 | BPS \rangle$$

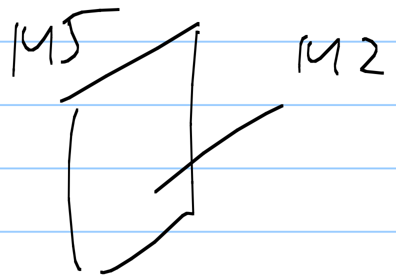
$$\times \xi \begin{pmatrix} (Z^{12}+Z^{34567})\mathbb{1} - Z^{12}\mathbb{1} + Z^{34567}\mathbb{1} & & & \\ & (Z^{12}+Z^{34567})\mathbb{1} - Z^{12}\mathbb{1} - Z^{34567}\mathbb{1} & & \\ & & (Z+Z)\mathbb{1} + Z\mathbb{1} + Z\mathbb{1} & \\ & & & (Z+Z)\mathbb{1} + Z\mathbb{1} - Z\mathbb{1} \end{pmatrix} \xi$$

従って、ξ の 1/4 の成分のみが許される

$(1-\gamma_{012})\xi = 0$ かつ $(1+\gamma_{013456})\xi = 0$

$\frac{1}{4}$ BPS state

次に 12方向のM2-braneと12345方向の
M5-braneを考える。



	0	1	2	3	4	5	6	7~11
M2	o	o	o					
M5	o	o	o	o	o	o		

今度は、それぞれのbraneのSUSY条件は

$$\begin{cases}(1\pm\gamma_{012})\xi=0\\(1\pm\gamma_{012345})\xi=0\end{cases}$$

となるが、これらは両立しない。
(行列が可換ではない。)

適当な基底をとれば、

$$\gamma_{012}=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_{16} & \\ & -\mathbb{1}_{16}\end{pmatrix}\qquad \gamma_{012345}=\begin{pmatrix} & \mathbb{1}_{16}\\ \mathbb{1}_{16} & \end{pmatrix}$$

とできる。このとき、

$$\langle\xi Q\xi Q\rangle=\left\langle\xi\begin{pmatrix}p^0-Z^{12} & Z^{12345}\\ Z^{12345} & p^0+Z^{12}\end{pmatrix}\xi\right\rangle$$

24

右辺の行列の固有値は $p^0 \pm \sqrt{(Z^{12})^2 + (Z^{12345})^2}$

左辺は s によらず非負

右辺もそうであるためには

$$p^0 \geq \sqrt{(Z^{12})^2 + (Z^{12345})^2}$$

$p^0 = \sqrt{(\ )^2 + (\ )^2}$ の場合、右辺の行列は16個の0固有値をもつ。

$\rightarrow$ 1/2 BPS.

BPS状態（等号）のエネルギーは、それぞれのbraneのエネルギーの和

$$|Z^{12}| + |Z^{12345}|$$

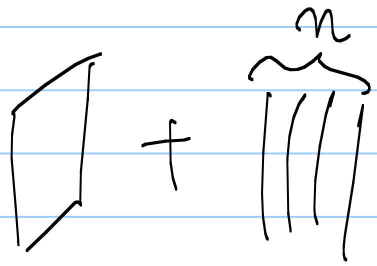
よりも小さい

$\rightarrow$ truely bound state

12345 方向にひろがった1枚のM5-braneと

12方向に広がったn枚のM2-braneの

bound state を考えよう。



エネルギーを有限にするために、x^i方向は

周期 L_i でコンパクト化されているとする。

このとき、

$$Z^{12} = nL_1L_2$$

$$Z^{12345} = L_1L_2L_3L_4L_5$$

BPS state のエネルギーは

$$P^0 = \sqrt{|Z^{12}|^2 + |Z^{12345}|^2}$$

$$= L_1L_2L_3L_4L_5\sqrt{1+\left(\frac{n}{L_3L_4L_5}\right)^2}$$

$$= L_1L_2L_3L_4L_5\sqrt{1+\rho^2}$$

ただし ρ は 345空間上の M2-braneの密度

エネルギー密度は、

$$\mathcal{E} = 1 + \frac{\rho^2}{2}$$

第1項は M5-brane の張力、

第2項は M5-brane上の fluxの エネルギー

以前にのべたように、M5-brane 上の flux $H_{\mu\nu\rho}$ は M5-braneに吸収された M2-braneとみなすことができる。

$$H_{012} = H_{345} = \rho$$

以前に与えた $H_{\mu\nu\rho}$ の作用 から エネルギー密度 が計算できる。

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4}\left(H_{012}^2 + H_{345}^2\right) = \frac{\rho^2}{2}$$

これは 上の結果に一致する。

4-1 超空間

以前に与えたSUGRAの作用は、
それがSUSY不変であることをチェックする
だけでもめんどうくさい。
($\psi_\mu{}^4$ 項まで考慮することになる)

SUSY不変性が明白な定式化を
行うことはできないか?
↓
超空間(superspace)を用いれば
よい。

基本的 idea

時空の座標として、x^μ の他に
スピノル座標、θ^α を導入し
$z^M = (x^\mu, \theta^\alpha)$ で張られる
超空間を定義する。

超空間上の一般座標変換

$$z^M = z'^M + \epsilon^M$$

のパラメータ ϵ^M は 11|32 成分

$$\epsilon^A = \epsilon^M E_M{}^A = (\epsilon^m, \epsilon^a)$$ のうち

ϵ^m による変換を一般座標変換

ϵ^a による変換を超対称変換とみなす。

添字　$M, N, \cdots$　大域座標

$\mu, \nu, \cdots$　boson 部分

$\alpha, \beta, \cdots$　fermion 部分

$A, B, \cdots$　局所座標

$m, n, \cdots$　boson 部分

$a, b, \cdots$　fermion 部分

29

超空間上に、

多脚場 $E_M{}^A(z^M)$

3-form場 $A_{MNP}(z^M)$

を導入する。実空間上の場とは次の関係にある。

$$E_\mu{}^m(z^M) = e_\mu^m(x^\nu) + O(\theta)$$

$$E_\mu{}^a(z^M) = \psi_\mu^a(x^\nu) + O(\theta)$$

$$A_{\mu\nu\rho}(z^M) = A_{\mu\nu\rho}(x^\nu) + O(\theta)$$

多くの余分な成分が含まれるが、それらをとり除くために適当な拘束条件を $E_M{}^A$ と A_{MNP} に課す。

4-2 超空間上の演算規則

テンソルはその添字によって統計性が異なるので、順序に注意する必要がある。

$$X_M Y_N = (-)^{MN} Y_N X_M$$

ただし $(-)^{\circ}$ のべきの添字は、

$$\begin{cases} \text{グラスマン偶} \to 0 \\ \text{グラスマン奇} \to 1 \end{cases}$$

と解釈する。

多脚場は、

$$E_M{}^A \quad (E^A_M \text{ではない。})$$

その逆行列は

$$E_A{}^M E_M{}^B = \delta_A^B$$

によって定義する。

大域添え字と局所添え字の変換は、

$$v_M = E_M{}^A v_A,$$

$$v_A = E_A{}^M v_M$$

基本的にスピノル添え字の縮約と同様

テンソルについては、

$$T_{MN} = (-)^{(N+B)A} E_M{}^A E_N{}^B T_{AB}$$

符号は、

$T_{MN} = v_M w_N$ のとき

$T_{AB} = v_A w_B$ となるように決める。

$$\begin{aligned} T_{MN} &= v_M w_N \\ &= E_M{}^A v_A E_N{}^B w_B \\ &= E_M{}^A (-)^{(N+B)A} E_N{}^B v_A w_B \\ &= (-)^{(N+B)A} E_M{}^A E_N{}^B T_{AB} \end{aligned}$$

Superspace上の wedge積は、

$$dz^M \wedge dz^N = -(-)^{MN} dz^N \wedge dz^M$$

つまり、

$$d\theta^\alpha \wedge d\theta^\beta = d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha$$

1-formとその成分の関係は

$$v_1 = dz^M v_M$$

2-formについては、

$$T_2 = (-)^{MN} \frac{1}{2} dz^M \wedge dz^N \, T_{MN}$$

これも、

$T_2 = v_1 \wedge \omega_1$ との consistencyで決める。

4-3 spin 接続、曲率、捩率 ㉝

Superspace上の spin connectionは

$$\Omega_{MA}{}^{B} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{Mm}{}^{n} & 0 \\ \hline 0 & \Omega_{Ma}{}^{b} \end{array}\right)$$

$$\Omega_{Ma}{}^{b} = \frac{1}{4}\Omega_{Mmn}(\gamma^{mn})_{a}{}^{b}$$

と仮定する。つまり、superspace においても、構造群は $SO(1,10)$ のまま。(ローレンツ条件)

共変微分は、

$$D_M v_A = \partial_M v_A + \Omega_{MA}{}^{B} v_B$$

局所添字を省略すると

$$D_M v = \partial_M v + \Omega_M v$$

34

さらに、1-form $\Omega = dz^M \Omega_M$

を定義すると、

$$DV = dV + \Omega V$$

曲率テンソルは

$$R_{MN} = D_M D_N - (-)^{MN} D_N D_M$$

あるいは 2-form として表せば

$$R = D \wedge D$$
$$= d\Omega + \Omega \wedge \Omega$$

捩率は

$$T_{MN}{}^A = D_M E_N{}^A - (-)^{MN} D_N E_M{}^A$$

あるいは

$$T^A = D \wedge E^A$$
$$= dE^A + E^B \wedge \Omega_B{}^A$$

R と T^A はその定義より、次の恒等式をみたす。

$$DDDv \begin{cases} = (DD)Dv = RDv \\ = D(DDv) = DRv \end{cases}$$

より、 $I_3{}^{mn} \equiv DR^{mn} = 0$

$$DDE^A \begin{cases} = (DD)E^A = RE^A \\ = D(DE)^A = DT^A \end{cases}$$

より、

$$I_3{}^A \equiv DT^A - RE^A = 0$$

これらは、ビアンキ恒等式である。

36

Superspace 上には 3-form 場 $A_3(z)$ がある。field strength は

$$K_4(z) = dA_3(z)$$

なので、次のビアンキ恒等式をみたす。

$$J_5 \equiv dK_4(z) = 0$$

超空間上の一般座標変換は、実空間と同じ形

$$\begin{cases} \delta_{gc} E_M{}^A = D_M \epsilon^A + \epsilon^N T_{NM}{}^A \\ \delta_{gc} A_{MNP} = \epsilon^K K_{KMNP} \end{cases}$$

これが SUSY変換を与える。

4-4 拘束条件

超場と実空間上の場の関係は、

$$E_\mu{}^m\big|_{\theta=0} = e_\mu^a$$

$$E_\mu{}^\alpha\big|_{\theta=0} = \psi_\mu^\alpha$$

$$\Omega_{\mu mn}\big|_{\theta=0} = \omega_{\mu mn}$$

$$A_{\mu\nu\rho}\big|_{\theta=0} = A_{\mu\nu\rho}$$

これ以外の余分な自由度を消すための拘束条件は、アプリオリにはわからないが、試行錯誤の結果次のようにとればよいことが知られている。

$$T_{mn}{}^k = T_{am}{}^k = T_{ab}{}^c = 0, \quad T_{ab}{}^k = 2(\gamma^k)_{ab}$$

$$K_{mnpa} = K_{mabc} = K_{abcd} = 0, \quad K_{mnab} = 2(\gamma_{mn})_{ab}$$

この拘束条件の妥当性をみるために、超対称変換則が再現されることを見ておこう。

$E_\mu{}^m$ を一般座標変換すると、

$$\delta E_\mu{}^m = D_\mu \epsilon^m + \epsilon^A T_{A\mu}{}^m$$

$$= D_\mu \epsilon^m + E_\mu{}^B \epsilon^A T_{AB}{}^m$$

$\epsilon^A = (\epsilon^m = 0, \xi^a)$ とすると、

$$\delta E_\mu{}^m = E_\mu{}^b \xi^a T_{ab}{}^m$$

$$= E_\mu{}^b \xi^a \, 2(\gamma^m)_{ab}$$

$T_{ab}{}^m = 2(\gamma^m)_{ab}$

$$= 2\xi^a (\gamma^m)_a{}^b E_{\mu b}$$

$\theta = 0$ とおくと、

$$\delta e_\mu{}^m = 2(\xi \gamma^m \psi_\mu)$$

多脚場の超対称変換が得られた。

39

ゲージ場 $A_{\mu\nu\rho}$ については、

$$\delta A_{\mu\nu\rho} = \epsilon^M K_{M\mu\nu\rho}$$

$$= E_\rho{}^D E_\nu{}^C E_\mu{}^B \epsilon^A K_{ABCD}$$

$$= E_\rho{}^n E_\nu{}^m E_\mu{}^b \xi^a K_{abmn} + \begin{pmatrix}\mu\nu\rho \\ \text{cyclic}\end{pmatrix}$$

$$= E_\rho{}^n E_\nu{}^m E_\mu{}^b \xi^a 2(\gamma_{mn})_{ab} + (\mu\nu\rho)$$

$\theta = 0$ とおくと、

$$\delta A_{\mu\nu\rho} = e_\rho{}^n e_\nu{}^m \psi_\mu{}^b \xi^a 2(\gamma_{mn})_{ab} + (\mu\nu\rho)$$

$$= 2(\xi \gamma_{\nu\rho} \psi_\rho) + (\mu\nu\rho)$$

これは A_3 の SUSY 変換

40

gravitinoのSUSY変換は、
$E_\mu{}^a$の一般座標変換から得られるはず。

$$\delta E_\mu{}^a = D_\mu \xi^a + \xi^b T_{b\mu}{}^a$$
$$= D_\mu \xi^a + E_\mu{}^m \xi^b T_{bm}{}^a$$

$\delta \psi_\mu = D_\mu \xi^a +$ (K_αを含む項)が
得られるためには、$T_{bm}{}^a$がK_αによって
表わされていなければならない。

実は、そうなっている。

このことを、拘束条件を用いて示して
おこう。

④

4-5 拘束条件を解く.

$T_{AB}{}^{C}$, K_{ABCD} のうち、
拘束条件によって固定されていない
のは、

$T_{mn}{}^{a}$, $T_{am}{}^{b}$, K_{mnpq}

である。これらは、拘束条件によって
しばられることはないが、ビアンキ恒等式
はみたさなければならない。

$$\begin{cases} I_2{}^{A} \equiv DT^{A} - RE^{A} = 0 \\ I_3{}^{mn} \equiv DR^{mn} = 0 \\ J_5 \equiv dK_4 = 0 \end{cases}$$

これらのうち 2番目は 1番目が成り立つと
自動的に成り立つ (Dragon の定理)
Z. Phys. C2 (1979) 29

$I_3{}^A$ と J_5 を局所添字をもつテンソルとして表すと、

$$I_{ABC}{}^D = D_A T_{BC}{}^D + T_{AB}{}^E T_{EC}{}^D + R_{ABC}{}^D \Big/ \{ABC\}$$

$$J_{ABCDE} = D_A K_{BCDE} + 2 T_{AB}{}^F K_{FCDE} \Big/ \{ABCDE\}$$

$I_3{}^A = J_5 = 0$ を解いて、T や K に対する関係式を導びこう。

まず、$I_{abc}{}^m = 0$ は自動的に成立。

$$I_{mab}{}^k = T_{ma}{}^c T_{cb}{}^k + \{ab\} + R_{abm}{}^k$$

つまり、$R_{abm}{}^k = -4 T_{ma}{}^c (\gamma^k)_{cb} \Big|_{\{ab\}}$

43

この式は R_{abmn} を $T_{ma}{}^{c}$ で表すと同時に $T_{ma}{}^{c}$ にも条件を課す。

R_{abmn} は m と n の入れかえについて反対称なので

$$T_{ma}{}^{c}(\gamma_n)_{cb}\Big|_{\{ab\}\{mn\}} = 0$$

これを満たす $T_{ma}{}^{b}$ の一般形は?

$$T_{ma}{}^{b} = \sum_{k=0}^{5} Y_{m\,n_1\cdots n_k}(\gamma^{n_1\cdots n_k})_a{}^b$$

とおいて代入

↓ しばらく計算

$$T_{ma}{}^{b} = X(\gamma_m)_a{}^b + Y_{mpq}(\gamma^{pq})_a{}^b$$
$$+ Y_{mpqr}(\gamma^{pqr})_a{}^b + X^{pqr}(\gamma_{mpqr})_a{}^b$$
$$+ X^{pqrs}(\gamma_{mpqrs})_a{}^b$$

X、Y はすべて反対称テンソル

さらに、R_{abmn} は次のようになる。

$$R_{abmn} = 4X(\gamma_{mn})_{ab} - 8Y_{mnp}(\gamma^{p})_{ab} + 12Y_{mnpq}(\gamma^{pq})_{ab} - 4X^{pqr}(\gamma_{mnpqr})_{ab} + 4X^{pqrs}(\gamma_{mnpqrs})_{ab}$$

次にビアンキ恒等式 $I_{abc}{}^{d} = 0$ を考える。

$$I_{abc}{}^{d} = T_{ab}{}^{m}T_{mc}{}^{d} + R_{abc}{}^{d} + (abc\ \text{cyclic})$$

$$= 2(\gamma^{m})_{ab}T_{mc}{}^{d} + \frac{1}{4}R_{abmn}(\gamma^{mn})_{c}{}^{d} + (abc)$$

この式に、さきほど得られた $T_{mc}{}^{d}$ と R_{abmn} を代入すると、

$$X = X_{mnp} = Y_{mnp} = Y_{mnpq} - 8X_{mnpq} = 0$$

が得られ、独立なのは X_{mnpq} のみ

$$T_{ma}{}^{b} = X^{pqrs}(\gamma_{mpqrs})_{a}{}^{b} + 8X_{mpqr}(\gamma^{pqr})_{a}{}^{b}$$

$$= 36(\gamma_{m}X_{4})_{a}{}^{b} - 12(X_{4}\gamma_{m})_{a}{}^{b}$$

45

次に、K_4に対するピアンキ恒等式 $J_5=0$ のうち、

$$J_{abpqr} \equiv 2T_{ab}{}^{m} K_{mpqr} + 2T_{ra}{}^{c} K_{cbpq} + \{ab\}[pqr]$$

$$= 4(\gamma^m)_{ab} K_{mpqr} + 4T_{ra}{}^{c}(\gamma_{pq})_{cb} + \{ab\}[pqr]$$

この式は、K_{mpqr}と$T_{ra}{}^{c}$を関係づけている。

$$\rightarrow \quad X_{mnpq} = \frac{1}{288} K_{mnpq}$$

$$T_{ma}{}^{b} = \frac{1}{8}(\gamma_m \cancel{K}_4)_a{}^b - \frac{1}{24}(\cancel{K}_4 \gamma_m)_a{}^b$$

この結果を用いると、gravitinoのSUSY変換が正しく再現されることがわかる。

46

さらに計算を続けていくと、最終的に以下の関係式が得られる。

① テンソルを別のテンソルで表すもの

$$T_{ma}{}^{b} = \frac{1}{8}(\gamma_m \cancel{K}_4)_a{}^b - \frac{1}{24}(\cancel{K}_4 \gamma_m)_a{}^b$$

$$R_{abmn} = \frac{1}{3} K_{mnpq} (\gamma^{pq})_{ab} + \frac{1}{72} K^{pqrs} (\gamma_{mnpqrs})_{ab}$$

$$R_{apmn} = (\gamma_p)_{ab} T_{mn}{}^b - (\gamma_m)_{ab} T_{np}{}^b - (\gamma_n)_{ab} T_{pm}{}^b$$

これらにより、以下のものだけが独立、

$$T_{mn}{}^a, \quad R_{mnpq}, \quad K_{mnpq}$$

これらはそれぞれ、実空間上の場の強さ

$$\psi_{\mu\nu}^a = D_\mu \psi_\nu^a - D_\nu \psi_\mu^a$$

$$R_{\mu\nu mn}$$

$$K_4 = dA_3$$

に対応する。

② これらテンソルの D_a 微分を与える式

$$D_a T_{mn}{}^b = -\frac{1}{4} R_{mnpq} (\gamma^{pq})_a{}^b - \cdots$$

$$D_a R_{mnpq} = \cdots$$

$$D_a K_{mnpq} = \underbrace{-12\, T_{mn}{}^b (\gamma_{pq})_{ba} \Big|_{[mnpq]}}_{\theta\text{微分を含まない。}}$$

これにより、θ展開の高次の項が決まる。
(独立な場を与えない。)

③ 実空間上のビアンキ恒等式に対応するもの

$$I_{mnp}{}^q = R_{mnp}{}^q \Big|_{[mnp]} = 0$$

$$I_{kmn}{}^{pq} = D_k R_{mn}{}^{pq} + 2 T_{km}{}^a R_{an}{}^{pq} \Big|_{[kmn]} = 0$$

$$J_{kmnpq} = D_k K_{mnpq} \Big|_{[kmnpq]} = 0$$

48

④ 実空間上の運動方程式に対応するもの

$$R_{mn}(\gamma^n)_{ab} + \frac{1}{12}\langle 3 \cancel{K}_4 \gamma_m \cancel{K}_4 - \gamma_m \cancel{K}_4 \cancel{K}_4 \rangle_1 = 0$$

$$\langle \cancel{D} \cancel{K}_4 \rangle_3 + \frac{1}{2}\langle \cancel{K}_4 \cancel{K}_4 \rangle_8 = 0$$

$$(\gamma^k)_{ab} T_{mn}{}^b = 0$$

それぞれ、$\theta = 0$ 成分が

- アインシュタイン方程式
- A_3 の運動方程式
- Ψ_μ の運動方程式

を与える。

これらは 11 dim SUGRA の作用から得られるものに一致する。

11次元の superspace formalism では、作用を与えることはできない。

(4次元では可)

4-6 実空間上のTorsionについて

実空間上のtorsionは

$$T_{\mu\nu}{}^{k}(x) = T_{\mu\nu}{}^{k}(z)\Big|_{\theta=0}$$

によって超空間上のTorsionと関係している。

$T_{mn}{}^{k}(z) = 0$ だが $T_{\mu\nu}{}^{k}(z) \neq 0$

であることに注意。

$$T_{\mu\nu}{}^{k} = E_{\nu}{}^{B} E_{\mu}{}^{A} T_{AB}{}^{k}$$

$$= 2 E_{\nu}{}^{b} E_{\mu}{}^{a} (\gamma^{k})_{ab}$$

$\theta = 0$ 成分をとると、

$$T_{\mu\nu}{}^{k}(x) = 2 \psi_{\nu}{}^{b} \psi_{\mu}{}^{a} (\gamma^{k})_{ab}$$

$$= 2 (\psi_{\mu} \gamma^{k} \psi_{\mu})$$

4-7 flat superspace

場の励起の無いflatなSuperspaceを考えよう。
ただし、constraintがあるために、場の強さ全てを0にすることはできない。

$$T_{ab}{}^{k} = 2(\gamma^{k})_{ab}$$

$$K_{mnab} = 2(\gamma_{mn})_{ab}$$

T, K, R のその他の成分 $= 0$

このとき、

$$\begin{cases} E_{\mu}{}^{m} = \delta_{\mu}^{m} & E_{\mu}{}^{a} = 0 \\ E_{\alpha}{}^{m} = \theta^{b}(\gamma^{m})_{ba} & E_{\alpha}{}^{a} = \delta_{\alpha}^{a} \\ \Omega_{MA}{}^{B} = 0 & \end{cases}$$

とおくことができる。

51

$$E^m \equiv dz^M E_M{}^m$$
$$= dx^m + d\theta^a \theta^b (\gamma^m)_{ba}$$
$$= dx^m + \theta\gamma^m d\theta$$ なので、

$$T^m = dE^m$$
$$= d\theta\gamma^m d\theta$$

これは $T_{ab}{}^m = 2(\gamma^m)_{ab}$ を意味する。

同様に、

$$A_3 = \theta(\gamma_{[2]})d\theta + O(\theta^4)$$

としておくと、

$$K_4 = d\theta(\gamma_{[2]})d\theta + O(\theta^4)$$

となり、 $K_{mnab} = 2(\gamma_{mn})_{ab}$ を再現する。

flat superspace 上では、背景を変化させない座標変換として global SUSY 変換を定義することができる。

$$\delta E_M{}^A = D_M \epsilon^A + \epsilon^B T_{BM}{}^A$$

分解すると

$$\begin{cases} \delta E_\mu{}^m = \partial_\mu \epsilon^m = 0 \\ \delta E_\mu{}^a = \partial_\mu \epsilon^a = 0 \\ \delta E_\alpha{}^m = \partial_\alpha \epsilon^m + 2\epsilon^b (\gamma^m)_{b\alpha} \\ \delta E_\alpha{}^a = \partial_\alpha \epsilon^a = 0 \end{cases}$$

これらより、

$$\epsilon^m(z) = \epsilon_0^m + 2\theta\gamma^m \xi_0$$
$$\epsilon^a(z) = \xi_0^a$$

あるいは

$$\epsilon^\mu(z) = \epsilon_0^\mu + \theta\gamma^\mu \xi_0$$
$$\epsilon^\alpha(z) = \xi_0^\alpha$$

53

従って、次の座標変換を表している。

$$\begin{cases} \delta x^{\mu} = \epsilon_0^{\mu} + \theta \gamma^{\mu} \xi_0 \\ \delta \theta^{\alpha} = \xi_0^{\alpha} \end{cases}$$

ϵ_0^{μ} が実空間上の並進対称性

ξ_0^{α} が超対称性のパラメータである。

4-8 Supermembrane

superspace を導入した理由のひとつは、以前に与えたM-braneの作用を、フェルミオンも含めた完全な形で与えることが簡単になるからである。

フェルミオンを含まないM2-braneの作用は、

$$-T_{M2}\int\sqrt{-\det G_{ij}}+g_{M2}\int A_3$$

によって与えられた。Supermembraneの場合には、この作用をSuperspace上のM2-braneの作用と解釈し直すだけでよい。

Bergshoeff, Sezgin, Townsend
Phys. Lett. B189 (1987) 75
Ann. of Phys 185 (1988) 330

つまり、

$$G_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^j} g_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow (-) \frac{\partial Z^M}{\partial \sigma^i}\frac{\partial Z^N}{\partial \sigma^j}\left(E_M{}^m E_N{}^n \eta_{mn}\right)$$

$$\int A_3 = \int d^3\sigma \, \frac{1}{6} \, \epsilon^{ijk} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^j}\frac{\partial x^\rho}{\partial \sigma^k} A_{\mu\nu\rho}(x)$$

$$\rightarrow \int d^3\sigma \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} (-) \frac{\partial Z^M}{\partial \sigma^i}\frac{\partial Z^N}{\partial \sigma^j}\frac{\partial Z^P}{\partial \sigma^k} A_{MNP}(Z)$$

のようにおきかえるだけでよい。

この作用の SUSY 不変性は明白である。

bosonic な作用が M2 上の 8個のスカラー場を記述することは以前に見た。

ここでは、フェルミオンの自由度がどのようにあらわれるかを見ておこう。

56

brane上のスカラー場 X^I (I : transverse)

$= X^I$方向の振動

ブレーン上のフェルミオン場 θ^a

$= \theta^a$ 方向の振動

作用からθについて2次の項をぬき出そう。

まず南部-後藤作用について見てみる。

$$\Pi_i{}^m = \frac{\partial Z^M}{\partial \sigma_i} E_M{}^m$$

$$= \partial_i X^m + \theta \gamma^m \partial_i \theta$$

を用いると、

$$G_{ij} = \Pi_i{}^m \Pi_j{}^n \eta_{mn} \quad \text{なので}$$

$$S = -T_{M2} \int d^3\sigma \sqrt{-\det(\Pi_i{}^m \Pi_j{}^n \eta_{mn})}$$

$$= -T_{M2} \int d^3\sigma \sqrt{-\det(\tilde{g}_{ij})} \left[1 + (\theta \hat{\gamma}^i \partial_i \theta) \right]$$

$+ \cdots$

ただし

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{\partial x^m}{\partial \sigma^i} \gamma_m$$

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \sigma^i} \frac{\partial x^n}{\partial \sigma^j} \eta_{mn}$$

を定義した。フェルミオン θ の運動項があらわれている。

Chern-Simons項からは

$$S = g \int A_3$$

$$= g \int d^3\sigma \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \theta \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \theta + \cdots$$

$$= g \int d^3\sigma \sqrt{-\det \tilde{g}_{ij}} \left(\theta \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma} \partial_k \theta \right) + \cdots$$

ただし、$\sqrt{-\det \tilde{g}_{ij}}\ \tilde{\gamma}^{ijk} = \tilde{\gamma} \epsilon^{ijk}$

によって $\tilde{\gamma}$ を定義した。

2つの作用をあわせれば、フェルミオンの2次の項は

$$S = -\int d^3\sigma \sqrt{-\tilde{g}}\left(\bar{\theta}\tilde{\gamma}^i\partial_i(T - Q\tilde{\gamma})\theta\right)$$

$\tilde{\gamma}$ の固有値によって θ を2つに分ける。

$$\theta = \theta_+ + \theta_- \qquad \tilde{\gamma}\theta_\pm = \pm\theta_\pm$$

$$S = -\int d^3\sigma \Big[(T-Q)(\bar{\theta}_+\tilde{\gamma}^i\partial_i\theta_+) + (T+Q)(\bar{\theta}_-\tilde{\gamma}^i\partial_i\theta_-)\Big]$$

もし $T < |Q|$ であれば運動項の符号が逆になり、Unitarity を破ってしまうが、そうならないことは BPS bound

$$T \geq |Q|$$

によって保障されている。

(大域的)SUSY変換が

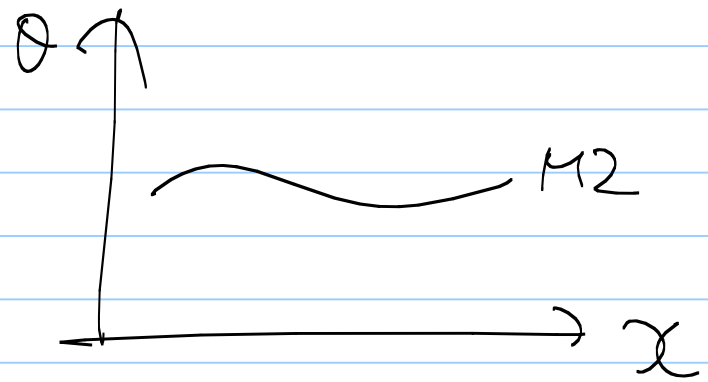
$$\begin{cases} \delta x^\mu = \theta \gamma^\mu \xi \\ \delta \theta = \xi \end{cases}$$

と与えられていたことを思い出そう。

フェルミオンの変換則はSUSY変換が

常に破れていることを意味している。

Superspace上にbraneを置いたのであるから、SUSY(= θ方向の並進対称性)が破れるのは当然である。



しかし、BPS条件 $Q = \pm T$ が成り立つ場合には、半分のSUSYが残っているはずである。

これは以下のように説明できる。

ここでは $Q = T$ の場合を考えよう。

このとき、作用は、

$$S = -2T \int d^3\sigma \ \theta_- \tilde{\gamma}^i \partial_i \theta_-$$

となり、θ_+ を含まない。従って、

$$\delta_K \theta_+ = K_+(\sigma^i)$$

という fermionic な local 対称性が存在する。これを K-symmetry と呼ぶ

SUSY変換と K-symmetry を合わせたものを書くと、

$$\begin{cases} \delta\theta_+ = \epsilon_+ + K_+ \\ \delta\theta_- = \epsilon_- \end{cases}$$

従って、ϵ_+, ϵ_-, κ_+ それぞれのパラメータによる変換は破れているが、ϵ_+ によるSUSY変換と $\kappa_+ = -\epsilon_+$ による κ 変換を同時に行う変換は破れていない。
これが、BPS状態に対して残っているSUSY変換である。

κ-symmetryで相殺できるためには、$\epsilon_- = 0$ すなわち

$$\tilde{\gamma}\epsilon = \epsilon$$

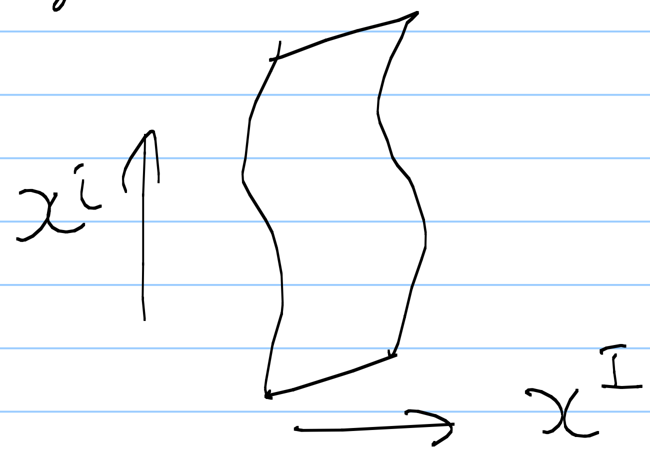
が満たされなければならない。
braneが012方向にひろがっている場合には

$$\gamma_{012}\epsilon = \epsilon$$

となり、これは以前125 p.で見た条件に一致する。

62

M2-brane上のboson場の励起があるときのSUSY変換を求めておこう。
その場合、$x^i = \sigma^i$というstatic gaugeをとることができる



$$\tilde{\gamma}_i = \gamma_i + \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma_I$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \left(1 + \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma^i \gamma_I \right)$$

ただし$x^i = 0$のときの$\tilde{\gamma}$をγと書いた。

$\theta_\pm$を今度はγの固有値によって分ける。

K-symmetryとして許されるのは$\tilde{\gamma}$（γではなく）の正固有値部分であるから、

$$\delta\theta = \xi + \frac{1}{2}(1+\tilde{\gamma})K$$

$$= \xi + \frac{1}{2}\left[1+\gamma\left(1+\frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i}\gamma^i\gamma_I\right)\right]K$$

$$\delta\theta_+ = \xi_+ + K_+ + \frac{1}{2}\frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i}\gamma^i\gamma_I K_-$$

$$\delta\theta_- = \xi_- - \frac{1}{2}\frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i}\gamma^i\gamma_I K_+$$

ここで$\theta_+ = 0$というゲージを取ってK対称性をゲージ固定する。

このゲージを破らないSUSY変換は

$$K_+ = -\xi_+ ,\quad K_- = \xi_- = 0$$

によって与えられる。このときθ_-の変換は

$$\delta\theta_- = \frac{1}{2}\frac{\partial x^I}{\partial\sigma^i}\gamma^i\gamma_I\xi_+$$

x^IについてのSUSY変換は、x^μに対するSUSY変換、K-sym変換が、

$$\delta x^\mu = \theta\gamma^\mu\xi - \theta\gamma^\mu\delta_\kappa\theta$$

であることを用いて

$$\delta x^I = 2\,\theta_-\gamma^I\xi_+$$

となる。この変換のもとで、

$$S = T_{M2}\int d^3\sigma\left[-\frac{1}{2}\partial_i x^I\partial^i x^I - 2\theta_-\gamma^i\partial_i\theta_-\right]$$

は不変である。

65

まとめておこう。

M2-brane上の場の理論

$$S=\int d^3\sigma\left(-\frac{1}{2}\partial_i x^I\partial^i x^I-\frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi)\right)$$

は次のSUSY変換のもとで不変である。

$$\begin{cases}\delta x^I=(\bar{\psi}\gamma^I\xi)\\ \delta\psi=(\partial_i x^I)\gamma^i\gamma_I\xi\end{cases}$$

ただし、T=1とし、$\psi=2\Theta_-$を定義した。

ψとξは次の条件をみたす。

$$\begin{cases}\gamma\xi=+\xi\\ \gamma\psi=-\psi\end{cases}$$

$\gamma=\gamma_{012}$

符号は?

5 M-brane 古典解

5-1 M-brane 古典解

M brane は固有のエネルギー密度をもつから、重力によって背景時空をまげる。その曲率がどれくらいになるかを見積もってみよう。

D 次元時空に張力 T の p-brane があるとすると、作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^Dx\sqrt{g}R - T\int d^{p+1}\sigma\sqrt{-\det G}$$

ニュートン定数を G とした。

この作用には 2つのパラメータ G と T が含まれるが、運動方程式に現れるのはその積 GT のみである。

従って、解の典形的な長さのスケールは、次元解析から

$$L^{D-p-3} = GT$$

によって与えられるはずである。

M-theoryにおいては

$$G \sim l_p^9,\ T_{M2} \sim l_p^{-3},\ T_{M5} \sim l_p^{-6}$$

なので、M2に対してもM5に対しても

$L \sim l_p$ となる。

これは古典的重力を用いた記述が信頼できないことを意味する。

しかし、もしN枚のbraneを重ねた場合を考えてみると、全体の張力がNTになるので

$$L^{D-p-3} = NGT$$

となり、Nが十分大きければ $L \gg l_p$

となり、古典的な重力による解析が信頼できる。

M2 × N枚であれば

$$L \sim N^{\frac{1}{6}} l_p$$

M5 × N枚であれば

$$L \sim N^{\frac{1}{3}} l_p$$

このことをふまえ、large N の仮定のもと

brane を古典解として表わそう。

まずは M5-brane について考えてみる。

012345 方向に広がった M5-brane を考え、

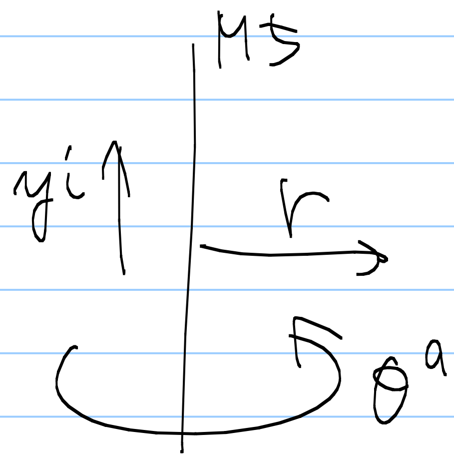
012345 方向の並進対称性

〃 のローレンツ対称性

6〜11 方向の回転対称性

を仮定すると、計量を次のようにおける。

$$ds^2 = a^2(r)\,\eta_{ij}\,dy^i dy^j + b^2(r)\left(dr^2 + r^2 d\Omega_4^2\right)$$



$a(r)$ と $b(r)$ は未知関数

さらに、M5-brane が N 枚重なっている

という情報は、

$$\oint K_4 = N$$

によって与えられる。積分は任意の r

における球面 S^4 上で行う。

この式と回転対称性より、K_4 は

次のように決まる。

$$|K_4| = \frac{N}{S^4\text{の体積}} = \frac{N}{\Omega_4 (rb)^4}$$

ただし $\Omega_4 \equiv \frac{8}{3}\pi^2$ は半径1の S^4 の

体積である。

これらをEinstein方程式に代入すると、
$a(r)$と$b(r)$に対する2階常微分方程式
が得られる。
それを解けば解が得られるのであるが、
すこしめんどうである。
実は、ブレーンがBPSであることを用いると、
$a(r)$と$b(r)$に対する1階の微分方程式
を得ることができ、簡単に解くことが
できる。その方法を紹介しておこう。

SUSYを用いるにはスピノル場を用いる
必要があるので、多脚場を次のようにとる。

$$e^{\hat{i}} = a(r)\,dy^i$$

$$e^{\hat{r}} = b(r)\,dr$$

$$e^{\hat{a}} = r\,b(r)\,\tilde{e}^{\hat{a}}$$

72

ここではハットをつけた添字は局所座標のものである。また $e^{\hat{a}}$ は半径が1の S^4 上の多脚場を表している。

0でないスピン接続の成分は、

$$\omega_{\hat{i}-\hat{j}\hat{r}} = \frac{a'}{b}\delta_{\hat{i}\hat{j}}$$

$$\omega_{a-\hat{b}\hat{r}} = \left(1+\frac{rb'}{b}\right)\delta_{a\hat{b}}$$

$$= \mathring{\omega}_{a-\hat{b}\hat{r}} + \frac{rb'}{b}\delta_{a\hat{b}}$$

$$\omega_{a-\hat{b}\hat{c}} = \mathring{\omega}_{a-\hat{b}\hat{c}}$$

ただし $\mathring{\omega}$ は $a=b=1$ であった場合のスピン接続である。

73

ブレーンがBPSであることに対応して、

$\delta\psi_\mu = 0$ であるような変換パラメータ

ξ の存在を仮定する。

系の対称性より、ξ は平坦な空間上の

定数スピノル ξ_0 を用いて、

$$\xi = S(r)\xi_0$$

と書けるはずである。$S(r)$ は r の未知

関数である。

$$D_a \xi = \partial_a \xi + \frac{1}{4}\omega_{a\hat{b}\hat{c}}\gamma^{\hat{b}\hat{c}}\xi + \frac{1}{2}\omega_{a\hat{b}\hat{r}}\gamma^{\hat{b}\hat{r}}\xi$$

$$= S\left[D_a^{(\omega_0)}\xi_0 + \frac{1}{2}\frac{rb'}{b}\gamma_{\hat{a}}{}^{\hat{r}}\xi_0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{rb'}{b}\gamma_{\hat{a}}{}^{\hat{r}}\xi$$

などを用いれば

74

$$\delta\psi_a = \frac{rb'}{2b}\gamma_{\hat{a}}\gamma_{\hat{r}}\xi + \frac{rb}{6}\gamma_{\hat{a}}\cancel{K}_4\xi = 0$$

$$\delta\psi_i = \frac{a'}{2b}\gamma_{\hat{i}}\gamma_{\hat{r}}\xi - \frac{a}{12}\gamma_{\hat{i}}\cancel{K}_4\xi = 0$$

$$\delta\psi_r = \frac{s'}{s}\xi - \frac{b}{12}\gamma_{\hat{r}}\cancel{K}_4\xi = 0$$

が得られる。これらは

$$r\gamma_{\hat{a}}\gamma_{\hat{r}}\left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{6}b\gamma_{\hat{r}}\cancel{K}_4\right)\xi = 0$$

$$\frac{a}{2b}\gamma_{\hat{i}}\gamma_{\hat{r}}\left(\frac{a'}{a} - \frac{1}{6}b\gamma_{\hat{r}}\cancel{K}_4\right)\xi = 0$$

$$\left(\frac{s'}{s} - \frac{1}{12}b\gamma_{\hat{r}}\cancel{K}_4\right)\xi = 0$$

と書きかえられる。

$$b|K_4| = \frac{N}{\Omega_4 r^4 b^3}$$ を用い、

$$\gamma_{\hat{r}}\gamma_{\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2\hat{\theta}_3\hat{\theta}_4}\xi = \xi$$

(これは M5-brane の BPS条件である) を仮定すると

75

$$\frac{N}{\Omega_4 r^4 b^3} : \frac{b'}{b} : \frac{a'}{a} : \frac{S'}{S} = -1 : \frac{1}{3} : -\frac{1}{6} : -\frac{1}{12}$$

が得られる。これは、ひとつの関数 $H(r)$ を用いて、

$$\frac{N}{\Omega_4 r^4 b^3} = -\frac{H'}{H}$$

$$a = H^{-\frac{1}{6}}$$

$$b = H^{\frac{1}{3}}$$

$$S = H^{-\frac{1}{12}}$$

と書けることを意味する。

(ただし $r \to \infty$ で $a, b, S, H \to 1$ とした。)

はじめの式に $b = H^{\frac{1}{3}}$ を代入すると、

$$\frac{N}{\Omega_4 r^4} = -H'$$

従って、 $H = 1 + \dfrac{N}{3\Omega_4 r^3}$ が得られる。

こうして、M5-braneの古典解が求まった。

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{3}}\eta_{ij}dy^i dy^j + H^{\frac{2}{3}}(dr^2 + r^2 d\Omega_4^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^3}{r^3} \qquad r_0^3 = \frac{N}{3\Omega_4}$$

同様にしてM2-braneの解を求めることができる。結果だけ与える。

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}}\eta_{ij}dy^i dy^j + H^{\frac{1}{3}}(dr^2 + r^2 d\Omega_7^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^6}{r^6} \qquad r_0^6 = \frac{N}{6\Omega_7}$$

どちらの場合にも、r_0は以前に見積もった典形的長さに一致する。

M理論の基礎 Part3

6 Multiple M-brane

6-1 問題

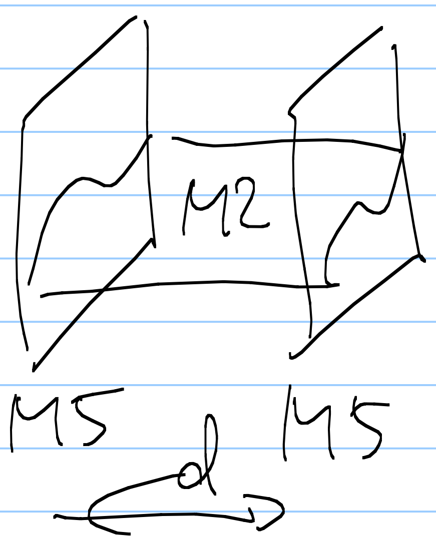
- M2-brane（1枚）上の理論
  massless場（x^I, θ_-）の理論

- M5-brane（1枚）上の理論
  （$b_{\mu\nu}$, x^i, ψ）の理論

どちらも作用が知られている。

それでは、braneがN枚重なったらどうなるか。

multiple M5-braneの場合



tensionが $d T_{M2}$ のstringとみなせる。

braneが重なると、tension =0になる。

→ tensionless strings

どのように取り扱ったらいいのかわからない。

M2-braneの場合、

最近 進展があった。

part 3では このことについて話す。

問題

M2-braneが N枚重なったときに、低エネルギー極限(IR fixed pt)でブレーン上に実現される理論は何か?

IR fixed pt のいくつかの可能性

① trivial theory

(no degrees of freedom)

全ての自由度が massive であり、
低エネルギーでは何も残らない

(例) pure Yang Mills

(glue ball の理論)

② Free theory

(non-interacting massless particles)

(例) massless QCD

(pion の理論)

③ Interacting CFT

(例) non-Abelian Coulomb phase

of SQCD

④

M2の場合には、どれになる?

M2-braneが1枚の場合には②である。

それでは枚数がN>1の場合は?

Nが非常に大きければ、ブレーンを重力の古典解としてとり扱うことができる。

古典解の中心部分を見ることで、ブレーン上の理論の情報をよみ取ることができる

= AdS/CFT.

6-2 AdS/CFT

M2-brane (BPS)の古典解は

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}} \eta_{ij} dy^i dy^j + H^{\frac{1}{3}} (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2)$$

$$H = 1 + \frac{r_0^6}{r^6} \qquad r_0^6 = \frac{N}{6\Omega_7}$$

この解の中心部分 $(r \ll r_0)$ に注目しよう。

そこでは

$$H = \frac{r_0^6}{r^6}$$

と近似できて、

$$ds^2 = \left(\frac{r^4}{r_0^4} \eta_{ij} dy^i dy^j + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 \right) + r_0^2 d\Omega_7^2$$

この計量は、かっこの中によって表される M_4 と半径 r_0 の S^7 の直積である。上記計量をもつ M_4 を AdS_4 と~~DF~~呼ぶ。

⑥

AdS : anti-de Sitter 空間

AdS_4部分は、

$$ds^2 = \left(\frac{r^4}{r_0^4}\eta_{ij}dy^i dy^j + \frac{r_0^2}{r^2}dr^2\right)$$

$r^2 = \frac{r_0^3}{2\rho}$ とおくと、

$$ds^2 = L^2\frac{\eta_{ij}dy^i dy^j + d\rho^2}{\rho^2} \qquad L = \frac{r_0}{2}$$

この座標もよく用いられる。

L は AdS 空間の半径と呼ばれる。

この metric は、brane の並進対称性、

回転対称性に対応した次の対称性を

もつ。

$$y^i \to y^i + a^i$$

$$y^i \to M^i{}_j y^j \qquad M \in SO(1,2)$$

これら以外に、次の対称性をもつ。

$$\begin{cases} y^i \to a y^i \\ \rho \to a\rho \end{cases}$$

これはブレーン上のスケール変換に対応する。

つまり、ブレーン上の理論はCFT (conformal field theory) である。

AdS空間 ⟷ CFT

AdS/CFT対応

注：スケール変換⊂共形変換なので、スケール不変性だけでは共形場の理論であるということはできない。

実はAdS空間は共形対称性の全ての変換に対応した不変性をもつので、CFTと対応しているということができる。

より詳しい情報を得るために、
braneを"あたためて"みる。
つまり、braneを温度Tの熱浴の中に
入れて、そのエントロピーがどうなるかを
見てみよう。(これはブレーン上の理論の
エントロピーとみなすことができる。)

場の理論において、有限温度の系を
あつかう便利な方法として松原method
というものがある。これは、時間方向を
ユークリッド化(Wick回転)してコンパクト
化し、その周期を $\beta = k_B/T$ とみなす
というものである。これは、分配関数
の定義にあらわれる

$$\mathrm{tr}\left(e^{-\beta H}\right)$$

があたかも時間発展演算子

$$e^{-iHt}$$

において $t=-i\beta$ というおきかえを行ってトレースをとったものであることにもとづく。

有限温度の M2-brane 解は、次の計量によって与えられる。

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}}\left(f\,d\tau^2 + dx^2 + dy^2\right) + H^{\frac{1}{3}}\left(f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_7^2\right)$$

ただし、

$$H = 1 + \frac{r_0^6}{r^6} \qquad r_0^6 = \frac{N}{6\Omega_7}$$

$$f = 1 - \frac{r_H^6}{r^6}$$

10

r_Hが温度を決めるパラメータであり、
$r=r_H$がhorizon（$g_{00}=0$となる点）
である。

このユークリッド化された計量は

$$r_H \leqq r$$

においてのみ定義されている。
horizon近傍の様子を見るために、

$$r = r_H + \epsilon^2 \quad (\epsilon\text{は微小})$$

とおいてみよう。（r, τ）座標にのみ
注目すると、

$$ds^2 = \frac{2r_H}{3} H^{\frac{1}{3}}(r_H)\left[\frac{9}{H(r_H)r_H^2}\epsilon^2 d\tau^2 + d\epsilon^2\right]$$

ここで、

$$\theta = \frac{3}{H(r_H)^{1/2} r_H}\tau$$

を定義すると、

$$ds^2 = [\epsilon^2 d\theta^2 + d\epsilon^2]$$

となる。これは極座標のmetricである。

$\epsilon = 0$ に特異性がない(とんがっていない)ためには θ の周期が 2π でなければならない。これは、τ の周期が

$$2\pi \frac{H(r_H)^{\frac{1}{2}} r_H}{3}$$

でなければならないことを意味する。

τ の周期は逆温度 β に等しいから、温度(ホーキング温度)が次のように決まる。

$$T_H = \frac{3}{2\pi H(r_H)^{\frac{1}{2}} r_H} = \frac{3}{2\pi} \frac{r_H^2}{r_0^3}$$

$r_H \ll r_0$ と仮定した。

⑫

この解はブラックホールのようなもので
あり、エントロピー (Bekenstein-Hawking エ)
は ホライズン面積 A と次の関係に
ある。

$$S = \frac{A}{4G}$$

M2-ブレーンは無限に広がっているが、ここでは
$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ の範囲のエントロピー
(エントロピー密度) を求めよう。

horizon の面積は、

$$A = \sqrt{g_{xx} g_{yy}} \times S^7 \text{面積}$$

$$= H^{-\frac{2}{3}}(r_H) \times \Omega_7 \left(H^{\frac{1}{6}} r_H\right)^7$$

$$\left(\Omega_7 = \frac{1}{3}\pi^4\right) \quad = \Omega_7 H^{\frac{1}{2}}(r_H)\, r_H^7$$

$$= \frac{\pi^4}{3} r_H^4 r_0^3 \quad \text{(数係数を無視した)}$$

13

ニュートン定数 $\left(\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{g}R \right)$

は

$$G = \frac{1}{16\pi}$$ なので、 $$r_0^6 = \frac{N}{\underbrace{6\Omega_7}_{2\pi^4}}$$

$$S = 4\pi\frac{\pi^4}{3}r_H{}^4 r_0{}^3 = \frac{16\pi^7}{27}T^2 r_0{}^9$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\pi}{27}T^2 N^{\frac{3}{2}}$$ $$dF = -SdT$$

これはどのように解釈すればよいであろうか？

$$F = -\frac{4\sqrt{2}\pi}{81}T^3 N^{\frac{3}{2}}$$

3次元において、massless 場の

温度 T におけるエントロピー密度 を自由場の

~~場~~合に計算すると、

$$S = 6\pi\zeta(3)\left(n_B + \frac{3}{4}n_F\right)T^2$$

となる。ただし n_B と n_F はボソンと

フェルミオン の自由度の数 である。

気づくことは、

- 温度依存性 $\propto T^2$ は一致する。
  (次元解析で決まるので当然)

- effective な自由度の数 n は
  brane の枚数 N と

$$n \propto N^{\frac{3}{2}}$$

  の関係にある。

2番目の性質は、IR fixed pt が free な場の理論 (そうであれば n は $n_B + \frac{7}{8} n_F$ の形の数になるはず) ではないことを意味している。

15

つまり、multiple M2-brane上に
実現される理論は、

- CFTである。
- 相互作用がある。

これ以外に期待されることとして、

- 16個の超対称性をもつ。
  (M2-braneが1/2 BPSであることより)
- SO(8)対称性をもつ
  (M2-braneまわりの回転

これらの条件を満たす理論は2007年にBagger-LambertおよびGusstavsonによって初めて構成された。

この理論は現在BLG modelと~~呼~~ばれている。

BLG modelはM2-braneを表すmodelとしては成功しなかったが、たいへんおもしろい特徴をもつので紹介しておく。

6-3 BLG model

「相互作用をもつ」という条件を外せば、さきほどの条件をもつ理論を作ることは簡単である。

$$S=\int d^3\sigma\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu x^I_a\partial^\mu x^I_b-\frac{1}{2}\psi_a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b\right)h^{ab}$$

ただし、複数枚の brane を表すために添え字 $a=1,\cdots,n$ を導入した。ただし、n はブレーンの枚数とは限らない。h^{ab} は定数行列

この理論は次の SUSY 変換のもとで不変

$$\begin{cases}\delta x^I_a=(\psi_a\gamma^I\xi)\\ \delta\psi_a=(\partial_\mu x^I)\gamma^\mu\gamma_I\xi\end{cases}$$

ただし
$$\begin{cases}\gamma^{\mu\nu\rho}\xi=\epsilon^{\mu\nu\rho}\xi\\ \gamma^{\mu\nu\rho}\psi=-\epsilon^{\mu\nu\rho}\psi\end{cases}$$

ここで、形式的に基底 T^a $(a=1,\cdots,n)$ を導入し、その内積を

$$\langle T^a, T^b \rangle = h^{ab}$$

と定義する。さらに、

$$x^I = x^I_a T^a, \quad \psi = \psi_a T^a$$

と表すことにすれば、

$$S = \int d^3\sigma \left(-\frac{1}{2}\langle \partial_\mu x^I, \partial^\mu x^I \rangle - \frac{1}{2}\langle \psi, \gamma^\mu \partial_\mu \psi \rangle \right)$$

$$\begin{cases} \delta x^I = (\psi \gamma^I \xi) \\ \delta \psi = (\partial_\mu x^I)\gamma^\mu \gamma_I \xi \end{cases}$$

のように表すことができる。

この理論に相互作用を導入することを考えよう。

相互作用を入れる前、この理論はスケール不変であり、場のスケール次元は、

$$x^I ; 1/2 \quad \psi ; 1 \quad \xi ; -1/2$$

とあたえられる。

このスケール不変性を破らずに書くことのできる項は

$$\partial x \partial x , \quad \psi \partial \psi , \quad \psi^2 x^2 , \quad x^6$$

だけであり、SUSY変換は、

$$\begin{cases} \delta x = \xi \psi \\ \delta \psi = \partial x \xi + x^3 \xi \end{cases}$$

という形だけが許される。

しかしこれらの係数をうまくとってもうまくいかない（$\delta S = 0$にできない）ことが以下のようにしてわかる。

20

SUSY変換の交換関係を計算してみよう。

$$\delta_1 x \sim \xi_1 \psi$$

$$\delta_2 \delta_1 x \sim \xi_1 \partial x \xi_2 + \xi_1 x^3 \xi_2$$

従って、

$$[\delta_2 \delta_1] x \sim (\xi_1 \gamma^\mu \xi_2) \partial_\mu x + (\xi_1 \xi_2) x^3$$

同様に

$$\delta_1 \psi \sim \partial x \xi_1 + x^3 \xi_1$$

$$[\delta_2 \delta_1] \psi \sim \partial \psi \xi_1 \xi_2 + x^2 \psi \xi_1 \xi_2$$

どちらも

$$[\delta_2 \delta_1] \sim (\xi_1 \gamma^\mu \xi_2) \partial_\mu + x^2 (\xi_1 \xi_2)$$

と書けそうである。

㉑

もしSがSUSY変換のもとで不変であれば、$[\delta_2, \delta_1]$のもとでも不変でなければならない。

第1項は並進対称性なので、Sは不変。

ということは、Sは第2項の変換

$$\begin{cases} \delta x = (x^2 \xi_1 \xi_2)\, x \\ \delta \psi = (x^2 \xi_1 \xi_2)\, \psi \end{cases}$$

のもとで不変でなければならない。

これは$(x^2 \xi_1 \xi_2)$をパラメータとする局所的変換である。

この変換のもとでの不変性を実現することは、係数をどのように取っても不可能

これは局所的変換なので、ゲージ場を導入すればうまくいくのではないか？

実際にうまくいく。

ゲージ不変性とスケール不変性より、許される作用の形は

$$S = D\chi D\chi + \psi D\psi$$
$$+ \psi^2\chi^2 + \chi^6$$
$$+ \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{tr}\left(AdA - \frac{2}{3}A^3\right)$$

$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ は共変微分

$\left(\frac{1}{4g^2}\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}^2\right)\right.$ はスケール不変性を破るので禁止される。$\left.\right)$

この理論はおもしろい代数構造をもつ。

2つのベクトル空間が考えられる。

$\mathcal{A}$: T^a のなすベクトル空間

$\mathcal{B}$: ゲージ群のリー代数

$\mathcal{B}$はリー代数なので、その交換関係により

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$$

が定義される。

場　$X^I = X^I_a T^a$, $\Psi = \Psi_a T^a$ は

$\mathcal{A}$の元であるが、これらがゲージ群で線形に変換されるということは

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

が定義されていることを意味する。

さらに、

この作用が $[\delta_2, \delta_1]$ で不変であるためには、

この第2項が

$$\lambda = x^2 \xi_1 \xi_2 \qquad \heartsuit$$

をパラメータとするゲージ変換になっている

必要がある。

$\heartsuit$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ という

map が定義されることを意味する。

$$\begin{cases} \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} & ① \\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} & ② \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B} & ③ \end{cases}$$

②と③を組みあわせると、

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

が定義されることを意味する。

㉕

つまり、

$$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}{}_d T^d$$

のようなものが定義されている。

作用の不変性をくわしく調べると、

$$f^{abcd} \equiv f^{abc}{}_e h^{ed}$$

は完全反対称でなければならないことがわかる。

このようなものを 3-algebra と呼ぶ。

リー代数におけるヤコビ恒等式に対応するものとして、

fundamental identity

$[X, Y, \text{○}] = \text{○}'$ と表すとき、

$$[A, B, C]' = [A', B, C] + [A, B', C] + [A, B, C']$$

が成り立たなければならない。

ここで問題となるのは、

- 3-代数にはどのような種類があるのか？
- リー代数のように、いろいろな3代数があるのか

ということである。

もし SU(N) のように整数 N でラベルされる系列があれば、それが N枚の M2-brane 上の理論を与えるかもしれない。

ところが

fundamental identity は非常に強い条件であり、物理的な要請

$$\begin{cases} h^{ab} \text{ が正定値、} \\ n \text{ (T^aの個数) が有限} \end{cases}$$

を課すと A_4 と呼ばれる代数

$$\begin{cases} n = 4 \\ h^{ab} = \delta^{ab} \\ f^{abcd} = \epsilon^{abcd} \end{cases}$$

しか許されないことが証明されてしまった。

BLG モデルでは M2-brane を表すことはできない。

反省してみよう。

BLG modelは、

M2-braneのもつ対称性

- 共形対称性
- 16個のSUSY
- SO(8)対称性

のもとで作用が不変であると

仮定することで得られた。

しかし、これでは欲しいものは

得られなかった。

何が悪かったのか。

条件が強すぎる?

25

そもそも、

「作用の対称性」＝「理論の対称性」

ではない。

たとえば、（チャージのないときの）

Maxwell方程式は

$$E \leftrightarrow B$$

の対称性をもつが

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

であり、不変ではない。

つまり、作用は必ずしも系の対称性

をもたなくてもよい。

実は、16個のSUSYを要求するのをやめて、12個のSUSYに減らすと、M2 braneをうまく表す作用を作ることができる＝ABJM model

arXiv:0806.1218
Aharony, Jafferis, Bergman, & Maldacena

6-4 Chern-Simons theory

BLG model の作用は次の項を含む。

$$S_{CS} = \frac{k}{2}\int \mathrm{tr}\left(AdA - \frac{2i}{3}AAA\right)$$

この項は Chern-Simons 項と呼ばれる。
CS 項は field strength

$$F = dA - 2\pi i AA$$

を用いて書かれてはいないが、ゲージ変換

$$\delta A = d\lambda - 2\pi i[A, \lambda]$$

のもとで不変である。これは次のように確かめられる。

まず A の任意の変分に対して

$$\delta S_{cs} = k \int \mathrm{tr}\left(\delta A\left(dA - 2\pi i AA\right)\right)$$

$$= k \int \mathrm{tr}(\delta A\, F)$$

ここに、$\delta A = D\lambda$ を代入すると、

$$\delta S_{cs} = k \int \mathrm{tr}(D\lambda\, F)$$

$$= -k \int \mathrm{tr}(\lambda DF)$$

$$= 0$$

ただし、ビアンキ恒等式 $DF = 0$ を用いた。

ここで、フラックスが次のように量子化されているとしよう。

$$\int \mathrm{tr} F = n$$

$$\delta S_{CS} = k \int \mathrm{tr}(\delta A\, F)$$

は、単位フラックスが電荷 k を

をもつことを意味している。ということは

ディラックの量子化条件より、$k \in \mathbb{Z}$ で

なければならない。

整数 k のことを Chern-Simons level

あるいは単に level と呼ばれる。

もし作用が S_{CS} だけであり、他の

部分を含まなければ、運動方程式は

$$F = 0$$

である。これはゲージ場が物理的な

自由度をもたないことを意味する。

3次元のYang-Mills理論

$$S = -\frac{1}{4g^2}\int d^3x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

では、ゲージ場は自由度1をもつ。

CS理論との関係をよく理解するために次の作用を考えてみよう。

$$S = \int d^3x \left[-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu \partial_\nu A_\rho \right]$$

運動方程式は、

$$\frac{1}{g^2}\partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = 0$$

$F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho}V^\rho$ を代入すると、

$$\partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho}V_\rho = -mV^\mu \qquad ①$$

ただし $m = kg^2$。両辺に m をかけると

$$\partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho} m V_\rho = -m^2 V^\mu \qquad ②$$

②の左辺に①を代入すると、

$$\partial^2 V^\mu = m^2 V^\mu$$

が得られる。つまり photon は massive になっている。

ゲージ対称性は破れていないので、これは Higgs mechanism ではない。

CS term は、ゲージ場に対する mass term のようなものと見なすこともできる。

$F_{\mu\nu}^2$ 項のない CS 理論を得るには、$g \to \infty$ の極限をとれば良い

この極限において、photon の mass は発散し、photon は decouple する。

次に、photon のスピンについて見てみよう。
photon の質量が 0 ではないので、
静止系をとることができる。
このとき運動方程式は

$$\underbrace{(-ie^{0ij})}_{\text{スピン行列}}\underbrace{(i\partial_0)}_{\text{エネルギー演算子}}V_j = mV^i$$

photon のエネルギーが $|m|$ であることを
用いれば、

$$s|m| = m$$

つまり

$$s = \mathrm{sign}(m)$$

が成り立つ。m の符号によってスピンの
符号が反転するがこれは $k \neq 0$ のときに
パリティが破れていることとつじつまが
合っている。

6-5 3次元のスピノル

3次元のディラック行列とスピノルについて簡単にのべておく。

3次元のスピノルは2成分であり、ディラック行列は 2×2 行列である。

例えば次のようにとることができる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

これらはすべて実であるから、マヨラナスピノルの定義として11次元と同様に

$$(\psi_a)^* = \psi_a$$

を用いることができる。

反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ は

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \epsilon^{\mu\nu\rho} \mathbb{1}_2$$

によって定義する。

3次元における荷電共役行列は反対称行列 ϵ^{ab} である。

スピノル添字のとり扱いは11次元の場合と同じである。つまり

$$\psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b \qquad \psi_a = \psi^b \epsilon_{ba}$$

転置に対する公式

$$\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba}, \quad (\gamma^\mu)^{ab} = (\gamma^\mu)^{ba}$$

は11次元の場合と同じである。

$$\psi_1 \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_k} \psi_2 = (-)^k \psi_2 \gamma^{\mu_k} \cdots \gamma^{\mu_1} \psi_1$$

も同じ。

6-6 ABJM model

ABJM model は $U(N)\times U(N)$ ゲージ対称性をもつ Chern-Simons-matter system である。

次の場を含む。

	$U(N)$	$\times\ U(N)$	$\times\ SU(4)_R$	$\times\ U(1)_B$
A^1	adj	1	1	0
A^2	1	adj	1	0
q^i	N	$\overline{N}$	4	1
ψ_i	N	$\overline{N}$	$\overline{4}$	1

$$\underbrace{SU(4)_R\times U(1)_B}_{\text{global}}$$

$i=1\sim4$ は $SU(4)_R$ 添え字

$U(1)_B$ はゲージ変換に吸収できそうであるがそうではない。

これについてはあとで詳しく述べる。

CS levelは k と $-k$ である。つまり

$$S_{CS}=\int d^3x\ \mathrm{tr}\Big[\frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(A^1_\mu\partial_\nu A^1_\rho-\frac{4\pi i}{3}A^1_\mu A^1_\nu A^1_\rho\Big)$$
$$-\frac{k}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(A^2_\mu\partial_\nu A^2_\rho-\frac{4\pi i}{3}A^2_\mu A^2_\nu A^2_\rho\Big)\Big]$$

と言う。

それ以外の部分は、

$$S_{kin}=\int d^3x\ \mathrm{tr}\Big[-D_\mu\bar{q}_i D^\mu q^i+\bar{\psi}^i\gamma^\mu D_\mu\psi\Big]$$

$$S_{pot}=\frac{2}{k^2}\int d^3x\ \mathrm{tr}\Big[-q^i\bar{q}_i q^k\bar{q}_j q^j\bar{q}_k$$
$$+\frac{1}{6}q^k\bar{q}_i q^i\bar{q}_j q^j\bar{q}_k+\frac{1}{6}q^i\bar{q}_i q^j\bar{q}_j q^k\bar{q}_k$$
$$+\frac{2}{3}q^i\bar{q}_k q^j\bar{q}_i q^k\bar{q}_j\Big]$$

$$S_Y=-\frac{1}{k}\int d^3x\ \mathrm{tr}\Big[2\psi_i\bar{\psi}^j q^i\bar{q}_j-2\bar{\psi}^i\psi_j\bar{q}_i q^j$$
$$-\psi_i\bar{\psi}^i q^j\bar{q}_j+\bar{\psi}^i\psi_i\bar{q}_j q^j$$
$$+\epsilon^{ijkl}\psi_i\bar{q}_j\psi_k\bar{q}_l-\epsilon_{ijkl}\bar{\psi}^i q^j\bar{\psi}^k q^l\Big]$$

④

SUSY変換は

$$\delta \phi^i = \sqrt{2}\, \xi^{ij} \psi_j$$

$$\delta \psi_i = -\sqrt{2}\gamma^\mu \xi_{ij} D_\mu \phi^j + \frac{\sqrt{2}}{k}\xi_{ij}(\phi^k \bar{\phi}_k \phi^j - \phi^j \bar{\phi}_k \phi^k) - \frac{2\sqrt{2}}{k}\xi_{jk}(\phi^j \bar{\phi}_i \phi^k)$$

$$\delta A^1_\mu = -\frac{\sqrt{2}i}{k}\left[\xi_{ij}\gamma_\mu(\phi^i \bar{\psi}^j) + \xi^{ij}\gamma_\mu(\psi_i \bar{\phi}_j)\right]$$

$$\delta A^2_\mu = \frac{\sqrt{2}i}{k}\left[\xi^{ij}\gamma_\mu(\bar{\phi}_i \psi_j) + \xi_{ij}\gamma_\mu(\bar{\psi}^i \phi^j)\right]$$

ただし

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}\ , \quad (\xi_{ij})^* = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijkl}\xi_{kl}$$

$SU(4)_R$ 添え字は反対称であり、6個の成分をもつ。従ってこの超対称性は $\mathcal{N}=6$ である。(それぞれ2成分 spinor なので12個の supercharge がある。)

6-7 moduli space

この理論がM2-braneを表していることを見るために"moduli space"を調べよう。moduli spaceはスカラー場の真空期待値がなす空間のことである。

Single M2-braneについて見たように、スカラー場の真空期待値はM2-braneの位置を表す。

スカラー場が座標 x^μ によらず一定、それ以外の場 $=0$ としてみよう

このとき、スカラー場の値はポテンシャルの極小点になるはずである。

43

ABJMモデルのポテンシャルは次のように書くことができる。

$$V(q) = \frac{2}{3k^2}\int d^3x \ \mathrm{tr}\left(Q^{i}{}_{k}{}^{j} (Q^{i}{}_{k}{}^{j})^\dagger \right)$$

ただし

$$Q^{i}{}_{k}{}^{j} = T^{i}{}_{k}{}^{j} - \frac{1}{2}\delta^{j}_{k} T^{i}{}_{l}{}^{l} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{k} T^{j}{}_{l}{}^{l}$$

$$T^{i}{}_{k}{}^{j} = q^i \bar{q}_k q^j - q^j \bar{q}_k q^i$$

これは非負である。従って、ポテンシャルの極小点は次の式によって与えられる。

$$Q^{i}{}_{k}{}^{j} = 0$$

(ポテンシャルが斉次なので、極小=最小である。)

これは $T^{i}{}_{k}{}^{j} = 0$ と等価である。

もし全ての$\mathcal{g}^i$が対角行列であれば明らかに解である。

実は $V(\mathcal{g}^i)=0$ の解は、ゲージ変換を用いて常に対角行列にできる。

$$\mathcal{g}^i = \begin{pmatrix} \mathcal{g}^i_1 & & & \\ & \mathcal{g}^i_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathcal{g}^i_N \end{pmatrix}$$

$\mathcal{g}^i_{(m)}$ を m番目の M2-brane の座標、とみなすことができる?

しかしこれは正しくない。

それぞれの対角成分をまわす $U(1)$ 対称性が残されている。つまり、$\mathcal{g}^i_1$ の8個の成分のうち、1つはゲージ自由度

45

次元がひとつ足りない。

この足りない次元は"dual photon"

によって補われる。

ここではひとつの対角成分に注目するために、

ゲージ群が $U(1)\times U(1)$ の場合を考える。

この場合、作用は次のようになる。

$$S = S_{cs} + S_{kin}$$

$$S_{cs} = \int d^3x \, \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(A^1_\mu \partial_\nu A^1_\rho - A^2_\mu \partial_\nu A^2_\rho\right)$$

$$S_{kin} = \int d^3x \, \mathrm{tr}\left[-D_\mu \bar{q}_i D^\mu q^i + \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi\right]$$

$$D_\mu q^i = \partial_\mu q^i - i(A^1_\mu - A^2_\mu) q^i$$

3次元では、U(1)ゲージ場の dual field は

スカラー場である。

$$A_1 \to F_2 \xrightarrow{*} F_2 = da$$

このスカラー場のことを dual photon と呼ぶ。

ABJM model において、2つのU(1)の

対角部分を $U(1)_{diag}$ とする。

U(1) diag のゲージ場に対応する

運動方程式を求めよう。そのために、

$\delta A_\mu^1 = \delta A_\mu^2 = \delta A_\mu^{diag}$ という変分を

とると、

$$\delta S = \delta S_{CS} = \int d^3x\, k\, \delta A^{diag} \wedge (F^1 - F^2)$$

となる。ここで matter field があらわれないのは、A_μ^{diag} が matter field には couple していないからである。

47

A^{diag}は補助場であり、その運動方程式

$$k(F^1 - F^2) = 0$$

は次のように解くことができる。

$$k(A^1_\mu - A^2_\mu) = \partial_\mu a$$

ここであらわれたスカラー場 a が dual photon field である。

dual photon field a と flux F_2^{diag} は正準共役量の関係にある。従って、

$$e^{2\pi i p a}$$

という演算子は $\oint F_2^{diag}$ を p だけ変化させる。$\oint F_2^{diag}$ はフラックスの量子化条件により整数に量子化されているので p の値としては整数値だけが許される。

このことは、aが周期1でコンパクト化されたS^1上に値をとる角度変数であることを意味している。

$$k(A^1_\mu - A^2_\mu) = \partial_\mu a$$

という式は、ゲージ変換

$$\delta A^1_\mu = \partial_\mu \lambda^1, \quad \delta A^2_\mu = \partial_\mu \lambda^2$$

のもとで、aが

$$\delta a = k(\lambda^1 - \lambda^2)$$

と変換されることを意味している。また同時に、g^iとψ_iも

$$g'^i = e^{2\pi i(\lambda^1 - \lambda^2)} g^i$$

$$\psi'_i = e^{2\pi i(\lambda^1 - \lambda^2)} \psi_i$$

のように変換される。

$\theta = \lambda_1 - \lambda_2$ とおけば

$$\begin{cases} a' = a + k\theta \\ g'_i = e^{2\pi i\theta} g_i \\ \psi'_i = e^{2\pi i\theta} \psi_i \end{cases}$$

ここで $a=0$ というゲージ固定を行おう。

aは周期1の角度変数なので、これは

$$a = 整数$$

といっているのと同じことである。このゲージ固定の結果、連続的なゲージ変換は固定されるが、

$$\theta = \frac{n}{k}$$

による変換はまだ固定されずに残る。

このため、

$$(g^1, g^2, g^3, g^4) \sim (e^{\frac{2\pi i n}{k}} g^1, e^{\frac{2\pi i n}{k}} g^2, e^{\frac{2\pi i n}{k}} g^3, e^{\frac{2\pi i n}{k}} g^4)$$

という同一視が行われる。

この結果、moduli spaceは、
4つの複素数 z^i によって張られる空間
$\mathbb{C}^4$ に対して、上記の同一視を行って
得られる空間 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ になる。

従ってもし $k=1$ であれば $\mathbb{C}^4$ 上に
いる M2-brane を表していると考えられる。

6-8 monopole operators

dual photon field を考慮しない場合、
γ^i は U(1) ゲージ変換で回転するので、
M2-brane の座標とは成り得なかった。

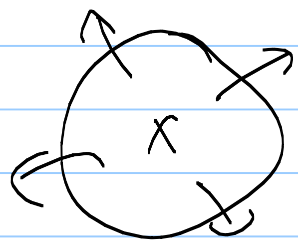
言い換えると、γ^i はゲージ不変ではないので、M2-brane の位置という物理量にはなり得なかった。

しかし、dual photon operator を用い、
($k=1$ のとき) $a=0$ というゲージ固定を行えば γ^i を座標とみなすことができた。

これは、$e^{-2\pi i a \gamma^i}$ というゲージ不変 op が定義できるといってもよい。

前に述べたように、$e^{-2\pi i a}$ という op は
フラックス $\oint F^{diag}$ を -1 だけ変化
させる。

つまり、 $\mathcal{O} = e^{-2\pi i a}$ のような
operator を時空の1点に挿入すると、
そのまわりの面で $\oint F^{diag}$ が -1 になる。



このような local operator のことを
monopole operator と呼ぶ。

ABJM model はラグランジアンレベルでは $\mathcal{N}=6$ のSUSYしかもたないが、このようなソリトン的 object を考えることにより対称性が $\mathcal{N}=8$ に拡大すると考えられている。

$N^{\frac{3}{2}}$ などは…

7 Exact results

7-1 Superconformal symmetry

ABJM model のpartition functionを計算したい。

$$Z = \int D\phi \, e^{-S_{ABJM}}$$

ϕ: 全ての場

S_{ABJM}: Euclid化されたABJM modelのaction

体積による発散をさけるために、S^3 コンパクト化しておく。

Free energy density

$$Z = e^{-\mathrm{Vol}(S^3) F}$$

によって定義される。

55

AdS/CFTによる解析から期待されること、

$$F \propto N^{\frac{3}{2}}$$

このようなN依存性は、摂動論では得ることができない。

実は、supersymmetryをうまく用いることで、free energyを(large Nで) exactに求めることができる。

Kapustin, Willett, & Yaakov
0909.4559

Drukker, Marino, & Putrov
1007.3837

Herzog, Klebanov, & Pufu
1011.5487

56

この計算のためには、ABJM model のもつ
$\mathcal{N}=6$ susy は必要ではなく、
$\mathcal{N}=2$ susy (super conformal sym) のみを
用いる。
そこで、3次元の $\mathcal{N}=2$ susy について
まとめておこう。

$d=3$, $\mathcal{N}=2$ supersymmetry
　$\sim$ $d=4$, $\mathcal{N}=1$ supersymmetry に類似

Vector multiplet

$$\begin{cases} A_\mu & (\mu=0,1,2) \quad \text{gauge field} \\ \sigma & \text{real scalar field} \\ \lambda & \text{complex spinor field} \\ D & \text{real auxiliary field} \end{cases}$$

59

chiral multiplet

$$\begin{cases} \phi & \text{complex scalar field} \\ \psi & \text{complex spinor field} \\ F & \text{complex auxiliary field} \end{cases}$$

Susy transformation (Euclidean)

ϵ と $\epsilon^\dagger$ が parameter

(Euclid

の場合 これらは独立なものとみなす。)

Vector multiplet

$$\delta A_\mu = \frac{i}{2}(\epsilon^\dagger \gamma_\mu \lambda - \lambda^\dagger \gamma_\mu \epsilon)$$

$$\delta \sigma = -\frac{1}{2}(\epsilon^\dagger \lambda + \lambda^\dagger \epsilon)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}(\epsilon^\dagger \gamma^\mu (D_\mu \lambda) - (D_\mu \lambda^\dagger)\gamma^\mu \epsilon)$$
$$- \frac{i}{2}(\epsilon^\dagger [\lambda, \sigma] - [\lambda^\dagger, \sigma]\epsilon)$$
$$+ \frac{i}{6}((D_\mu \epsilon^\dagger)\gamma^\mu \lambda - \lambda^\dagger (D_\mu \epsilon))$$

58

$$\delta\lambda = \left(-\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D + i\gamma^{\mu}D_{\mu}\sigma\right)\epsilon + \frac{2i}{3}\sigma\gamma^{\mu}D_{\mu}\epsilon$$

$$\delta\lambda^{\dagger} = \epsilon^{\dagger}\left(\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - D - i\gamma^{\mu}D_{\mu}\sigma\right) - \frac{2i}{3}\sigma D_{\mu}\epsilon^{\dagger}\gamma^{\mu}$$

chiral multiplet

$$\delta\phi = \epsilon^{T}\psi$$

$$\delta\phi^{\dagger} = \psi^{\dagger}\epsilon$$

$$\delta\psi = \left(-i\gamma^{\mu}D_{\mu}\phi - i\sigma\phi\right)\epsilon - \frac{i}{3}\gamma^{\mu}(D_{\mu}\epsilon)\phi + \epsilon^{*}F$$

$$\delta\psi^{\dagger} = \epsilon^{\dagger}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\phi^{\dagger} + i\sigma\phi^{\dagger}\right) + \frac{i}{3}\phi^{\dagger}(D_{\mu}\epsilon^{\dagger})\gamma^{\mu} + \epsilon^{T}F^{\dagger}$$

$$\delta F = \epsilon^{T}\left(-i\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi + i\lambda\phi + i\sigma\psi\right)$$

$$\delta F^{\dagger} = \left(iD_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{\mu} - i\lambda^{\dagger}\phi^{\dagger} + i\sigma\psi^{\dagger}\right)\epsilon^{*}$$

59

ただし、D_μは gauge Tr に対する cov. der.

$$D_\mu = \partial_\mu + i[A_\mu, \cdot\,]$$

parameter に対する微分は、constant の ϵ に対して $D_\mu \epsilon = 0$ である。

$D_\mu \epsilon$ 項を導入したのは、superconformal 変換を与えるため。

parameter ζ の superconformal 変換は rigid susy 変換に対して

$$\epsilon = x^\mu \gamma_\mu \zeta$$

を代入することで得られる。この場合

$$D_\mu \epsilon = \gamma_\mu \zeta$$

ϵを次のように置くと、一般のsusy変換を表すことができる。

$$\epsilon = \xi + x^\mu \gamma_\mu \zeta \quad \cdots \quad \otimes$$

ξ : rigid susy 変換

ζ : superconformal 変換

$\otimes$は次の方程式の一般解

$$D_\mu \epsilon = \gamma_\mu \, ◍ \quad \text{(Killing spinor eq.)}$$

$\uparrow$ spinor（何でもよい）

実は、このsusy変換は、一般の conformally flat な manifold

$$ds^2 = f(x)\, \delta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

上の理論に対しても同じ式で表わされる。この場合、D_μ は spin-connection も含むとする。

61

曲がった manifold上では ϵは αによって与えられるのではなく、Killing spinor eq.の解として定義される。

このsusy変換で次のactionは不変。

$$S_{\text{vector}} = \int d^3x\sqrt{g}\ \mathrm{Tr}\left[\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2i}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right) - \lambda^\dagger\lambda + 2D\sigma\right]$$

$$S_{\text{chiral}} = \int d^3x\sqrt{g}\left(D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + \frac{3}{8}R\phi^\dagger\phi + i\psi^\dagger \not{D}\psi + F^\dagger F - \phi^\dagger\sigma^2\phi + \phi^\dagger D\phi - \psi^\dagger\sigma\psi + i\phi^\dagger\lambda^\dagger\psi - i\psi^\dagger\lambda\phi\right)$$

ゲージ群、matterの表現は任意。

Trはゲージ群 G のもとで不変な内積であり、正定値とは限らない。

たとえば、ABJM model

$$G = U(N)_k \times U(N)_{-k}$$

の場合には、

$$\mathrm{Tr}\, A dA = \frac{k}{4\pi} \mathrm{tr}\, A^{(1)} dA^{(1)} - \frac{k}{4\pi} \mathrm{tr}\, A^{(2)} dA^{(2)}$$

matter action の各項は、

$$\psi^\dagger \sigma \psi = \psi^\dagger_i \sigma^a (T_a)^i{}_j \psi^j$$

のように、解釈する。

ABJM model の場合には、

$$R = (N, \overline{N}) \oplus (N, \overline{N}) \oplus (\overline{N}, N) \oplus (\overline{N}, N)$$

63

Rはconformally flatなmanifoldの曲率である。以下では、単位半径のS^3の場合を考える。このとき

$$R = 2 .$$

ABJM modelの場合これら以外にも相互作用項(superpotential項)が存在する。

$$S_{ABJM} = S_{vector} + S_{chiral} + S_{superpot.}$$

7-2 localization

さきほど与えた作用を用いて,

$$\int \mathcal{D}\Phi\, e^{-S}$$

を計算したい。これは以下のようになる。

ここでは話を簡単にするために,

$S = S_{vector}$ としておく。

作用を次のように変形する

$$S = S_{vector} + t\delta V \qquad t \in \mathbb{R}$$

ただし、δ は ϵ としてKilling spinor eq の解のひとつを選ぶことで定義されるSUSY変換.

新たに加えた項が δ 不変、つまり

$$\delta^2 V = 0$$

であると仮定する。

65

このとき、

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi\, e^{-(S_{\text{vecav}} + t\delta V)}$$

はtに依存しない。

証明

$\Phi' = \Phi + \delta\Phi$ とする。

$$0 = \int \mathcal{D}\Phi'\, V[\Phi']\, e^{-S[\Phi']} - \int \mathcal{D}\Phi\, V[\Phi]\, e^{-S[\Phi]}$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi\, V[\Phi']\, e^{-S[\Phi]} - \int \mathcal{D}\Phi\, V[\Phi]\, e^{-S[\Phi]}$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi\, \delta V\, e^{-S - t\delta V}$$

$$= -\frac{d}{dt} \int \mathcal{D}\Phi\, e^{-S - t\delta V}$$

従ってZはtによらない。

t→0で計算する。

$$V = \mathrm{Tr}'\left((\delta\lambda)^\dagger \lambda\right)$$

とすると、上記の条件をみたすことがわかる。

δとして、 $\epsilon^\dagger = 0$, $\begin{cases} D_\mu \epsilon = \frac{i}{2}\gamma_\mu \epsilon \\ |\epsilon| = 1 \end{cases}$ を用いる。

Tr'は正定値となるように定義されたトレースで Tr とは異なってよいとしよう。

すると、

$$\delta V = \mathrm{Tr}'\Big[\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\sigma D^\mu\sigma + (D+\sigma)^2$$

$$+ i\lambda^\dagger\gamma^\mu D_\mu\lambda + i\lambda^\dagger[\sigma,\lambda] - \frac{1}{2}\lambda^\dagger\lambda\Big]$$

の boson 部分 (1行目) は正定値

$t\to\infty$ の limit では、

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = 0 \\ \sigma = \sigma_0 \ (\text{const エルミート行列}) \\ D = -\sigma_0 \end{cases}$$

の部分のみが積分に寄与する。

このとき

$$Z = \int d\sigma_0 \, e^{-S_{cl}[\sigma_0]} Z_{1\text{-loop}}[\sigma_0]$$

classical contribution は　S_{vector} より

$$S_{cl}[\sigma_0] = i\int d^3x \sqrt{g}\, 2\,\mathrm{Tr}(D\sigma)$$

$$= -i\int d^3x \sqrt{g}\, 2\,\mathrm{Tr}(\sigma_0{}^2)$$

$$= -4\pi^2 i\,\mathrm{Tr}(\sigma_0{}^2)$$

さいごに $\mathrm{Vol}(S^3) = 2\pi^2$ を用いた。

$Z_{1\text{-loop}}[\sigma_0]$ は fluctuation の 2次までを考慮することで得られる。

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{t}}\sigma'$$

$$D = -\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} D'$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi' \quad \longleftarrow \sigma, D \text{ 以外}$$

を作用に代入すると、

68

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$S = t\delta V$$

$$= \int \sqrt{g}\, d^3x \, \mathrm{Tr}' \Big(\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + [A_\mu, \sigma_0]^2$$

$$+ \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + (D + \sigma)^2 + i\lambda^\dagger \not{D} \lambda$$

$$+ i[\lambda^\dagger, \sigma_0]\lambda - \frac{1}{2}\lambda^\dagger \lambda$$

$$+ \partial_\mu \bar{c} \partial^\mu c + b\nabla^\mu A_\mu \Big)$$

prime を省略した。

ゲージ固定項（最後の行）を導入した。

∇_μ は spin-connection のみに対する共変微分であり、ゲージ場を含まない。

- D 積分 → $(D+\sigma)^2$ がなくなる。
- b 積分 → $\delta(\nabla^\mu A_\mu)$ を与える。

$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -A^\mu \nabla^2 A_\mu$$

69

◦ A_μ を divergenceless part と divergence part に分ける。

$$A_\mu = \partial_\mu \phi + B_\mu \quad (\nabla^\mu B_\mu = 0)$$

これを $\delta(\nabla^\mu A_\mu)$ に代入すると、$\delta(-\nabla^2\phi)$ となる。

◦ ϕ 積分を行う。

$$\int \mathcal{D}\phi \ \delta(-\nabla^2\phi)\, e^{-\int \nabla^2\phi\, \nabla^2\phi}$$

$$= \det(-\nabla^2)^{-\frac{1}{2}}$$

?

◦ σ 積分を行う

$$\int \mathcal{D}\sigma \ e^{\int \sigma\nabla^2\sigma}$$

$$= \det(-\nabla^2)^{-\frac{1}{2}}$$

cancel

◦ $c, \bar{c}$ 積分

$$\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \ e^{\int \bar{c}\nabla c}$$

$$= \det(-\nabla^2)$$

ここまでで得られたのは、

$$Z = \int d\sigma_0 \, e^{-4\pi^2 i \mathrm{Tr}(\sigma_0^2)} \int \mathcal{D}\Phi \, e^{-S}$$

$$S = \int \sqrt{g}\, d^3x \, \mathrm{Tr}' \Big(-B^\mu \nabla^2 B_\mu + [B_\mu, \sigma_0]^2 + i\lambda^\dagger \not{D} \lambda + i[\lambda^\dagger, \sigma_0]\lambda - \frac{1}{2}\lambda^\dagger \lambda \Big)$$

σ_0（エルミート行列）は次のように対角化できる。

$$\sigma_0 = U \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{\mathrm{rank}G} \end{pmatrix}}_{\text{Cartan subalgebra}} U^\dagger$$

$$\int d\sigma_0 = \int da \Big(\prod_{\underset{\text{roots of } G}{\alpha}} \alpha(a) \Big)^2$$

多分まちがい

71

こうすると、σ_0 は Cartan subalgebra に値をとるとしてよい。

$$B_\mu = \sum_\alpha B_\mu^\alpha X_\alpha + h_\mu$$ と分解しよう。

ただし X_α は $\mathrm{Tr}'(X_\alpha, X_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ のように規格化するとする。

h_μ は Z に (constant 因子をのぞき) 寄与しない。→ 無視

$$[\sigma_0, X_\alpha] = \alpha(\sigma_0)$$ を用いると、

$$S = \int \sqrt{g}\, d^3x \sum_\alpha \Big[B_\alpha^\mu \left(-\nabla^2 + \alpha(\sigma_0)^2\right) B_{\mu\alpha}$$
$$+ \lambda_\alpha^\dagger \left(i\not{\nabla} + i\alpha(\sigma_0) - \frac{1}{2} \right) \lambda_\alpha \Big]$$

あとは S^3 上の球面調和関数を用いて展開することにより、積分を行う。

divergenceless vector B_μ に対しては、

$-\nabla^2$ の固有値	縮退度
$(l+1)^2$	$2l(l+2)$

$l=1,2,\cdots$

よって、

$$\det(\text{bosons}) = \prod_\alpha \prod_{l=1}^\infty \left[(l+1)^2 + \alpha(\sigma_0)^2\right]^{2l(l+2)}$$

フェルミオン λ については、

$i\not{D}$ の固有値	縮退度
$\pm\left(l+\frac{1}{2}\right)$	$l(l+1)$

$l=1,2,\cdots$

よって

$$\det(\text{fermions}) = \prod_\alpha \prod_{l=1}^\infty \left[(l+i\alpha(\sigma_0))(-l-1+i\alpha(\sigma_0))\right]^{l(l+1)}$$

73

あわせると、

$$Z^{g}_{1\text{-loop}}[\sigma_0] = \prod_{\alpha}\prod_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i\alpha(\sigma_0))^{\ell(\ell+1)}(-\ell-1+i\alpha(\sigma_0))^{\ell(\ell+1)}}{((\ell+1)^2+\alpha(\sigma_0)^2)^{\ell(\ell+2)}}$$

$$\text{分母} = (\ell+1+i\alpha)^{\ell(\ell+2)}(\ell+1-i\alpha)^{\ell(\ell+2)}$$

ℓ を $\ell-1$ に
おきかえる。

$$= \prod_{\alpha}\prod_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i\alpha)^{\ell(\ell+1)}(-\ell-1+i\alpha)^{\ell(\ell+1)}}{(\ell+i\alpha)^{(\ell-1)(\ell+1)}(\ell+1-i\alpha)^{\ell(\ell+2)}}\frac{1}{(i\alpha)}$$

$$= \prod_{\alpha}\prod_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i\alpha)^{\ell+1}}{(\ell+1-i\alpha)^{\ell}}\frac{1}{i\alpha}$$

$$= \prod_{\alpha}\prod_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i\alpha)^{\ell+1}}{(\ell-i\alpha)^{\ell-1}}\frac{1}{(i\alpha)^2}$$

$$= \prod_{\alpha}\prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ell+i\alpha)^{\ell+1}}{(\ell-i\alpha)^{\ell-1}}$$

$\alpha(\sigma_0)$ は正と負が必ず対になって
あらわれる。

$$Z[\sigma_0] = Z[-\sigma_0]$$

$$Z[\sigma_0]\, Z[-\sigma_0] = \prod_{\alpha} \prod_{l=1}^{\infty} \frac{(l^2+\alpha(\sigma_0)^2)^{l+1}}{(l^2+\alpha(\sigma_0)^2)^{l-1}}$$

$$= \prod_{\alpha} \prod_{l=1}^{\infty} (l^2+\alpha(\sigma_0)^2)^2$$

$$= \prod_{\alpha} \prod_{l=1} \left(1 + \frac{\alpha(\sigma_0)^2}{l^2}\right)^2$$

$$= \prod_{\alpha} \left(\frac{\sinh(\pi\alpha(\sigma_0))}{\pi\alpha(\sigma_0)}\right)^2$$

従って、

$$Z_{1\text{-loop}}[\sigma_0] = \prod_{\alpha} \frac{\sinh(\pi\alpha(\sigma_0))}{\pi\alpha(\sigma_0)}$$

$$Z = \int d\sigma_0 \prod_{\alpha} \alpha(\sigma_0)\; e^{-4\pi^2 i \operatorname{Tr}(\sigma_0^2)}$$

$$\times \prod_{\alpha} \frac{\sinh(\pi\alpha(\sigma_0))}{\pi\alpha(\sigma_0)}$$

$$= \int d\sigma_0\; e^{-4\pi^2 i \operatorname{Tr}(\sigma_0^2)} \prod_{\alpha} \sinh(\pi\alpha(\sigma_0))$$

75

matter partも同様に計算することができて、

Vector mult

$$Z = \int da \, e^{-4\pi^2 i \,\mathrm{Tr}(a^2)} \prod_{\alpha} \sinh(\pi\alpha(a))$$

$$\frac{1}{\prod_{\rho\in R_1} \cosh(\pi\rho(a))} \frac{1}{\prod_{\rho\in R_2} \cosh(\pi\rho(a))} \cdots$$

chiral mult in $R_1 \oplus R_1^*$

となる。

7-3 matrix model for ABJM

76

ABJM model の場合、

ゲージ群は $U(N)_1 \times U(N)_2$ である。

それぞれの $U(N)$ に対する a を、

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{\lambda}_N \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\mathrm{Tr}(a^2) = \frac{k}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i^2 - \hat{\lambda}_i^2 \right)$$

$U(N)_1$ の root を α_{ij} $(i \neq j)$

$U(N)_2$ の root を $\hat{\alpha}_{ij}$ $(i \neq j)$ とすれば、

$$\alpha_{ij}(a) = \lambda_i - \lambda_j \quad , \quad \hat{\alpha}_{ij}(a) = \hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j$$

74

bi-fund representation に対しては

$$\rho_{ij} = \lambda_i - \hat{\lambda}_j$$

これらを Z の式に代入すると、

$$Z = \int \left(\prod_i e^{ik\pi(\lambda_i^2 - \hat{\lambda}_i^2)} d\lambda_i d\hat{\lambda}_i \right) \frac{\prod_{i<j} \left[\sinh^2(\pi(\lambda_i - \lambda_j)) \sinh^2(\pi(\hat{\lambda}_i - \hat{\lambda}_j))\right]}{\prod_{i,j} \cosh^2(\pi(\lambda_i - \hat{\lambda}_j))}$$

あとは λ 積分を実行すればよい。

78

7-4 WKB近似

この積分をN→∞極限で求めたい。

→WKB近似を行うことができる。

arXiv:1011.5487

Herzog, Klebanov, & Pufu

もう1度Zの式を書いておく。

($\lambda_i, \tilde{\lambda}_i$を$\frac{\lambda_i}{2\pi}, \frac{\tilde{\lambda}_i}{2\pi}$でおきかえる。)

$$
Z = \frac{1}{(N!)^2} \int \prod_{i=1}^{N} \frac{d\lambda_i d\tilde{\lambda}_i}{(2\pi)^2} \frac{\prod_{i<j} \left(2\sinh\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}\right)^2 \left(2\sinh\frac{\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)^2}{\prod_{i,j}\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)^2}
$$

$$
\times \exp\left(\frac{ik}{4\pi}\sum_i \left(\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2\right)\right)
$$

$Z = e^{-F}$によってFを定義

75

$$F(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) =$$

$$-i\frac{k}{4\pi}\sum_j(\lambda_i^2-\tilde{\lambda}_i^2)$$

$$-\sum_{i<j}\log\left[\left(2\sinh\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}\right)^2\left(2\sinh\frac{\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)^2\right]$$

$$+2\sum_{i,j}\log\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)$$

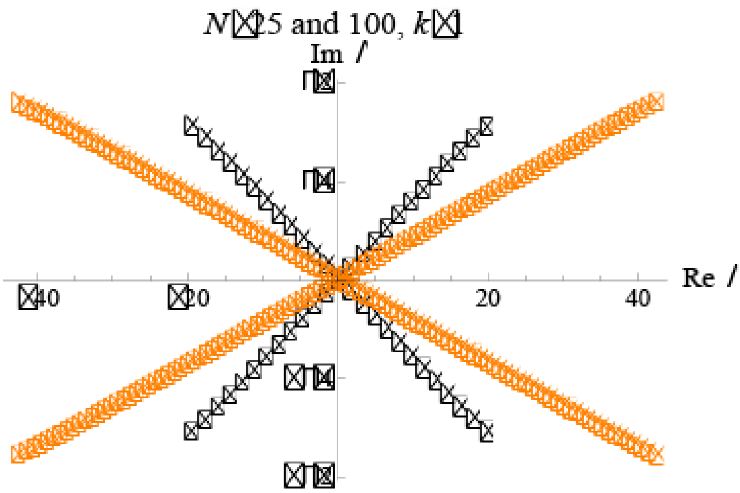
$$+2\log N! + 2N\log(2\pi)$$

これの極値が積分に効く。

$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \frac{ik}{2\pi}\lambda_i - \sum_{j\neq 0}\coth\frac{\lambda_j-\lambda_i}{2} + \sum_j \tanh\frac{\tilde{\lambda}_j-\lambda_i}{2} = 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \tilde{\lambda}_i} = -\frac{ik}{2\pi}\tilde{\lambda}_i - \sum_{j\neq 0}\coth\frac{\tilde{\lambda}_j-\tilde{\lambda}_i}{2} + \sum_j \tanh\frac{\lambda_j-\tilde{\lambda}_i}{2} = 0$$

これを数値的に解いてみると、



次のことがよみとれる。

- λ_i, $\tilde{\lambda}_i$ は real ではない。

  これらは harmitian matrix の固有値ではあるが、saddle point approx. で効く点は一般には複素になる。

- $\lambda_i \leftrightarrow -\lambda_i$,

  $\tilde{\lambda}_i \leftrightarrow -\tilde{\lambda}_i$,

などで不変

81

- $\lambda_i \leftrightarrow \tilde{\lambda}_i^*$ で不変.

よって $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^*$ とおける。

- $N \to \infty$ とすると,

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\,\lambda_i < \frac{\pi}{2}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda_i$ の範囲は N とともにひろがっていく。

以上のことをふまえて,

$$\lambda_j = N^{\alpha} x_j + i y_j$$

$$\tilde{\lambda}_j = N^{\alpha} x_j - i y_j$$

とおいてみよう。

さらに、N が大きいときに、

$$x_j = x\left(\frac{j}{N}\right), \quad y_j = y\left(\frac{j}{N}\right)$$

82

によって $0 \leqq s \leqq 1$ の連続関数

$x(s)$, $y(s)$ を定義しよう。

さらに、固有値密度を

$$\rho(x) = \frac{ds}{dx}$$

によって定義する。

$$\int \rho(x)\,dx = 1,$$

$$\sum = N \int \rho(x)\,dx$$

これらを F に代入する。

$$\sum \left(\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2 \right)$$

$$= \sum \, (N^\alpha x_j + i y_j)^2 - (N^\alpha x_j - i y_j)$$

$$= \sum 2 i N^\alpha x_j y_j$$

$$= 2 i N^{\alpha+1} \int dx\, x\, y(x)$$

83

$$-\sum_{i>j}\log\left[\left(2\sinh\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}\right)^2\left(2\sinh\frac{\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)^2\right]$$

$$+2\sum_{i,j}\log\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\tilde{\lambda}_j}{2}\right)$$

$$=-\sum_{i>j}\log\frac{(1-e^{-\lambda_i+\lambda_j})^2(1-e^{-\tilde{\lambda}_i+\tilde{\lambda}_j})^2}{(1+e^{-\lambda_i+\tilde{\lambda}_j})^2(1+e^{-\tilde{\lambda}_i+\lambda_j})^2}$$

$$+\sum_i\log\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\tilde{\lambda}_i}{2}\right)$$

$$=2\sum_{i>j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[e^{(-\lambda_i+\lambda_j)n}+e^{(-\tilde{\lambda}_i+\tilde{\lambda}_j)n}$$

$$-(-1)^n e^{(-\lambda_i+\tilde{\lambda}_j)n}-(-1)^n e^{(-\tilde{\lambda}_i+\lambda_j)n}\Big]$$

$$+\sum_i\log\left(2\cosh\frac{\lambda_i-\tilde{\lambda}_i}{2}\right)$$

ここで、$\sum_i \to N\int dx\,\rho(x)$ とすると、

84

$$= 2N^2 \iint_{x>x'} \overbrace{dx\,dx'}^{\rho(x)\rho(x')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Big[e^{(-\lambda(x)+\lambda(x'))n} + e^{(-\tilde{\lambda}(x)+\tilde{\lambda}(x'))n}$$

$$- (-1)^n e^{(-\lambda(x)+\tilde{\lambda}(x'))n} - (-1)^n e^{(-\tilde{\lambda}(x)+\lambda(x'))n} \Big]$$

$$+ N \int \underbrace{dx}_{\rho(x)} \log\left(2\cosh\frac{\lambda(x)-\tilde{\lambda}(x)}{2}\right)$$

ここで、x' 積分を見積もるために

$$\int_{-\infty}^{x} \rho(x')\,dx' \; e^{(-\tilde{\lambda}(x)+\lambda(x'))n}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \rho(x')\,dx' \; \frac{1}{n} \frac{d}{d\lambda(x')} e^{(-\tilde{\lambda}(x)+\lambda(x'))n}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \rho(x')\,dx' \; \frac{1}{n} \frac{dx'}{d\lambda(x')} \frac{d}{dx'} e^{(\;)n}$$

$$= \left[\rho(x') \frac{1}{n} \frac{dx'}{d\lambda(x')} e^{(\;)n} \right]_{-\infty}^{x}$$

$$- \int_{-\infty}^{x} dx' \frac{1}{n} e^{(\;)n} \frac{d}{dx'}\left(\rho(x') \frac{dx'}{d\lambda(x')} \right)$$

85

$-(N^\alpha x - iy) + (N^\alpha x + iy)$

N^αがcancel

$$= \frac{1}{n} P(x) \underbrace{\frac{dx}{d\lambda}}_{\frac{1}{N^\alpha}} e^{(-\hat{\lambda}(x) + \lambda(x))n}$$

$$- \int_{-\infty}^{x} dx' \frac{1}{n} e^{(\ )} \frac{d}{dx'}\left(P(x') \underbrace{\frac{dx'}{d\lambda(x')}}_{\frac{1}{N^\alpha}} \right)$$

$e^{-N^\alpha x}$ なので

積分は $N^{-\alpha}$ の因子を出す。

第1項のみきく。

$$= \frac{1}{n} P(x) \frac{1}{N^\alpha} e^{2iny(x)} + O(N^{-2\alpha})$$

他の項も同様にして、

86

$$= 2N^2 \int dx\, \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\rho(x)}{nN^\alpha} + \frac{\rho(x)}{nN^\alpha} - (-1)^n \frac{\rho(x)}{nN^\alpha} e^{2niy} - (-1)^n \frac{\rho(x)}{nN^\alpha} e^{-2niy} \right]$$

$$+ N \int dx\, \rho(x) \log \left(2 \cos y(x) \right)$$

$\alpha < 1$ と仮定すると、

$$= 2N^{2-\alpha} \int dx\, \rho^2(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \times \left(2 - (-1)^n e^{2niy} - (-1)^n e^{-2niy} \right)$$

$$= N^{2-\alpha} \int dx\, \rho^2(x) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \left(1 - (-1)^n \cos 2ny \right)}_{= f(2y)}$$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ で

$$f(2y) = 4 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

となる周期関数

全て合わせると、

$$F = \frac{k}{\pi} N^{1+\alpha} \int dx\, x \rho(x) y(x)$$

$$+ N^{2-\alpha} \int dx\, \rho(x)^2 f(2y(x))$$

$$+ \cdots \quad \text{高次の項}$$

はじめの2項がうまくバランスして極値をとる。

そのためには、

$$N^{1+\alpha} = N^{2-\alpha}$$

である必要がある。

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$F \propto N^{\frac{3}{2}}$$

88

$$F = N^{\frac{3}{2}}\Big[\frac{k}{\pi}\int dx\, x\rho(x)y(x)$$
$$+\int dx\, \rho(x)^2 f(2y(x))$$
$$-\frac{\mu}{2\pi}\Big(\int dx\, \rho(x) - 1\Big)\Big]$$

これを最小にするような

$\rho(x),\ y(x),\ \mu$

を見つけたい。 $f(2y) = \pi^2 - 4y^2$

ρ による変分

$$\frac{k}{\pi}xy + 2\rho(\pi^2 - 4y^2) - \frac{\mu}{2\pi} = 0$$

y による変分

$$\frac{k}{\pi}x\rho - 8\rho^2 y = 0$$

これらより

$$\rho = \frac{\mu}{4\pi^3}, \quad y = \frac{\pi^2 kx}{2\mu}$$

89

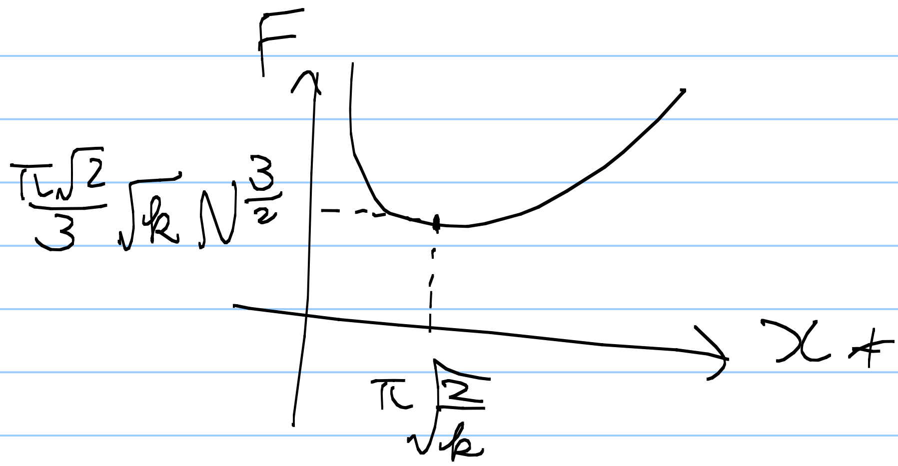
xの範囲を$-x_* \leqq x \leqq +x_*$とすると

$$\int_{-x_*}^{x_*} \rho(x)dx = 1$$

より、 $\mu = \dfrac{2\pi^3}{x_*}$

これらをFに代入すると、

$$F = \frac{12\pi^4 + k^2 x_*^4}{24\pi^2 x_*} N^{\frac{3}{2}}$$



この結果は AdS/CFTで期待されるものと完全に一致