

11次元超重力理論とMブレーン

今村 洋介

平成23年4月15日

概要

これは平成22年度、12月2日から4日にかけて立教大学で行った集中講義「M理論の基礎」の講義ノートです。11次元超重力理論とMブレーンについての解説が中心となっています。時間の制約で弦理論との関係についてはほとんど触れていません。

目次

1	11次元超重力理論	3
1.1	M理論とは	3
1.2	11次元超重力理論	5
1.3	スピノルとディラック行列	6
1.4	外微分形式	10
1.5	一般座標変換	12
1.6	捩率と曲率	13
1.7	不変性の確認	15
2	M-ブレーン	19
2.1	電荷と磁荷	19
2.2	ブレーン	22
2.3	ディラックの量子化条件	25
2.4	ブレーンの微小振動	27
2.5	開いた M2-ブレーン	29
2.6	b_2 の作用	33
2.7	ブレーンの束縛状態	34
2.8	理論の一意性	35
3	超対称性と BPS-bound	36
3.1	超対称代数	36
3.2	BPS bound	38
3.3	BPS 状態における超対称性	41
3.4	束縛状態	43

4	超場形式	45
4.1	超空間	45
4.2	超空間上の演算規則	46
4.3	スピン接続、捩率、曲率	47
4.4	拘束条件	49
4.5	拘束条件を解く	50
4.6	実空間上の運動方程式	54
4.7	平坦な超空間	55
4.8	超対称 M2-ブレーン	57
5	重なった M2-ブレーン	61
5.1	ブレーン上の理論	61
5.2	ブラック M2-ブレーン	63
5.3	AdS/CFT	66
5.4	熱力学的性質	67
5.5	自由場との比較	70
5.6	S^3 分配関数	72
5.7	ABJM モデル	74
5.8	モジュライ空間	77
6	厳密な分配関数	79
6.1	局所化を用いた分配関数の計算	79
6.2	共形平坦な背景上での超対称性	80
6.3	S^3 分配関数の計算 (ベクトル多重項)	84
6.4	S^3 分配関数の計算 (カイラル多重項)	87
6.5	ABJM 行列模型	90
6.6	おわりに	94
A	A_6 の超対称変換	95
B	ビアンキ恒等式を解く	97
B.1	$I_{mab}{}^p = 0$ を解く	97
B.2	$I_{abc}{}^d = 0$ を解く	98
B.3	$I_{mab}{}^c = 0$ を解く	99
B.4	$I_{mna}{}^b = 0$ を解く	100
C	κ 対称性の確認	100
D	Extremal M2-ブレーン解	102
E	3次元のスピンル	104

F	対称空間上の調和関数	106
F.1	局所座標	106
F.2	調和関数	109
F.3	共変微分	111
F.4	アイソメトリー	115

1 11次元超重力理論

1.1 M理論とは

統一理論を作る方法のひとつとして最も古くから知られているのは、高次元の時空を用いるものである [1, 2]。例えば、5次元時空の重力理論を考えよう。この理論は重力を表す計量場

$$g_{MN} \quad M, N = 0, 1, 2, 3, 5 \quad (1)$$

を用いて記述される。(4を飛ばしたのには深い意味はない。 D 次元時空において最後の1つの座標が特別な意味を持つ場合には、このように D 次元時空の最後の D 番目の座標ということを強調するために $D-1$ のかわりに D を用いることがある。)計量の符号は $(-, +, \dots, +)$ をとる。またこのノートでは光速について $c=1$ の単位系を用いるが、プランク定数については \hbar あるいは $h=2\pi\hbar$ を1と置くことはせず、顕に書くことにする。我々がみている4次元時空を表すためには、5次元時空のうちのひとつの方向が小さく丸まっているとすれば良い。すなわち x^5 座標に対して

$$x^5 \sim x^5 + 1 \quad (2)$$

という同一視を行う。このような操作、すなわち、時空の余分な次元を小さな空間に丸め

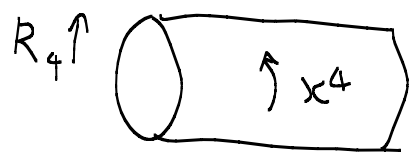


図 1: S^1 コンパクト化

て見えなくしてしまうことをコンパクト化と呼ぶ。また、コンパクト化を用いて構成される理論のことをしばしば Kaluza-Klein 理論と呼ぶ。

x^5 方向をコンパクト化したことにより、コンパクト化の半径 ($\sqrt{g_{55}}$ 程度) よりも十分大きな長さのスケールでは時空は4次元であるように見える。しかし、時空がもともと5次元であったということから、4次元では重力場 $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) (スピン 2) のほかにベクトル場 $A_\mu = g_{\mu 5}$ (スピン 1) やスカラー場 g_{55} (スピン 0) が現れる。このように、高次元の理論を用いた Kaluza-Klein 理論は異なるスピンの場を統一的に扱うのに有用である。

このことは、次のように考えることもできる。高次元時空を扱うということは、ローレンツ対称性の群 $SO(1, 3)$ をより大きな群 $SO(1, D - 1)$ に拡張することを意味している。

$$SO(1, 3) \subset SO(1, D - 1). \quad (3)$$

高次元では場は $SO(1, D - 1)$ の表現として分類される。これをコンパクト化によって 4 次元へ落とすと、 $SO(1, D - 1)$ のそれぞれの規約表現は、 $SO(1, 3)$ の (一般には複数個の) 規約表現に分解される。すなわち、高次元の時空を考えるということはローレンツ対称性を拡大することによって複数個の場を统一的に表す方法であるとみなすこともできる。(これは標準模型に存在するゲージ対称性 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ を $SU(5)$ などの群に拡張して場を統一しようとする大統一理論の考え方に似ている。)

現実世界にはさまざまな粒子が存在しているが、それらがひとつの表現として表される理論があれば、それは理想的な統一理論になる。しかし、単に高次元の時空を考えるだけではこれは不可能である。なぜなら、この世界に存在する粒子にはボゾン (整数スピン) とフェルミオン (半整数スピン) が存在し、これらは決して $SO(1, D - 1)$ のひとつの表現にはまとまらないからである。

ボゾンとフェルミオンを統一するには、それらを結びつける新たな対称性を導入する必要がある。このような対称性は超対称性と呼ばれる。超対称性が異なるスピン、統計性の場を結びつけるということから、その変換パラメータはフェルミオンの統計性を持つグラスマン数であり、しかもスピノルでなければならない。

ここまでに、場を統一する方法として高次元の時空を用いる方法と、超対称性を導入する方法を述べた。これら二つを組み合わせ、できるだけ多くのものを统一的に記述しようとすることは自然な試みである。そのためには

- できるだけ時空の次元が高く
- 超対称性を持つ

理論を用いるのが良いように思われる。超対称性を持つという条件を課さなければ、いくらでも高い次元の理論を考えることが可能である。しかし、超対称性を課すとそれは理論の形を強く制限し、最高で 11 次元の理論までしか存在しないことが知られている。超対称性を持つ 11 次元の理論は重力を含むため 11 次元超重力理論 [3] と呼ばれる。

いくらでも次元の高い超対称理論が存在しない大まかな理由は以下の通りである。まず、高次元時空を考える上で、中心的な役割を果たす場は重力場である。重力場が存在するおかげで、空間を小さく丸めて不要な次元を見えなくすることが可能になる。そして超対称性を仮定すると、重力場のほかにフェルミオン場を含む必要がある。理論が超対称性を持つためには、重力場を含むボゾン場とその超対称パートナーであるフェルミオン場の自由度の個数が等しくなければならない。重力場は計量テンソルで表されるから、その自由度の個数は大まかにいて次元の二乗に比例する。一方フェルミオン場はスピノルとして表される。一般の次元におけるスピノル場の成分数は $2^{[D/2]}$ ($[\dots]$ はガウスの記号である。) であることが知られており、次元が増えると指数関数的に増加する。(ここで与えた成分数はディラックスピノルの成分数である。ワイルフェルミオンやマヨラナフェルミオンでは

成分数は変化するが、ここでの議論ではそのような詳細は無視している。また、フェルミオン場はスピノルであると同時にベクトル添え字を持つこともあるが、その場合でも成分数が指数関数的に増加することには変わりはない。) 従って、ボゾン場とフェルミオン場の自由度の個数を比較すると、次元が高くなるとどうしてもフェルミオン場の自由個数が上回ってしまい、超対称な理論を構成することができなくなる。(フェルミオンの自由度の個数がどんなに大きくなっても、ボゾン場、例えばスカラー場を必要な数だけ導入すれば、ボゾンとフェルミオンの自由度の個数を一致させることは可能であり、上の説明ではそのような方法で超対称性を持つ高次元の理論を構成できる可能性は除外できないが、実際にやってみるとうまくいかない。)

以上のことから、11次元の超重力理論を統一理論の候補として調べることは自然なことであり、実際これまでに多くの仕事が行われてきた。しかし、この理論を含め、重力を含む理論には、量子論的にうまく定義できるのかが良くわからない、すなわち、(少なくとも次元勘定の意味で) 繰り込み可能ではないという問題点が存在する。このような問題点を解決する方法として有望視されているのが超弦理論である。超弦理論は10次元時空で定義された理論であり、背景時空上を振動しながら伝播する弦を基本的な自由度として含む。この弦のさまざまな振動モードとして重力を含むさまざまな場が現れる。

超弦理論と11次元超重力理論の間には何らかの関係があるのだろうか。これについては1994年にWittenが以下のような提案を行った[4]。

- M理論と呼ばれる11次元の理論が存在する。
- 低エネルギーではM理論の有効理論として11次元超重力理論が実現される。
- M理論は10次元への S^1 コンパクト化によって超弦理論を与える。(超弦理論にはいくつかの種類があるが、 S^1 コンパクト化を通してM理論と関係するのはそのうちIIA型超弦理論と呼ばれるものである。)

M理論を用いると、超弦理論に含まれるさまざまなオブジェクトをより少ない種類の自由度で表すことができる。また、複数ある超弦理論の間での関係を理解するためにもM理論は有用である。そのような意味で、M理論は超弦理論の統一理論ともいえるべきものである。

弦理論においては、弦の振動モードを量子化することで重力(すなわちスピンが2の零質量粒子)が現れるということを簡単に確かめることができるので、M理論においても同様に膜の振動モードを量子化することで11次元時空上の重力が得られるのではないかと期待されるが、残念ながらこれはまだ成功していない。従って、M理論の解析は低エネルギー有効理論である超重力理論を用いて行われることが多い。そこで、次の節から11次元の超重力理論について詳しく見ていこう。

1.2 11次元超重力理論

いろいろと準備すべきことはあるが、とりあえず作用と超対称変換を与えておこう。11次元超重力理論[3]は重力場 e_μ^m 、3階反对称テンソル場 $A_{\mu\nu\rho}$ そしてベクトル添え字を持つ

スピノル場であるグラビティーノ ψ_μ を含み、次の作用によって与えられる。

$$S = \frac{h}{l_p^9} \int d^{11}x e \left[R - \frac{1}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma} - 4(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho) + (\psi_\mu \gamma^{[\mu} K_4 \gamma^{\nu]} \psi_\nu) \right] - \frac{h}{3!l_p^9} \int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 + \mathcal{O}(\psi_\mu^4). \quad (4)$$

l_p は長さの次元を持つ定数で、プランク長と呼ばれる。11次元超重力理論、あるいはM理論の全ての長さのスケールはこのプランク長を基準として表される。 K_4 は A_3 の場の強さであり $K_4 = dA_3$ と与えられる。この作用は次の局所的超対称変換のもとで不変である。

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= D_\mu \xi + \frac{1}{24} \gamma_\mu K_4 \xi - \frac{1}{8} K_4 \gamma_\mu \xi + \mathcal{O}(\psi_\mu^2 \xi), \\ \delta e_\mu^m &= 2(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\ \delta A_{\mu\nu\rho} &= 2[(\xi \gamma_{\mu\nu} \psi_\rho) + (\xi \gamma_{\nu\rho} \psi_\mu) + (\xi \gamma_{\rho\mu} \psi_\nu)]. \end{aligned} \quad (5)$$

作用については ψ_μ の4次の項を無視した。変換則についても、 $\delta\psi_\mu$ において $\psi\psi\xi$ を含む項を無視した。

このノートでは $c = 1$ の単位系を用いる。プランク定数については1 (あるいはそのほかの値) に置くことはしない。作用 S の次元はプランク定数と同じ $[ML]$ である。($c = 1$ の単位系を用いているから $[L] = [T]$ である。) 作用 (4) に現れる場の次元は次のように与えられる。

$$g_{\mu\nu} : [1], \quad R : [L^{-2}], \quad \psi_\mu : [L^{-1/2}], \quad K_{\mu\nu\rho\sigma} : [L^{-1}], \quad A_{\mu\nu\rho} : [1], \quad \xi : [L^{1/2}]. \quad (6)$$

ただし、大域添え字を持つ場については、座標の取り方によって次元が異なる (例えば極座標 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ においては g_{rr} は無次元であるが $g_{\theta\theta}$ は $[L^2]$ の次元を持つ) が、上で述べた次元は座標変数が長さの次元を持ち、計量は無次元であると仮定した場合のものである。ここで用いた場の規格化は、係数 h/l_p^9 が全体の因子として作用に含まれており、運動方程式や超対称変換則が l_p や h を含まないように選んだ。

この章の目的は、必要な表記法などについて説明した後、(4) の作用が超対称変換 (5) のもとで不変であることを確認することである。ただしその計算の際にはここで省略したフェルミオンの高次の項については無視する近似を用いる。

1.3 スピノルとディラック行列

超対称性を持つ理論を調べるためにはディラック行列やスピノルを用いた計算を多用するため、まずはそれらについての約束事や基本的公式をまとめておこう。

計量の符号は時間方向が負であり空間方向が正になるように取る。すなわち、ローレンツ計量は次のように与えられるとする。

$$\eta_{mn} = \text{diag}(-, +^{10}). \quad (7)$$

ここで添え字の m と n は局所ローレンツ系のものである。大域座標の添え字には μ, ν, \dots を用いることにする。それらをつなぐ多脚場 e_μ^m は計量との間に次の関係を満たすものとして導入する。

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn}. \quad (8)$$

次の記号も導入しておく。

$$g = \det g_{\mu\nu}, \quad e = |\det e_\mu^m|. \quad (9)$$

11 次元のスピンルは $2^5 = 32$ 個の成分を持つ。ディラック行列は

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn} \quad (10)$$

を満足する 32×32 行列である。多脚場 e_μ^m を用いて添え字を大域座標のものに直した

$$\gamma_\mu = e_\mu^m \gamma_m \quad (11)$$

なども用いられる。スピノルの添え字としては a, b, c, \dots を用いる。ディラック行列やスピノルの積においてしばしばスピノル添え字は省略されるがそれらのスピノル添え字を明示する場合のスピノル添え字の上下は以下のように約束しておく。

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \psi \rightarrow (\gamma_\mu)_a{}^b (\gamma_\nu)_b{}^c \psi_c \quad (12)$$

荷電共役行列 C は次の式を満足する行列として定義する。

$$C^T = -C, \quad (C\gamma^\mu)^T = +(C\gamma^\mu) \quad (13)$$

これらの条件では C の定数因子は決めることはできないが、ここでは C の行列式の絶対値が 1 であることを仮定しておき、位相因子は特に定めないことにする。(13) における C のスピノル添え字はどちらも上付きの添え字である。(ディラック行列のように $C_a{}^b$ のような添え字を持っているとすると $C^T = -C$ などの式が意味を成さないことに注意。) 従って (13) をスピノル添え字をあらわにして書き直すと次のようになる。

$$C^{ab} = -C^{ba}, \quad C^{ac}(\gamma^\mu)_c{}^b = C^{bc}(\gamma^\mu)_c{}^a \quad (14)$$

スピノル添え字の上げ下げに荷電共役行列を用いる。具体的には、

$$\psi^a = C^{ab} \psi_b \quad (15)$$

およびこれから派生するルールに則って行う。例えば、上付き添え字を下げる場合には (15) の逆変換を用いて

$$\psi_a = (C^{-1})_{ab} \psi^b \quad (16)$$

とする。荷電共役行列自身についてもこのルールに従って添え字を上げ下げできる。例えば

$$C_a{}^b = (C^{-1})_{ac} C^{cb} = \delta_a^b. \quad (17)$$

すなわち、荷電共役行列は本質的に 1 である。両方の添え字を下げたものは

$$C_{ab} = (C^{-1})_{bc} C_a^c = (C^{-1})_{bc} \quad (18)$$

これを用いると、添え字を下げる規則を

$$\psi_a = \psi^b C_{ba} \quad (19)$$

と表すことができる。添え字の上げ下げには常に C を使い、左上と右下の添え字を縮約すると覚えておけばよい。行列を用いた表記では省略されたスピノル添え字は常にこれと同じ位置、すなわち左上と右下で縮約されるようになっている。(例えば (12) を見よ。) 縮約の向きが逆であるものは符号が異なることに注意すること。

$$\eta\chi = \eta^a \chi_a = -\eta_a \chi^a. \quad (20)$$

11 次元時空ではマヨラナスピノルを定義することができる。ここではマヨラナスピノルを次のように定義する。

$$\bar{\psi}^a = \psi^a \quad (21)$$

ただし、 $\bar{\psi}$ は ψ のディラック共役である。これは下つき添え字のスピノル ψ_a から $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ によって定義され、この $\bar{\psi}$ は上付きのスピノル添え字を持つ。右辺の ψ^a は ψ_a の添え字を上で述べたルールに従って上げたものである。成分がグラスマン数であるマヨラナスピノル η と χ の積 ($\eta\chi$) が実になるかどうかは、以下のことに依存している。

- $\bar{\psi} \propto \psi^\dagger \gamma^0$ の定数因子
- 荷電共役行列 C の位相因子
- グラスマン数の積の複素共役を $(ab)^* = a^* b^*$ によって定義するか、それとも $(ab)^* = b^* a^*$ によって定義するか。

ここでは、これらそれぞれについて特に決めることはせず、マヨラナスピノルの積が実になることだけを要求しておく。このとき、間にディラック行列を任意個挟んだ

$$(\eta\gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_n} \chi) \quad (22)$$

も実になることが示される。

(13) を用いると、グラスマン数を成分とするスピノルの積において、その順序を入れ替えた場合に成り立つ式 (転置公式) を導くことができる。例えば η と χ をスピノルとして

$$(\eta\chi) = \eta^a \chi_a = C^{ab} \eta_b \chi_a = C^{ba} \chi_a \eta_b = \chi^b \eta_b = (\chi\eta) \quad (23)$$

同様にして次の転置公式を示すことができる。

$$(\eta\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_k} \chi) = (-)^k (\chi\gamma^{\mu_k} \gamma^{\mu_{k-1}} \cdots \gamma^{\mu_1} \eta) \quad (24)$$

つまり、ディラック行列は形式的にあたかも反対称行列であるかのように振舞う。
ディラック行列の反対称積を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu\nu} &= \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \\ \gamma^{\mu\nu\rho} &= \gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]} = \frac{1}{6}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu + \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu)\end{aligned}\quad (25)$$

さらに添え字の数が多いものも同様である。添え字が 11 個のものについては次の関係式が成り立つ。

$$\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{11}} = \mathbf{1}_{32} E^{\mu_1\cdots\mu_{11}}. \quad (26)$$

$\mathbf{1}_{32}$ は 32×32 の単位行列であり、 $E^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$ は実完全反対称テンソルである。テンソル密度 $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$ との関係は次のように与えられる。

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}} = e E^{\mu_1\cdots\mu_{11}}. \quad (27)$$

$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$ は 0 でない成分が ± 1 であり、計量に依存しない。どの成分が $+1$ でどの成分が -1 になるかは特に定めず、ディラック行列から上に与えた関係式を用いて $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_{11}}$ は定義されるものとする。

n 階反対称テンソル $A_{\mu_1\cdots\mu_n}$ に対して

$$A_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1\cdots\mu_n} \gamma^{\mu_1\cdots\mu_n} \quad (28)$$

を定義する。

n 個のディラック行列の積はディラック行列の反対称積を用いて分解することができ、 n 階、 $n-2$ 階、 \cdots の反対称積が現れる。二つ、および 3 つのディラック行列の積は

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^\nu &= \gamma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}, \\ \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho &= \gamma^{\mu\nu\rho} + \gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (29)$$

である。このような計算を行う際にはフェルミオンに対する Wick の定理をそのまま用いることができる。その際、プロパゲータおよび正規順序積はそれぞれ計量 $g^{\mu\nu}$ と反対称積に対応する。

例えば、 $\gamma^{\mu\nu}$ と γ^ρ の積を計算する場合には、 γ^μ をフェルミオンであるとみなし、 $\gamma^{\mu\nu}$ を正規順序積 $:\gamma^\mu\gamma^\nu:$ に置き換える。ウィックの定理を用いると

$$:\gamma^\mu\gamma^\nu:\gamma^\rho =: \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho: + \gamma^\mu\langle\gamma^\nu\gamma^\rho\rangle - \gamma^\nu\langle\gamma^\mu\gamma^\rho\rangle \quad (30)$$

最後の項の負号は二つの“フェルミオン” γ^μ と γ^ν の置き換えから現れる。ここで正規順序をディラック行列の反対称積で、プロパゲータを計量で置き換えれば次の式が得られる。

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^\rho = \gamma^{\mu\nu\rho} + \gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} \quad (31)$$

このようなディラック行列の反対称積による展開の中から特定の階数の項だけを取り出したいことがしばしばある。そのような場合には記号 $\langle \cdots \rangle_n$ を用いる。例えば

$$\begin{aligned}\langle \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho \rangle_3 &= \gamma^{\mu\nu\rho}, \\ \langle \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho \rangle_1 &= \gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}.\end{aligned}\quad (32)$$

また、複数の階数の項を取り出したい場合には、取り出したい階数を表す添え字を全てつけることにする。例えば

$$\langle \cdots \rangle_{5,1} = \langle \cdots \rangle_5 + \langle \cdots \rangle_1 \quad (33)$$

である。

1.4 外微分形式

11 次元超重力理論に限らず、超重力理論には反対称テンソル場が現れることがしばしばある。そこでこれらを表記するのに便利な外微分形式を導入する。

n 階反対称テンソル $A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ に対して n -フォーム A_n を次のように定義する。

$$A_n = \frac{1}{n!} A_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (34)$$

dx^μ は基底であり、 \wedge はウェッジ積である。 \wedge は反対称な積であり、

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (35)$$

が成り立つ。 A_n に対して反対称テンソル $A_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ のことをその成分と呼ぶ。他の添え字と紛らわしい場合には A_n の代わりに $A_{[n]}$ のような表記も用いる。また、 n -フォームであることが明らかな場合には n を省略して単に A のように表すこともある。

テンソル添え字の一部分のみをフォームとして扱う場合もある。

$$A_{\mu[2]} = \frac{1}{2} A_{\mu\nu\rho} dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (36)$$

しばしば γ -行列についても同様の扱いをする。

$$\psi \gamma_{[3]} \xi = \frac{1}{3!} (\psi \gamma_{\mu\nu\rho} \xi) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (37)$$

$u_1 = u_\mu dx^\mu$ 、 $v_1 = v_\mu dx^\mu$ のとき、2-フォーム

$$u_1 \wedge v_1 = u_\mu v_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (38)$$

の成分は

$$u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu \quad (39)$$

であり、添え字が自動的に反対称化される。

外微分演算子 d を次のように定義する。

$$d = dx^\mu \partial_\mu \quad (40)$$

これを用いると、1-フォーム場 $A_1 = A_\mu dx^\mu$ から 2-フォーム場

$$F_2 = d \wedge A_1 \quad (41)$$

を定義できる。この成分は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (42)$$

であり、 $U(1)$ ゲージ場のポテンシャル A_μ と場の強さ $F_{\mu\nu}$ の関係を与えている。

外微分形式を用いていることが明らかである場合にはしばしばウェッジ積の記号を省略して $F_2 = dA_1$ のように書くこともある。

m -形式 A_m と n -形式 B_n のウェッジ積に対して次の式が成り立つ。

$$A_m \wedge B_n = (-)^{mn} B_n \wedge A_m \quad (43)$$

これより、二つの同じ奇数フォームの積は 0 である。特に、外微分演算子を二回作用させると 0 になる。

$$d \wedge d = 0. \quad (44)$$

A_μ を $U(1)$ ゲージポテンシャルとしたとき、そのゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$ は

$$\delta A_1 = d\lambda \quad (45)$$

と表すことができる。(44) を用いれば直ちに場の強さがゲージ不変であることが示される。

$$\delta F_2 = d\delta A_1 = d^2 \lambda = 0. \quad (46)$$

ある n 次元空間上での n -フォームの積分は

$$\begin{aligned} \int A_n &= \int d^n x \frac{e}{n!} E^{\mu_1 \dots \mu_n} A_{\mu_1 \dots \mu_n} \\ &= \int d^n x \frac{1}{n!} e^{\mu_1 \dots \mu_n} A_{\mu_1 \dots \mu_n} \end{aligned} \quad (47)$$

によって定義される。二行目の形から、この積分が計量に依存しないことは明らかである。

D 次元空間上の n -フォーム場 A_n のホッジ双対 $*A_n$ は次の $D - n$ 階反対称テンソルを成分とするフォームである。(ただし D は時空の次元であり、ここでは $D = 11$ 。)

$$(*A_n)_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}} = \frac{1}{n!} E_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}}{}^{\nu_1 \dots \nu_n} A_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (48)$$

以上を踏まえて、11 次元超重力理論 (4) の作用をもう一度見てみよう。その中に 4 階反対称テンソル $K_{\mu\nu\rho\sigma}$ が現れているが、これは 3 階反対称テンソル場 $A_{\mu\nu\rho}$ の場の強さであり、外微分形式を用いればその定義を次のように与えることができる、

$$K_4 = dA_3 \quad (49)$$

この関係を成分を用いて表すと

$$K_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu A_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho A_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma A_{\mu\nu\rho} \quad (50)$$

となり、書くのがやや面倒くさい。作用 (4) の最後の項は、成分を用いて表すと、次のようになる。

$$-\frac{\hbar}{3!l_p^9} \int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 = -\frac{\hbar}{3!3!4!4!l_p^9} \int d^{11}x \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{11}} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} K_{\mu_4 \dots \mu_7} K_{\mu_8 \dots \mu_{11}} \quad (51)$$

今度も添え字がたくさん現れ、外微分形式を用いて書いたものよりも面倒になる。

1.5 一般座標変換

ある点の座標 x^μ を x'^μ に取り直す座標変換において、スカラー場は次のように変換される。

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu) \quad (52)$$

無限小変換

$$x^\mu = x'^\mu + \epsilon^\mu \quad (53)$$

に対しては

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x'^\mu + \epsilon^\mu) = \phi(x'^\mu) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi \quad (54)$$

と与えられる。従って変化分を δ_{gc} によって表すと、

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon)\phi = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi \quad (55)$$

となる。

1-フォーム $A_1 = A_\mu dx^\mu$ に対しては

$$\begin{aligned} A'_\mu(x') dx'^\mu &= A_\mu(x) dx^\mu \\ &= A_\mu(x' + \epsilon) d(x'^\mu + \epsilon^\mu) \\ &= (A_\mu(x') + \epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu)(dx'^\mu + dx^\kappa \partial_\kappa \epsilon^\mu) \\ &= A_\mu(x') dx'^\mu + \epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu dx^\mu + A_\mu dx^\kappa \partial_\kappa \epsilon^\mu \end{aligned} \quad (56)$$

従って変化分は

$$\delta_{\text{gc}}^0 A_\mu = \epsilon^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \epsilon^\nu = \epsilon^\nu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + \partial_\mu (\epsilon^\nu A_\nu) \quad (57)$$

と表すことができる。ここで、 δ_{gc} ではなく δ_{gc}^0 という記号を用いた理由はすぐに明らかになる。この右辺の第1項は A_μ を場の強さの形で含んでおり、ゲージ不変である。一方第2項はゲージ不変ではないがゲージ変換の形をしている。そこで、 δ_{gc} を次のように定義するのが便利である。

$$\delta_{\text{gc}} = \delta_{\text{gc}}^0 - \delta_{\text{gauge}}(\epsilon^\nu A_\nu) \quad (58)$$

ただし、 $\delta_{\text{gauge}}(\lambda)$ は λ をパラメータとするゲージ変換

$$\delta_{\text{gauge}}(\lambda)A_\mu = \partial_\mu \lambda \quad (59)$$

を表す。これは、座標変換によって点がずれたことに伴う平行移動が引き起こすゲージ変換であると解釈することができる。この、新たな一般座標変換 δ_{gc} のもとではゲージ場 A_μ の変換は次のようにゲージ不変になる。

$$\delta_{\text{gc}}A_\mu = \epsilon^\nu F_{\nu\mu}. \quad (60)$$

1.6 捩率と曲率

局所座標のベクトル v^m に対する共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu v^m = \partial_\mu v^m + \omega_\mu{}^m{}_n v^n. \quad (61)$$

ただし $\omega_\mu{}^m{}_n$ はスピン接続である。これらは 1-フォーム $D = dx^\mu D_\mu$ や $\omega^m{}_n = dx^\mu \omega_\mu{}^m{}_n$ の関係式として

$$Dv^m = dv^m + \omega^m{}_n v^n \quad (62)$$

のようにも書く。さらに $\omega^m{}_n$ を行列として単に ω と表せば、

$$Dv^m = dv^m + (\omega v)^m \quad (63)$$

あるいは単に

$$D = d + \omega \quad (64)$$

と表すこともできる。

スピノルに対する共変微分は

$$D_\mu \psi_a = \partial_\mu \psi_a + \frac{1}{4} \omega_{\mu mn} (\gamma^{mn})_a{}^b \psi_b \quad (65)$$

と定義される。 D_μ によって表される共変微分は大域座標の添え字に対する接続を含まないことを強調しておこう。つまり、

$$D_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu \quad (66)$$

である。これは、 ∇_μ によって表される完全な共変微分

$$\nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda \quad (67)$$

とは異なり、一般座標変換のもとではテンソルとして振舞わない。しかしながら、二つの添え字について反対称化を行った

$$D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu \quad (68)$$

はテンソルになっていることを確かめることができる。実は、超重力理論において現れる微分の添え字に対しては常にこのような反対称化がなされるため、 D_μ が大域添え字に対する接続を含まなくても D_μ を用いて書かれた式は共変になっている。

例えば (4) の中のフェルミオン ψ_μ の運動項を見てみよう。

$$-\frac{4h}{l_p^9}(\psi_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\psi_\rho) \quad (69)$$

共変微分 D_ν が作用する場 ψ_ρ はスピノル添え字のほかに大域添え字を持っているが、 D_ν はスピノル添え字についての接続のみを含み、次のように定義される。

$$D_\nu\psi_\rho = \partial_\nu\psi_\rho + \frac{1}{4}\omega_{\nu mn}\gamma^{mn}\psi_\rho. \quad (70)$$

この共変微分自身は一般座標変換のもとで共変ではないが、(69) の中では添え字の反対称化がなされているので、この作用は座標変換の元で共変（不変）である。

多脚場を 1-フォームとして $e^m = dx^\mu e_\mu^m$ のように表そう。これを用いて換率を次のように定義する。

$$T^m = De^m \quad (71)$$

これは 2-フォームであり成分を用いて表せば

$$T_{\mu\nu}^m = D_\mu e_\nu^m - D_\nu e_\mu^m \quad (72)$$

となる。

多脚場仮説と呼ばれる関係式

$$\nabla_\mu e_\nu^m = D_\mu e_\nu^m - \Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^m = 0 \quad (73)$$

を用いると、換率はアフィン接続と次のように関係することがわかる。

$$T_{\mu\nu}^m = D_\mu e_\nu^m - D_\nu e_\mu^m = (\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho)e_\rho^m \quad (74)$$

リーマン時空では $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ の下つき添え字二つはその入れ替えに対して対称であることが仮定される。しかし超重力理論においてはそうはならないことが知られている。そのような、換率が 0 でないような時空はリーマン・カルタン時空と呼ばれる。11 次元超重力理論においては換率は次のようにフェルミオンの二次形式として与えられる。

$$T_{\mu\nu}^m = 2(\psi_\mu\gamma^m\psi_\nu) \quad (75)$$

以下ではしばらくフェルミオンの高次の項を無視した計算を行うが、そのような場合には $T_{\mu\nu}^m = 0$ であると思っておいても差し支えない。

曲率は、共変微分 D_μ の交換関係として

$$[D_\mu, D_\nu] = R_{\mu\nu} \quad (76)$$

によって定義することができる。ただしこの式の右辺の $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソルではなく、曲率テンソル $R_{\mu\nu}{}^m{}_n$ の後ろ二つの添え字を省略して行列として表したものである。これは外微分形式を用いると

$$R = D^2 \quad (77)$$

と書くこともできる。この定義から次の式を得ることができる。

$$R = d\omega + \omega^2 \quad (78)$$

あるいは、成分で書いておくと、

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu] \quad (79)$$

さらに行列の添え字まであらわに書けば

$$R_{\mu\nu}{}^m{}_n = \partial_\mu \omega_\nu{}^m{}_n - \partial_\nu \omega_\mu{}^m{}_n + \omega_\mu{}^m{}_k \omega_\nu{}^k{}_n - \omega_\nu{}^m{}_k \omega_\mu{}^k{}_n \quad (80)$$

となる。

リーマン・カルタン時空についてのより詳しい解説は超重力理論の教科書 [33] にあるので、興味のある方は参照していただきたい。

1.7 不変性の確認

準備が整ったので、作用 (4) が超対称変換 (5) の元で不変であることを確認しておこう。ただし、複雑な計算を避けるためにフェルミオン ψ_μ について 2 次の項までを考慮し、それよりも高次の項については無視する近似を行う。全体の係数として現れる h/l_p^9 は以下の計算では無視することにする。

まず、ラグランジアン密度を以下のように分割しておく。(積分記号 $\int dx^{11}$ は場所をとるので以下では作用をラグランジアン密度の形で与えるが、実際に確認したいのは作用の不変性であるから、部分積分などは自由に行うものとする。)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &= eR, \\ \mathcal{L}_\psi &= -4e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho), \\ \mathcal{L}_K &= -\frac{e}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \mathcal{L}_{CS} &= -\frac{e}{3!4!4!3!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{11}} A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} K_{\mu_4 \dots \mu_7} K_{\mu_8 \dots \mu_{11}}, \\ \mathcal{L}_Y &= e\psi_\mu \gamma^{[\mu} K_4 \gamma^{\nu]} \psi_\nu = e(\psi_\mu \langle \gamma^\mu K_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} \psi_\nu). \end{aligned} \quad (81)$$

最後の 3 点結合項はディラック行列の反対称積の階数による分解を用いて書き換えた。変換則も次のように分割しておく。

$$\begin{aligned} \delta_{\psi 1} \psi_\mu &= D_\mu \xi, \\ \delta_{\psi 2} \psi_\mu &= \frac{1}{24} \gamma_\mu K_4 \xi - \frac{1}{8} K_4 \gamma_\mu \xi, \\ \delta_e e_\mu^m &= 2(\xi \gamma^m \psi_\mu), \\ \delta_A A_{\mu\nu\rho} &= 2[(\xi \gamma_{\mu\nu} \psi_\rho) + (\xi \gamma_{\nu\rho} \psi_\mu) + (\xi \gamma_{\rho\mu} \psi_\nu)] \end{aligned} \quad (82)$$

作用の不変性を示すためにチェックすべきなのは、 K_4 を含まない項の相殺、

$$\delta_e \mathcal{L}_E + \delta_{\psi 1} \mathcal{L}_\psi = 0. \quad (83)$$

K_4 をひとつ含む項の相殺

$$\delta_A \mathcal{L}_K + \delta_A \mathcal{L}_Y + \delta_{\psi 2} \mathcal{L}_\psi = 0 \quad (84)$$

そして K_4 について 2 次の項の相殺

$$\delta_e \mathcal{L}_K + \delta_{\psi 1} \mathcal{L}_Y + \delta_A \mathcal{L}_{CS} = 0 \quad (85)$$

である。

まずは K_4 を含まない項の相殺 (83) の確認から始めよう。 $\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_\psi$ を計算する際、 \mathcal{L}_ψ に含まれる二つの ψ_μ それぞれの変換を考える必要があるが、そのどちらを変換しても部分積分を行えば同じものになるので、片方を変換して二倍しておけばよい。

$$\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_\psi = -8e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu D_\rho \xi) = -4e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} [D_\nu, D_\rho] \xi). \quad (86)$$

ただし、もし ψ^4 まで含めて計算を行う場合には部分積分を行うと換率に比例する項が余分に現れることに注意する必要がある¹が、ここでは ψ^4 項を無視しているので、気にする必要はない。共変微分の交換関係に対して次の式が成り立つ。

$$[D_\nu, D_\rho] \xi = \frac{1}{4} R_{\nu\rho mn} \gamma^{mn} \xi \quad (87)$$

フェルミオンの高次の項を含める場合には換率を考慮する必要があるがここでは無視した。これを用いれば、

$$\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_\psi = -e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \xi) R_{\nu\rho mn} \quad (88)$$

が得られる。ここで、ディラック行列の積を

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} = \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_5 + \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_3 + \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_1 \quad (89)$$

のように 3 つの部分に分解してそれぞれの部分がどのような寄与を与えるかを見てみよう。まず第 1 項は

$$-e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho mn} \xi) R_{\nu\rho mn} \quad (90)$$

であるが、曲率テンソルが満足するビアンキ恒等式 $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ を用いることでこれが 0 であることがわかる。第 2 項の $\langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_3$ について考えてみると、3 階のディラック行列の反対称積を $\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn}$ から取り出すには、ウィックの定理を用いる際にひとつだけプロパゲータを用いる必要がある。すなわち、 $\gamma^{\mu\nu\rho}$ からひとつ、 γ^{mn} から添え字をひとつとって計量で置き換え、残った 3 つの添え字をディラック行列の反対称積で置き換える。

$$-e(\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu\rho} \gamma^{mn} \rangle_3 \xi) R_{\nu\rho mn} = 2e(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu m} \xi) R_{\nu\rho m}{}^\rho - 2e(\psi_\mu \gamma^{\mu\rho m} \xi) R_{\nu\rho m}{}^\nu + 2e(\psi_\mu \gamma^{\nu\rho m} \xi) R_{\nu\rho m}{}^\mu \quad (91)$$

¹例えば $ee_m^\lambda D_\lambda v^m$ は換率が無い場合には全微分項であるが、換率が存在する場合には $ee_m^\lambda D_\lambda v^m = \partial_\mu (ev^\mu) + T_{\lambda\mu}^\lambda v^\mu$ のように全微分項以外に換率に比例する項を含む。

右辺の第1項と第2項はリッチテンソル $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^\kappa{}_\kappa$ が対称テンソルであることから0、第3項はビアンキ恒等式 $R_{[\nu\rho m]}{}^\mu = 0$ より0である。従って残るのは第3項の $\langle \gamma^{\mu\nu\rho}\gamma^{mm} \rangle_1$ を含む部分だけである。これを計算すると、次のようになることがわかる。

$$\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_\psi = 4e \left(R_m^\mu - \frac{1}{2} e_m^\mu R \right) (\xi \gamma^m \psi_\mu) \quad (92)$$

右辺にはアインシュタインテンソルが含まれる。アインシュタインテンソルは、アインシュタイン作用を e_μ^m で変分したときにも現れる。すなわち

$$\delta_e \mathcal{L}_E = -2e \left(R_m^\mu - \frac{1}{2} e_m^\mu R \right) \delta e_\mu^m \quad (93)$$

である。(92) に与えた e_μ^m の変換則を用いれば(92) と(93) が相殺することがわかる。

次に K_4 をひとつ含む項の相殺(84) を確かめよう。グラビティーノ運動項 \mathcal{L}_ψ を $\delta_{\psi 2}$ で変換すると、

$$\begin{aligned} \delta_{\psi 2} \mathcal{L}_\psi &= -8e\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \left(\frac{1}{24} \gamma_\rho K_4 \xi - \frac{1}{8} K_4 \gamma_\rho \xi \right) \\ &= -\frac{1}{3} e\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu (\gamma_\rho K_4 \xi) + e\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu (K_4 \gamma_\rho \xi) \end{aligned} \quad (94)$$

が得られる。第1項には $\gamma^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho = 9\gamma^{\mu\nu}$ を用いる。第2項はまず $\gamma^{\mu\nu\rho} = (1/2)\{\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\rho\}$ を用いて書き換え、 $\gamma^\rho K_4 \gamma_\rho = 3K_4$ および

$$\gamma^\rho \gamma^{\mu\nu} K_4 \gamma_\rho = \gamma^\rho \langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_{2,4,6} \gamma_\rho = 7\langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_2 + 3\langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_4 - \langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_6 \quad (95)$$

と変形する。その結果、

$$\delta_{\psi 2} \mathcal{L}_\psi = -2e\psi_\mu D_\nu (\langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_6 \xi) + 2e\psi_\mu D_\nu (\langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_2 \xi) \quad (96)$$

が得られる。三点結合項 \mathcal{L}_Y のグラビティーノに対する $\delta_{\psi 1}$ 変分も次のように良く似た項を与える。

$$\delta_{\psi 1} \mathcal{L}_Y = 2e\psi_\mu \langle \gamma^\mu K_4 \gamma^\nu \rangle_{6,2} D_\nu \xi = 2e\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_6 D_\nu \xi - 2e\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu} K_4 \rangle_2 D_\nu \xi \quad (97)$$

(97) と(96) を加えると、共変微分が K_4 に作用する部分だけが残るが、 $\langle \gamma^{\mu\nu} D_\nu K_4 \rangle_6$ を含む項は K_4 のビアンキ恒等式に比例するから0になり、結局次の項のみが残る。

$$\delta_{\psi 2} \mathcal{L}_\psi + \delta_{\psi 1} \mathcal{L}_Y = 2e\psi_\mu \langle \gamma^{\mu\nu} D_\nu K_4 \rangle_2 \xi = eK^{\mu\nu\rho\sigma} D_\mu (\xi \gamma_{\nu\rho} \psi_\sigma) = -\frac{e}{6} D_\mu \delta A_{\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (98)$$

これは K_4 運動項の A_3 の変分と相殺する。

最後に、 K_4 を二つ含む変分の相殺(85)を確認しよう。 $\delta_{\psi 2} \mathcal{L}_Y$ は次のように与えられる。

$$\delta_{\psi 2} \mathcal{L}_Y = e\psi_\mu (\gamma^\mu K_4 \gamma^\nu - \gamma^\nu K_4 \gamma^\mu) \left(\frac{1}{24} \gamma_\nu K_4 - \frac{1}{8} K_4 \gamma_\nu \right) \xi \quad (99)$$

展開すると4つの項が現れるが、それぞれディラック行列の積を以下のように処理する。

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu K_4 \gamma^\nu) \left(\frac{1}{24} \gamma_\nu K_4 \right) &= \frac{11}{24} \gamma^\mu K_4 K_4, \\
(\gamma^\mu K_4 \gamma^\nu) \left(-\frac{1}{8} K_4 \gamma_\nu \right) &= -\frac{3}{8} \gamma^\mu K_4 K_4, \\
(-\gamma^\nu K_4 \gamma^\mu) \left(\frac{1}{24} \gamma_\nu K_4 \right) &= -\frac{1}{24} \gamma^\nu K_4 (2\delta_\nu^\mu - \gamma_\nu \gamma^\mu) K_4 = -\frac{1}{12} \gamma^\mu K_4 K_4 + \frac{1}{8} K_4 \gamma^\mu K_4, \\
(-\gamma^\nu K_4 \gamma^\mu) \left(-\frac{1}{8} K_4 \gamma_\nu \right) &= \frac{7}{8} \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_9 - \frac{1}{8} \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_5 - \frac{9}{8} \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_1
\end{aligned} \tag{100}$$

添え字が縮約されたディラック行列が K_4 を挟んでいる場合には $\gamma^\nu K_4 \gamma_\nu = 3K_4$ を用いた。4つめは両端にあるディラック行列の添え字が縮約されており、すぐには計算できないので階数ごとに分解しておいた。その際に転置公式を用いて示すことのできる $\langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_{7,3=0}$ を用いた。最初の3つを加えると $\gamma^\mu K_4 K_4$ を含む項が相殺する。 $K_4 \gamma^\mu K_4$ を含む項は階数ごとにまとめると、次の結果を得る。

$$\delta_{\psi_2} \mathcal{L}_Y = e\psi_\mu \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_9 \xi - e\psi_\mu \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_1 \xi \tag{101}$$

右辺第1項は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
e\psi_\mu \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_9 \xi &= \frac{e}{4!4!} (\psi_\mu \gamma^{\rho_1 \dots \rho_4 \mu \sigma_1 \dots \sigma_4} \xi) K_{\rho_1 \dots \rho_4} K_{\sigma_1 \dots \sigma_4} \\
&= \frac{e}{2 \cdot 4!4!} E^{\kappa \lambda \mu \rho_1 \dots \rho_4 \sigma_1 \dots \sigma_4} (\psi_\mu \gamma_{\kappa \lambda} \xi) K_{\rho_1 \dots \rho_4} K_{\sigma_1 \dots \sigma_4} \\
&= \frac{e}{2} \frac{1}{4!4!3!} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_{11}} \delta A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} K_{\mu_4 \dots \mu_7} K_{\mu_8 \dots \mu_{11}}
\end{aligned} \tag{102}$$

これは Chern-Simons 項 \mathcal{L}_{CS} の変分と相殺する。

(101) の右辺第2項は K_4 の運動項の多脚場の変分と相殺する。このことを示すには、一般の次元において多脚場の変換が (82) の δ_e によって与えられるときに任意の n 階反対称テンソル A_n と B_n に対して成り立つ次の公式を用いるのが便利である。

$$\delta_e \left(\frac{e}{n!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} A_{\mu_1 \dots \mu_n} B_{\nu_1 \dots \nu_n} \right) = (-)^{n(n+1)/2} 2e (\xi \langle A_n \gamma^\mu B_n \rangle_1 \psi_\mu) \tag{103}$$

左辺の δ_e は A_n や B_n には作用しないものとする。この公式は右辺をウィックの定理を用いて実際に計算することで簡単に示すことができる。この公式を用いると直ちに

$$\delta_e \mathcal{L}_K = -e (\xi \langle K_4 \gamma^\mu K_4 \rangle_1 \psi_\mu) \tag{104}$$

が得られるが、これは丁度 (101) の右辺第2項と相殺する。

以上でフェルミオンの二次までの項については、全ての相殺が確認された。

2 M-ブレーン

2.1 電荷と磁荷

超重力理論の作用 (4) は、前節で確認したように局所的超対称変換のもとで不変である。さらに一般の重力理論においてそうであるように、一般座標変換、および局所ローレンツ変換のもとでも不変である。実はこれら以外に、3-フォーム場 A_3 に対する次の局所変換のもとでも不変である。

$$\delta A_3 = d\Lambda_2 \quad (105)$$

パラメータ Λ_2 は任意の 2-フォーム場である。成分を用いて書けば次のようになる。

$$\delta A_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Lambda_{\nu\rho} + \partial_\nu \Lambda_{\rho\mu} + \partial_\rho \Lambda_{\mu\nu} \quad (106)$$

このような局所対称性の存在は A_3 が電磁気学におけるベクトルポテンシャル A_μ に類似したゲージ場であることを意味している。ゲージ場が存在した場合、それに対して結合する電荷、磁荷を導入することができる。M 理論においてはこれらのチャージを持つオブジェクトが重要な役割を果たす。 A_3 に対する電荷、磁荷について考える前に、まずは Maxwell 理論における電荷と磁荷について復習しておこう。

4 次元時空における Maxwell の電磁気学を考えよう。電磁場の作用は次のように与えられる。

$$S_{\text{em}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{em}}, \quad \mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2. \quad (107)$$

ただし、 \mathbf{E} は電場の強さ、 \mathbf{B} は磁束密度である。誘電率を ϵ 、透磁率を μ とした。電束密度 \mathbf{D} と磁場の強さ \mathbf{H} は次のように定義される。

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}, \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}. \quad (108)$$

一般には \mathcal{L}_{em} は電磁場の二次関数とは限らず、 $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ と $(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ の関係は非線形になり得る。ここでは線形な場合のみを考えるが、関係式 (108) は一般の場合に成り立つ。ローレンツ対称性を見やすくするためには、

$$F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \quad (109)$$

によって反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を定義し、さらにその双対場 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{F}_{i0} = H_i, \quad \tilde{F}_{ij} = -\epsilon_{ijk} D_k \quad (110)$$

によって定義するのが良い。このとき (108) は次のように書き換えることができる。

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}_{\mu\nu} \delta F_{\rho\sigma} \right) = \int \tilde{F}_2 \wedge \delta F_2 \quad (111)$$

4 次元時空における完全反対称テンソル場を $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk}$ によって定義した。

電荷、磁荷が存在しない場合のマクスウェル方程式は次のように与えられる。

$$dF_2 = 0, \quad d\tilde{F}_2 = 0. \quad (112)$$

このとき、 F_2 および \tilde{F}_2 に対してベクトルポテンシャル A_1 および \tilde{A}_1 を次の式によって定義することができる。

$$F_2 = dA_1, \quad \tilde{F}_2 = d\tilde{A}_1. \quad (113)$$

場の強さ F_2 と \tilde{F}_2 はゲージ変換

$$\delta A_1 = d\lambda, \quad \delta \tilde{A}_1 = d\tilde{\lambda} \quad (114)$$

のもとで不変である。

電荷をもつ粒子が存在する場合には、 $d\tilde{F}_2$ は 0 ではなくなるが、 $dF_2 = 0$ はそのまま成り立つのでベクトルポテンシャル A_1 を定義することができる。荷電粒子のチャージ q をこのように定義されたベクトルポテンシャルと荷電粒子との結合の強さによって定義しよう。すなわち、荷電粒子とベクトルポテンシャルの結合を表す作用が

$$S_{\text{ele}} = q \int_C A_1 = q \int_C d\sigma \frac{dx^\mu}{d\sigma} A_\mu \quad (115)$$

によって与えられるとき、粒子の電荷が q であるということにする。積分記号に添えた C は荷電粒子の世界線であり、積分がその世界線上で行われることを意味している。これは電場 E の中においた電荷が力 $f = qE$ を受けるときにそのチャージを q と定義するのと同じことである。この作用はゲージ変換 $\delta A_1 = d\lambda$ のもとで不変である。

電荷を定義するもう一つの方法は、荷電粒子を囲む閉曲面上で電束密度 D を積分するものである。この積分が上で定義したのと同じ電荷を与えることを示すには、作用 $S = S_{\text{em}} + S_{\text{ele}}$ から電磁場の運動方程式を求める必要がある。そのための準備として、 S_{ele} を次の形に表しておくのが良い。

$$S_{\text{ele}} = q \int_C A_1 = q \int A_1 \wedge \delta_3(C). \quad (116)$$

ただし最後の表式における積分は 4 次元時空全体で行われる。 $\delta_3(C)$ は粒子の世界線を表す δ 関数的な 3-フォームであり、任意の 1-フォーム場 A_1 に対して (116) の二つ目の等号が成り立つことで定義される。例えば位置

$$(x^1, x^2, x^3) = (x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad (117)$$

に静止した粒子であれば次のように定義される。

$$\delta_3(C) = \delta(x^1 - x_0^1) dx^1 \wedge \delta(x^2 - x_0^2) dx^2 \wedge \delta(x^3 - x_0^3) dx^3 \quad (118)$$

A_1 に対する運動方程式を得るために、作用 $S = S_{\text{em}} + S_{\text{ele}}$ を A_1 について変分してみよう。

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_{\text{em}}[F_2] + q \int_C \delta A_1 \\ &= \int \tilde{F}_2 \wedge d\delta A_1 + q \int \delta A_1 \wedge \delta_3(C) \\ &= \int \left(-d\tilde{F}_2 - q\delta_3(C) \right) \wedge \delta A_1 \end{aligned} \quad (119)$$

よって運動方程式

$$d\tilde{F}_2 = -q\delta_3(C) \quad (120)$$

が得られる。この両辺を、ある時刻において、粒子を含むボール状の空間 B (図2) で積

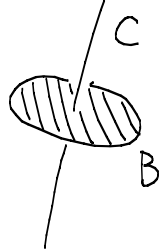


図 2: 荷電粒子の世界線とそれと交差する領域 B

分すると、

$$\int_B d\tilde{F}_2 = -q \int_B \delta_3(C) = -q \quad (121)$$

となる。さらにストークスの定理

$$\int_B d(\dots) = \oint_{\partial B} (\dots) \quad (122)$$

を用いることで

$$q = - \oint_{\partial B} \tilde{F}_2 = \oint_{\partial B} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (123)$$

が得られ、確かに電束密度の積分は電荷を与える。

磁荷が存在するが、電荷が存在しない場合には $d\tilde{F}_2 = 0$ が成り立ちベクトルポテンシャル \tilde{A}_1 を $\tilde{F}_2 = d\tilde{A}_1$ によって定義することができる。このときポテンシャル \tilde{A}_1 と粒子との結合を表す項

$$S_m = q_m \int \tilde{A}_1. \quad (124)$$

の係数として磁荷を定義する。磁荷についても電荷と同様にフラックスの積分として与えることができる。このことを示すには双対場のポテンシャル \tilde{A}_1 に対する運動方程式を用いる必要があるが、そのためには \tilde{A}_1 に対する作用を用いる必要がある。 A_1 を用いて与えられたゲージ場の作用

$$S_{\text{em}}[F_2] \quad (125)$$

から、双対場 \tilde{A}_1 を用いた作用を得るには、ルジャンドル変換

$$\tilde{S}_{\text{em}}[\tilde{F}_2] = S_{\text{em}}[F_2] - \int \tilde{F}_2 \wedge F_2 \quad (126)$$

を行えばよい。実際、ラグランジアン $L(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ に対する変分が

$$\delta L = \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}) \quad (127)$$

で与えられるのに対して、作用 (126) に対応するラグランジアン $\tilde{L} = L + \int d^3\mathbf{r}(-\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$ の変分は

$$\delta\tilde{L} = \int d^3\mathbf{r}(\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}) \quad (128)$$

となり、確かに \tilde{L} が F_2 の汎関数であることがわかる。こうして得られる作用 \tilde{S}_{em} と S_m を用いれば \tilde{A}_1 に対する運動方程式

$$dF_2 = q\delta_3(C) = 0 \quad (129)$$

が得られるので、ある粒子の周りを囲む閉曲面上の積分として磁荷が次のように与えられる。

$$q_m = \oint_{\partial B} F_2 = \oint_{\partial B} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \quad (130)$$

2.2 ブレーン

電磁気学において質量 m 、チャージ q を持つ粒子の作用は

$$S_{\text{ele}} = -m \int_C ds + q \int_C A_\mu dx^\mu \quad (131)$$

と与えられる。どちらの項も積分は粒子の世界線 C 上で行われる。世界線上のパラメータ (座標) を σ とすると、

$$S_{\text{ele}} = -m \int \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} g_{\mu\nu}} d\sigma + q \int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma \quad (132)$$

と書くこともできる。

この作用を 11 次元時空の 3-フォーム場 A_3 に結合した物体の作用に一般化することを考えよう。まずゲージ場との結合項に注目する。Maxwell 理論の A_μ を 11 次元超重力理論の $A_{\mu\nu\rho}$ に置き換えた場合、最も自然な拡張は

$$q \int A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma \rightarrow hq_{M2} \int A_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\mu}{d\sigma^0} \frac{dx^\nu}{d\sigma^1} \frac{dx^\rho}{d\sigma^2} d^3\sigma \quad (133)$$

である。あとで便利なようにチャージ q_{M2} をプランク定数 h を分離して定義した。このとき積分は $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2)$ を座標とする 3 次元の超曲面上で行われる。この超曲面のように、広がりを持つ物体が時空の中で占める空間のことを worldvolume と呼ぶ。次のように表すこともできる。

$$S = hq_{M2} \int A_3 \quad (134)$$

従って、 A_3 に対して電荷を持つ物体は時間方向と空間 2 方向に広がりを持つ膜 (membrane) である。(図 3) この膜のことを特に M2-ブレーンと呼ぶ。一般に p -ブレーンとは空間 p 方向の広がりを持つ物体のことであり、例えば 0-ブレーン、1-ブレーン、2-ブレーンはそれぞれ粒子、弦、膜を表す。M-理論において現れる 2-ブレーンのことを特に M2-ブレーンと

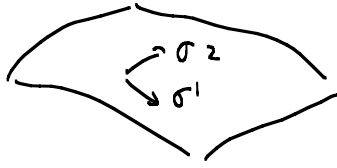


図 3: ゲージ場 A_3 に結合するものは膜である。

呼ぶ。ここでは (6) で述べたように $A_{\mu\nu\rho}$ が次元をもたないような規格化を用いているが、その場合にはチャージ q_{M2} は $[L^{-3}]$ の次元を持つ。

次に、(131) において質量 m を含む項を一般化することを考えよう。この項は

$$S = -m \int ds = -m(\text{世界線の長さ}) \quad (135)$$

のように幾何学的に解釈することができる。M2-ブレーンは 3 次元の広がりを持つから、世界線の長さの代わりに worldvolume の体積を採用するのが自然であろう。その際全体の係数は $[ML^{-2}]$ の次元を持ち、M2-ブレーンの張力を表すので T という文字で表すことにする。

$$S = -T_{M2}(\text{worldvolume の体積}) = -T_{M2} \int d^3\sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}. \quad (136)$$

$G_{\alpha\beta}$ は M2-ブレーン上の誘導計量であり、次のように定義される。

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (137)$$

この作用は南部・後藤作用と呼ばれ、M2-ブレーンに限らず、あらゆる相対論的なブレーンを表す際に用いられる基本的作用である。

T はブレーンの張力を表すと述べたが、南部・後藤作用によって表されるブレーンにおいては常に

$$(\text{ブレーンの張力}) = (\text{ブレーンのエネルギー密度}) \quad (138)$$

が成り立つことを注意しておこう。

次に、 A_3 に対する磁荷について考えよう。そのためにまず A_3 に対する双対場を定義しよう。11 次元超重力理論の作用 (4) に含まれるゲージ場 A_3 の運動項は

$$S = \frac{\hbar}{l_p^9} \int d^{11}x e \left(-\frac{1}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma} \right) = \frac{\hbar}{2l_p^9} \int *K_4 \wedge K_4 \quad (139)$$

である。従って双対場を電磁気学の場合の (111) と同様な式

$$\delta S = \frac{\hbar}{l_p^9} \int K_7 \wedge \delta K_4 \quad (140)$$

によって定義すれば

$$K_7 = *K_4 \quad (141)$$

が得られる。(11次元超重力理論の作用(4)においてゲージ場 A_3 は運動項以外の部分にも現れ、それらの項はあとで重要な役割を果たすのであるが、ここでは大まかな双対関係のみを見るために運動項のみに注目している。) 双対関係の式の係数を(140)のように選ぶことにより、 $K_{\mu_1 \dots \mu_7}$ も $K_{\mu_1 \dots \mu_4}$ と同じく次元 $[L^{-1}]$ を持つ。対応するポテンシャルを

$$K_7 = dA_6 \quad (142)$$

によって定義する(実際には双対場を定義する際に運動項以外も考慮すると右辺には dA_6 以外の項が現れるが、ここでは無視している。)と、双対場と磁荷との結合は

$$S_m = hq_{M5} \int A_6 \quad (143)$$

によって与えられる。ここでもあとで都合がいいようにプランク定数を分離した。この積分は6次元の空間上で定義されるから、磁荷を持つ物体は5-ブレーンであるということになる。この5-ブレーンはM5-ブレーンと呼ばれる。 $A_{\mu_1 \dots \mu_6}$ は無次元量であり、チャージ q_{M5} は次元 $[L^{-6}]$ を持つ。

上ではチャージは作用中のブレーンとゲージ場の結合項を用いて定義した。チャージを与えるもう一つの方法は、ブレーンを取り囲む閉曲面上で場の強さを積分するものである。電磁気学の例で示したのと同様に、ゲージ場に対する運動方程式を用いてこのことを示しておこう。まずはM2-ブレーンの場合を考えてみよう。作用(134)と(139)の和を場 A_3 で変分すれば、

$$\delta S = \int \left(\frac{h}{l_p^9} K_7 \wedge \delta K_4 + hq_{M2} \delta A_3 \wedge \delta_8[M2] \right) = \int \left(\frac{h}{l_p^9} dK_7 + hq_{M2} \delta[M2] \right) \wedge \delta A_3 \quad (144)$$

となる。これより、運動方程式

$$dK_7 = -l_p^9 q_{M2} \delta[M2] \quad (145)$$

が得られる。この両辺をM2-ブレーンと交差するボール状の8次元空間 B (図4)で積分

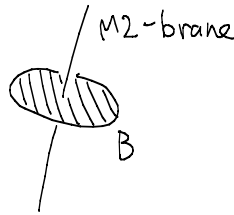


図4: M2-ブレーンの worldvolume と交差する8次元空間 B

し、ストークスの定理を用いることで

$$\oint_{\partial B} K_7 = -l_p^9 q_{M2}. \quad (146)$$

が得られる。ここで、 B と M2-ブレーンの向き付けの関係は $\oint_B \delta_8[M2] = 1$ を満足するように選んだものとした。ここで採用している係数の取り方では、 K_7 の積分が電荷 q_{M2} そのものではなく、定数係数 $-l_p^9$ が掛ることを注意しておく。

同様に、磁荷、すなわち M5-ブレーンのチャージを K_4 の積分として与えることもできる。そのためにはゲージ場の運動項として S_{kin} のルジャンドル変換

$$\tilde{S}_{\text{kin}} = S_{\text{kin}} - \frac{\hbar}{l_p^9} \int K_7 \wedge K_4 \quad (147)$$

を用いればよい。(143) と (147) の和を A_6 で変分することによって運動方程式

$$dK_4 = -l_p^9 q_{M5} \delta_5[M5] \quad (148)$$

が導かれ、これを積分してストークスの定理を用いることにより

$$\oint_{\partial B} K_4 = -l_p^9 q_{M5}. \quad (149)$$

が得られる。

2.3 ディラックの量子化条件

前節において、M2-ブレーンと M5-ブレーンのチャージ q_{M2} と q_{M5} をブレーンとゲージ場との結合

$$S_{M2} = h q_{M2} \int A_3, \quad S_{M5} = h q_{M5} \int A_6 \quad (150)$$

の係数として定義した。これらのチャージはブレーンの最も基本的な性質を現すパラメータである。量子論的な無矛盾性はこれらがディラックの量子化条件と呼ばれる条件を満たすことを要求する。

worldvolume N を持つ M2-ブレーンを考えよう。その作用は次の項を含む。

$$S_{M2} = h q_{M2} \int_N A_3 \quad (151)$$

N が境界を持たない場合、すなわち無限に広がっているか、有限であるが閉じている場合を考える。このとき (151) は A_3 のゲージ変換 $\delta A_3 = d\lambda_2$ のもとでゲージ不変である。このことはストークスの定理を用いれば簡単に示すことができるが、以下のような方法で作用 (151) をポテンシャル A_3 ではなく場の強さ $K_4 = dA_3$ を用いて表すことでもゲージ不変性を明らかにすることができる。

まず、M2-ブレーンの world volume N を、ある基準となる形状 N_0 からの変形として解釈しよう。すると、変形の仕方の汎関数として作用は与えられる。world volume が N_0 である M2-ブレーンに対する作用 (151) の値を S_{N_0} とし、そこからの変形による作用の変化を次のように与えよう。

$$S_N - S_{N_0} = h q_{M2} \int_N A_3 - h q_{M2} \int_{N_0} A_3 = h q_{M2} \int_X dA_3 = h q_{M2} \int_X K_4 \quad (152)$$



図 5: M2-ブレーンを N_0 から N に変形するときを掃く空間を X とする。

ただし、 X はその境界が $N - N_0$ である 4 次元の空間を表す。言い換えれば、 X は M2-ブレーンを N_0 から N まで変形するときを掃く空間である。(152) の最後の表式は基準 N_0 の取り方に依存するという問題はあるが、ゲージ不変性については明らかである。しかし、(152) が本当に作用を定義しているかどうかには注意が必要である。なぜなら、一般に N_0 と N を指定したとしてもそれらをつなぐ X は一意的に定まらないからである。(152) を作用として採用できるためには、作用が X の取り方に依存しない必要がある。

ただし、作用の値が実数として定まる必要はない。量子論において、作用は経路積分中に $e^{iS/\hbar}$ の形で現れる。従って、 S は実数ではなく、周期が $2\pi\hbar = h$ の S^1 上に値をとる量である。そのため、 S が一意的に定まるということは、 h の整数倍の不定性を除き実数値が定まることを意味している。

このことを踏まえると、(152) によって作用が定義されているためには、 N_0 と N をつなぐ二つの 4 次元空間 X_1 と X_2 に対して次の式が成り立たなければならない。

$$q_{M2} \int_{X_1} K_4 - q_{M2} \int_{X_2} K_4 = n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (153)$$

あるいは、同じことであるが、 X_1 と X_2 を張り合わせて得られる閉じた 4 次元空間 Y に対して

$$q_{M2} \oint_Y K_4 = n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (154)$$

が成り立つ必要がある。 N_0 と N がどのように与えられようと、 X_1 と X_2 を適当に選ぶことで任意の Y を実現できるから、任意の Y に対して (154) が成り立つことが作用 (152) が定義されるための必要十分条件である。条件 (154) はフラックスの量子化条件と呼ばれる。

M5-ブレーンが存在し、そのチャージによってその周りにゲージ場が誘起されている状況を考えよう。M5-ブレーンのチャージはその周りを囲む 4 次元球面上で K_4 を積分することで (149) によって得られる。このような状況でもフラックスの量子化条件は成り立たなければならないから、次の式が得られる。

$$q_{M2} q_{M5} = \frac{n}{l_p^9} \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (155)$$

この関係式を (M2-ブレーンと M5-ブレーンに対する) ディラックの量子化条件と呼ぶ。整数 n がいくつになるかはここでの議論だけからは決まらないが、「矛盾なく存在できるものは常に存在する。」と考えると、 $n = 1$ と取るのが自然である。

$$q_{M2} q_{M5} = \frac{1}{l_p^9}. \quad (156)$$

実は、あとで述べるさらに詳しい解析によると、 q_{M2} と q_{M5} は次のように与えられる。

$$q_{M2} = \frac{1}{l_p^3}, \quad q_{M5} = \frac{1}{l_p^6}. \quad (157)$$

もちろんこれらはディラックの量子化条件を満足している。従って、ゲージ場とブレーンの結合は次のように与えられる。

$$S_{M2} = \frac{\hbar}{l_p^3} \int A_3, \quad S_{M5} = \frac{\hbar}{l_p^6} \int A_6. \quad (158)$$

ここでは M2-ブレーンと M5-ブレーンに対するディラックの量子化条件を与えたが、より一般のディラックの量子化条件がどうなるかを述べておこう。導出は繰り返しになるので省き、結果だけを与える。 D 次元時空中の p ブレーンを考える。このブレーンは $p+1$ フォームゲージ場 A_{p+1} と結合する。 $F_{p+2} = dA_{p+1}$ の双対場を、ゲージ場運動項の変分によって

$$\delta S_{\text{kin}} = c \int \tilde{F}_{D-p-2} \wedge \delta F_{p+2} \quad (159)$$

によって定義する。 c は定数である。従って双対ゲージ場のポテンシャルは \tilde{A}_{D-p-3} であり、それに結合する磁気的なブレーンは $D-p-4$ ブレーンである。これらブレーンとゲージ場の結合

$$S_{\text{ele}} = Q_{\text{ele}} \int_{p+1} A_{p+1}, \quad S_{\text{mag}} = Q_{\text{mag}} \int_{D-p-3} A_{D-p-3} \quad (160)$$

によって電荷 Q_{ele} と磁荷 Q_{mag} を定義することにする。このとき、フラックスの量子化条件は次のように与えられる。

$$Q_{\text{ele}} \oint_{p+2} F_{p+2} \in h\mathbf{Z}, \quad Q_{\text{mag}} \oint_{D-p-2} F_{D-p-2} \in h\mathbf{Z}. \quad (161)$$

また、ディラックの量子化条件は

$$\frac{Q_{\text{ele}} Q_{\text{mag}}}{c} \in h\mathbf{Z} \quad (162)$$

である。

2.4 ブレーンの微小振動

ゲージ場のない背景上のブレーンを考えよう。話を簡単にするために、計量も平坦であり、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ であるとする。M理論には M2-ブレーンと M5-ブレーンが存在するが、ここでは話を一般化して D 次元時空中の p -ブレーンを考えることにする。

p -ブレーンの張力を T とすると、その作用は次の南部・後藤作用で与えられる。

$$S = -T \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}}. \quad (163)$$

σ^α ($\alpha = 0, \dots, p$) はブレーン上の座標である。張力 T は次元 $[ML^{-p}]$ を持つ。一般のブレーンの運動を扱うのは難しいので、ここでは p -ブレーンが x^α ($\alpha = 0, \dots, p$) 方向に広がっており、 x^i ($i = p+1, \dots, D-1$) 方向に微小振動している状態を考える。ブレーン上の座標 σ^α に対する一般座標変換の自由度を用いれば、次のようにブレーンの座標を選ぶことができる。

$$\sigma^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 0, \dots, p) \quad (164)$$

これは静的ゲージと呼ばれる。このゲージでのブレーン上の誘導計量は

$$G_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \sigma^\beta} \quad (165)$$

と与えられる。ブレーンの振動が微小であるという仮定により、右辺第二項は微小量である。そのことを踏まえて作用を展開すると、

$$S = -T \int d^{p+1}\sigma \left(1 + \frac{1}{2} \partial_\alpha x^i \partial^\alpha x^i + \mathcal{O}((\partial_\alpha x^i)^4) \right) \quad (166)$$

が得られる。被積分関数の第1項は定数なので運動方程式に影響を与えず、無視することができる。第2項は $p+1$ 次元時空におけるスカラー場 x^i の運動項を与えている。この項の係数を1にするように、スカラー場の規格化を次のように変更する。

$$\phi^i = T^{1/2} x^i. \quad (167)$$

これを (166) に代入して定数項を無視すると、

$$S = \int d^{p+1}\sigma \left(-\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i + \mathcal{O}(T^{-1}) \right) \quad (168)$$

被積分関数の第2項は T の負べきであり、 T を (考えているエネルギースケールに対して) 十分大きく取る極限においては無視することができる。つまり、考えているエネルギースケールを小さく取る極限 (低エネルギー極限) において、作用は $p+1$ 次元の $D-(p+1)$ 個の自由スカラー場の作用に帰着する。

$$S = \int d^{p+1}\sigma \left(-\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi^i \partial^\alpha \phi^i \right). \quad (169)$$

このスカラー場は振動することのできるどのようなブレーンの上にも存在し、その数はブレーンに対して垂直な方向の空間の次元に一致する。M2-ブレーンの場合には、8個のスカラー場が、M5-ブレーンの上には5個のスカラー場が存在する。

一般に、ブレーン上にはここで考えた微小振動を表すスカラー場のほかに、フェルミオンやゲージ場などが存在する。ブレーン上にどのような場が存在し、それらの間にどのような相互作用があるのかを明らかにすることは、ブレーンの性質を調べる第1歩である。

2.5 開いた M2-ブレーン

電磁気学において、Maxwell 方程式から電荷の保存則が得られることは良く知られている。電荷密度と電流密度よりなるカレントベクトル J^μ を含む Maxwell 方程式は

$$d\tilde{F}_2 = J_3 \quad (170)$$

である。ここではカレントを $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^\sigma$ を成分とする 3-フォーム J_3 として表した。世界線が C である点状の荷電粒子の場合には

$$J_3 = q\delta_3(C) \quad (171)$$

である。(170) の両辺に d を作用させると

$$0 = dJ_3 \quad (172)$$

となる。これは保存則 $\partial_\mu J^\mu = 0$ に他ならない。この保存則は、荷電粒子の世界線 C が途切れないことを意味している。例えば、 $x^i = 0$ にある粒子が $x^0 = 0$ において突然現れたとすると、

$$\delta_3(C) = \theta(x^0)\delta(x^1)dx^1 \wedge \delta(x^2)dx^2 \wedge \delta(x^3)dx^3 \quad (173)$$

これに外微分を作用させてみよう。階段関数 $\theta(x^0)$ への作用が

$$d\theta(x^0) = \frac{d\theta(x^0)}{dx^0}dx^0 = \delta(x^0)dx^0 \quad (174)$$

となることを用いれば、

$$d\delta_3(C) = \delta(x^0)dx^0 \wedge \delta(x^1)dx^1 \wedge \delta(x^2)dx^2 \wedge \delta(x^3)dx^3 = \delta_4(\partial C) \quad (175)$$

が得られる。ただし ∂C は世界線 C の境界（ここでは $x^\mu = 0$ の点）を表し、 $\delta_4(\partial C)$ はその点でのみ値を持つ δ 関数的な 4-フォームである。(図6)このように、 $\delta_3(C)$ に外微分を

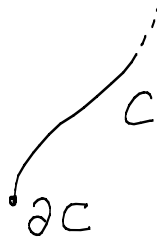


図 6: チャージの保存則を破る粒子の世界線

作用させたものは C が境界を持つときに 0 にはならず、カレント (171) が保存則を満足しないことがわかる。

同様な解析を M-ブレーンについても行ってみよう。今度はゲージ場に対して運動項以外の部分も考慮し、その影響を注意深く見ることにする。11 次元超重力理論の作用 (4) からゲージ場を含む項を抜き出すと、

$$S = \frac{\hbar}{l_p^9} \int d^{11}x e \left[-\frac{1}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma} \right] - \frac{\hbar}{l_p^9} \frac{1}{3!} \int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4. \quad (176)$$

となる。フェルミオンを含む項についてはここでも無視することにする。外微分形式を用いて、次のように書いておくのが便利である。

$$S = \frac{\hbar}{l_p^9} \int \left(\frac{1}{2} * K_4 \wedge K_4 - \frac{1}{6} A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 \right) \quad (177)$$

K_4 に対するビアンキ恒等式と (177) から得られる運動方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} dK_4 &= 0, \\ dK_7 &= \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4. \end{aligned} \quad (178)$$

ただし、双対場 K_7 を以前と同様に $K_7 = *K_4$ によって定義した。このとき $K_4 = -*K_7$ である。(178) の第 2 式は A_3 に対する運動方程式であるが、これを双対場に対するビアンキ恒等式とみなせば、 K_7 が 6-フォームポテンシャル A_6 を用いて

$$K_7 = dA_6 + \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4 \quad (179)$$

と与えられることを意味している。

K_4 と K_7 は次のゲージ変換のもとで不変である。

$$A_6 \text{ ゲージ変換: } \delta A_6 = d\Lambda_5, \quad \delta A_3 = 0. \quad (180)$$

これを A_6 ゲージ変換と呼ぶ。同様に、 A_3 に対するゲージ変換も存在する。注意しなければならないのは、 A_3 のゲージ変換のもとで K_7 が不変であるためには、次のように A_6 も同時に変換されなければならないという点である。

$$A_3 \text{ ゲージ変換: } \delta A_3 = d\Lambda_2, \quad \delta A_6 = -\frac{1}{2} \Lambda_2 \wedge K_4. \quad (181)$$

ここまではブレーンの存在を考慮しなかった。ブレーンが存在する場合、(178) の二つの式にはブレーンの存在を表すカレント項が付け加わる。

$$\begin{aligned} dK_4 &= J_5^{M5}, \\ dK_7 &= J_8^{M2} + \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4. \end{aligned} \quad (182)$$

このときのチャージの保存則を得るために、Maxwell 理論の場合のまねをして、これらの式に外微分を作用させよう。その結果、

$$\begin{aligned} 0 &= dJ_5^{M5}, \\ 0 &= dJ_8^{M2} + dK_4 \wedge K_4 = dJ_8^{M2} + J_5^{M5} \wedge K_4 \end{aligned} \quad (183)$$

が得られる。一つ目の式は M5-ブレーンのカレントが保存し、M5-ブレーンは端を持たないことを意味している。

一方二つ目の式より、M2-ブレーンのカレント J_8^{M2} は必ずしも保存しなくても良いことを意味している。すなわち M2-ブレーンは端を持つことができる。ただし、(183) の第2式が成り立つためには、 $dJ_8^{M2} \neq 0$ であるところ、すなわち M2-ブレーンが端を持つところでは必ず $J_5 \neq 0$ 、すなわち M5-ブレーンが存在していなければならない。つまり、M2-ブレーンが端を持つとき、それは M5-ブレーンにくっついていなければならない。(図7) このような端を持つ M2-ブレーンは開いた M2-ブレーンと呼ばれる。[15, 16]

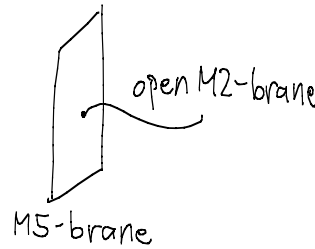


図 7: 開いた M2-ブレーンの端は常に M5-ブレーン上にある。

開いた M2-ブレーンであっても、M2-ブレーンに変わりはないから、ゲージ場 A_3 との結合は次の作用によって与えられる。

$$S = \frac{h}{l_p^3} \int_{M2} A_3 \quad (184)$$

M2-ブレーンが端を持つ場合にはこの作用のゲージ不変性が問題になる。 A_3 ゲージ変換 (181) を行ってみると、ストークスの定理を用いることで

$$\delta S = \frac{h}{l_p^3} \int_{M2} d\Lambda_2 = \frac{h}{l_p^3} \int_{\partial M2} \Lambda_2 \quad (185)$$

となり、M2-ブレーンが境界を持たば0でない変分が残る。この問題を解決するには、M2-ブレーンの境界に結合する新たなゲージ場を導入すればよい。2-フォーム場 b_2 が存在し、M2-ブレーンの端に次のように結合しているとしてみよう。

$$S = \frac{h}{l_p^3} \int_{\partial M2} b_2. \quad (186)$$

係数はあとで式が簡単になるように選んだ。 b_2 はその成分が次元 $[L]$ を持つ。さらにこのゲージ場が A_3 ゲージ変換 (181) のもとで

$$\delta b_2 = -\Lambda_2 \quad (187)$$

と変換されるとすれば、新たに導入した作用 (186) のゲージ変換が丁度 (185) を相殺する。

ここで導入した b_2 はどこにいるのだろうか。11次元の超重力理論は3つの場 $g_{\mu\nu}$ 、 $A_{\mu\nu\rho}$ 、 ψ_μ を含むものただ一つしかない信じられているから、そこに新たな場を追加することは

できない。M2-ブレーンの端が常にM5-ブレーンの上にあることを思い出そう。このことから、 b_2 をM5-ブレーン上の場として解釈することができる。実は、M5-ブレーンの上には超対称性を持つ6次元理論が実現されていることが知られており、この超対称性からもテンソル場 b_2 の存在が要請される。

次に、M5-ブレーンと A_6 の結合を考えてみよう。M5-ブレーンが A_6 に対するチャージを持つということは次の結合が存在することを意味する。

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int A_6 \quad (188)$$

ここでもゲージ不変性に関する問題が発生する。(188) に対して A_3 ゲージ変換 (181) を行ってみると、

$$\delta S = -\frac{1}{2} \frac{h}{l_p^6} \int \Lambda_2 \wedge K_4 \quad (189)$$

となり、ゲージ不変になっていない。この問題も先ほど導入したゲージ場 b_2 を用いることで解決することができる。そのためには、(188) に対してさらに b_2 を含む項を付け加えた

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(A_6 - \frac{1}{2} b_2 \wedge K_4 \right) = \frac{h}{l_p^6} \int \left(A_6 + \frac{1}{2} H_3^0 \wedge A_3 \right) \quad (190)$$

を採用すればよい。ただし H_3^0 は b_2 に対する場の強さ

$$H_3^0 = db_2 \quad (191)$$

である。これは b_2 に対するゲージ変換

$$b_2 \text{ ゲージ変換: } \delta b_2 = d\lambda_1 \quad (192)$$

のもとで不変である。 H_3^0 は A_3 ゲージ変換 (187) のもとでは不変ではないが、 A_3 ゲージ変換の元でも不変になる場の強さを次のように定義することができる。

$$H_3 = db_2 + A_3. \quad (193)$$

この H_3 のビアンキ恒等式は

$$dH_3 = K_4 \quad (194)$$

である。 $A_3 \wedge A_3 = 0$ を用いれば (190) に含まれる H_3^0 はそのまま H_3 に置き換えることができる。

まだ b_2 に対してはその運動項が与えられていない。実は b_2 の運動項は場の強さ H_3 の有限次の多項式にはなっていないことが知られている。しかしここでは H_3 が微小量であることを仮定し、その2次までの作用を決定しよう。

b_2 の運動項は H_3 の二次で与えられるとするのが自然であろう。そこで (190) にそのような項を加えた次の作用を仮定しよう。

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(a * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2} H_3 \wedge A_3 + A_6 \right) \quad (195)$$

ただし a はこれから決める定数である。

2.6 b_2 の作用

ゲージ場 b_2 は M2-ブレーンの境界と電氣的に結合するが、それでは b_2 と磁氣的に結合するものはなんだろうか。 b_2 の場の強さは 6 次元時空上の 3-フォーム場 H_3 である。従ってその双対場 \tilde{H}_3 もやはり 3 形式である。ということは、磁氣的な物体も M2-ブレーンの境界と同じ空間 1 次元的な広がりを持つということになる。しかし、そのようなものは M5-ブレーン上には M2-ブレーンの境界以外見当たらない。

実は、 b_2 は自己双対な場であり

$$\tilde{H}_3 = H_3 \quad (196)$$

が成り立つことが知られている。 [10] 従って電氣的なチャージと磁氣的なチャージの間に区別はなく、M2-ブレーンの境界だけが b_2 に対してチャージを持つ。(より正確にいうと、 b_2 と単位電荷の結合項の係数と、 \tilde{b}_2 と単位磁荷の結合項の係数が一致するように b_2 と \tilde{b}_2 を規格化したときに (196) が成り立つ。)

(196) のような関係を満足する場を表す作用を与えることは一般には難しい。そこでここでは条件 (196) を手で課す簡便法を用いよう。このような方法を取る場合、作用に含まれる H_3 には (196) の条件は課されていないものとし、運動方程式を求めたあとで、運動方程式に含まれる H_3 に対して上記の条件が課される。これが矛盾なく行えるためには、 H_3 が満足すべき運動方程式と、 \tilde{H}_3 が満足すべき運動方程式が同じである必要がある。すなわち、§2.1 で行ったような電磁双対変換を行って \tilde{H}_3 に対する作用を求めたときに、それがもとの H_3 に対する作用と同じになっていなければならない。この条件により、作用に含まれる係数 a を決定することができる。 [8]

H_3 に対する電磁双対変換は以下のように行う。もともと H_3 はビアンキ恒等式 (194) を満足しなければならないが、これが自動的に成り立つように作用 (195) を次のように書き換えておく。

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(a * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2} H_3 \wedge A_3 + A_6 \right) + \frac{h}{l_p^6} \int \frac{1}{2} \tilde{b}_2 \wedge (dH_3 - K_4). \quad (197)$$

\tilde{b}_2 はラグランジュ未定乗数であり、これに対する運動方程式として H_3 のビアンキ恒等式が得られる。従って作用 (197) に含まれる H_3 はビアンキ恒等式が課されていない自由な場として取り扱うことができる。(197) を H_3 によって変分することで運動方程式を求めると、

$$2a * H_3 - \frac{1}{2} A_3 - \frac{1}{2} d\tilde{b}_2 = 0 \quad (198)$$

が得られる。従って、

$$\tilde{H}_3 = d\tilde{b}_2 + A_3 \quad (199)$$

を定義すれば、

$$H_3 = \frac{1}{4a} * \tilde{H}_3 \quad (200)$$

が得られる。これを (197) に代入すると、

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(\frac{1}{16a} * \tilde{H}_3 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{2} \tilde{H}_3 \wedge A_3 + A_6 \right) \quad (201)$$

これが(195)を電磁双対変換して得られた \tilde{H}_3 に対する作用である。(195)と(201)を比較すれば、 $a = 1/4$ の時にまったく同じ形になることがわかる。従って、 H_3 の作用は次のように決まる。

$$S = \frac{\hbar}{l_p^6} \int \left(\frac{1}{4} * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2} H_3 \wedge A_3 + A_6 \right) \quad (202)$$

(ただし以前に述べたように、ここでの解析では H_3 について高次の項を無視していることを注意しておこう。)

2.7 ブレーンの束縛状態

M5-ブレーン上のゲージ場 b_2 の作用(202)の中で A_3 を含む項に注目しよう。 A_3 を含まない項や A_3 の二次の項を無視し、1次の項に注目すると、次のように A_3 と場の強さ H_3^0 との結合を表す項が存在する。

$$S = \frac{\hbar}{l_p^6} \int \frac{1}{2} (H_3^0 + *H_3^0) \wedge A_3 = \frac{\hbar}{l_p^6} \int H_3^0 \wedge A_3 \quad (203)$$

(二つ目の等号で H_3 に対する自己双対条件を用いた。)この相互作用の存在は、M5-ブレーン上のフラックス H_3^0 が0でない場合にはM2-ブレーンのチャージが現れることを意味している。言い換えると、フラックスがその上にあるM5-ブレーンは、M2-ブレーンとM5-ブレーンの束縛状態とみなすことができる。

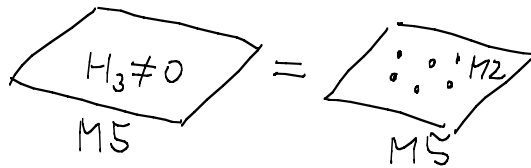


図 8: M5-ブレーンとM2-ブレーンの束縛状態

A_3 とM2-ブレーン1枚の結合は(184)によって与えられる。これと(203)を比較すれば、M5-ブレーンのフラックスが存在したときに、それが何枚のM2-ブレーンに相当するかが分かる。その枚数は

$$n = \frac{1}{l_p^3} \int_M H_3^0 \quad (204)$$

によって与えられる。 b_2 とM2-ブレーンの端の結合が(186)によって与えられることから、 H_3 に対するフラックスの量子化条件は M がコンパクトであれば n が整数であることを保証する。この整数値は M と交差するM5-ブレーン中のM2-ブレーンの枚数と解釈することができる。

M5-ブレーンとM2-ブレーンが本当に束縛状態を作るかどうかは、M5-ブレーンとM2-ブレーンが別々に存在した場合と、M2-ブレーンがM5-ブレーンに吸収されてフラックスに化けた場合の、どちらのエネルギーが低いかにによって決まる。これについてはあとで具体的な計算を行い、M5-ブレーンの中にM2-ブレーンが吸収されたほうがエネルギー的に得であることを確認する。

2.8 理論の一意性

11 次元の超重力理論の作用は、低エネルギーにおいて重要ではない高階微分の項を除けば、場の再定義による書き換えの自由度を除き、一意的であると考えられている。(高階微分項についてはまだ良くわかっていないので、ここでは無視する。)しかしブレーンの存在まで考慮すると、ブレーンのチャージがパラメータとして現れるため、理論が一意的であるかどうかは自明ではなくなる。

ここまではブレーンのチャージが 1 であるとして話をしてきたが、もしブレーンのチャージを他の値にも取ることができて、その自由度を、超重力理論の作用を変化させないような場の再定義によって吸収することができなければ、それは異なる理論であるとみなさなければならない。この場合には、M-理論がブレーンのチャージをパラメータとして持つことになる。

このようなことがありえるのかどうかを見るために、仮に M2 ブレーンのチャージを q とおいてみよう。この場合、ディラックの量子化条件があるために、M5-ブレーンのチャージは $1/q$ となる。すなわち、ブレーンとゲージ場の結合が次のように与えられる。

$$S_{M2} = q \frac{\hbar}{l_p^3} \int_{M2} A_3, \quad S_{M5} = \frac{1}{q} \frac{\hbar}{l_p^6} \int_{M5} A_6. \quad (205)$$

ここから出発して、前の節で行った議論を繰り返してみよう。

M5-ブレーンに端を持つ M2-ブレーンの作用がゲージ不変になるためには、M5-ブレーン上の場 b_2 を導入する必要がある。この場と M2-ブレーンの端の結合は以前と同じように定義しよう。

$$\frac{1}{l_p^3} \int_{\partial M2} b_2 \quad (206)$$

すなわちこの式によって b_2 の規格化を定める。M2-ブレーンの作用が A_3 ゲージ変換の元で不変であるためには場の A_3 ゲージ変換が

$$\delta A_3 = d\Lambda_2, \quad \delta A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4, \quad \delta b_2 = -q\Lambda_2 \quad (207)$$

でなければならない。ということは、ゲージ不変な b_2 の場の強さおよびそのピアンキ恒等式は

$$H_3 = db_2 + qA_3, \quad dH_3 = qK_4. \quad (208)$$

である。一方 M5-ブレーンの作用がゲージ不変であるためには、

$$S = \frac{1}{q} \frac{\hbar}{l_p^6} \int \left(A_6 + \frac{1}{2q} H_3 \wedge A_3 \right) \quad (209)$$

となる必要がある。さらに b_2 の運動項を付け加えよう。

$$S = \frac{\hbar}{l_p^6} \int \left(a * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2q^2} H_3 \wedge A_3 + \frac{1}{q} A_6 \right) \quad (210)$$

係数 a は b_2 に対する電磁双対変換を行って得られる作用

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(\frac{1}{16aq^6} * \tilde{H}_3 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{2q^2} \tilde{H}_3 \wedge A_3 + \frac{1}{q} A_6 \right) \quad (211)$$

がもとの作用と同じになるという条件から次のように定まる。

$$a = \frac{1}{4q^3}. \quad (212)$$

すなわち、M5-ブレーンの作用が

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(\frac{1}{4q^3} * H_3 \wedge H_3 + \frac{1}{2q^2} H_3 \wedge A_3 + \frac{1}{q} A_6 \right) \quad (213)$$

となる。

ここで、M5-ブレーンの上のフラックスが帯びる M2-ブレーンチャージがどのように量子化されているかを見てみよう。そのためにこの作用から、 A_3 とフラックスの結合の項を抜き出せば

$$S = \frac{h}{l_p^6} \int \left(\frac{1}{2q^2} * H_3 + \frac{1}{2q^2} H_3 \right) \wedge A_3 = \frac{h}{l_p^6} \frac{1}{q^2} \int H_3^0 \wedge A_3 \quad (214)$$

となる。このことは、フラックス 1 本あたりの M2-ブレーンチャージが $1/q^2$ であることを意味している。これが最初に仮定した M2-ブレーンチャージの量子化の最小単位 q と矛盾してはならない。もっとも自然なのは、これらの量子化の最小単位が一致している場合である。そのときには

$$q = \pm 1 \quad (215)$$

である必要がある。すなわち、M-理論においてはブレーンのチャージを自由にとることは許されず、ブレーンの向き付けをどのように選ぶかという選択肢しか残されていない。

3 超対称性と BPS-bound

3.1 超対称代数

11 次元超重力理論は、超対称性のほかに、一般座標変換のもとでの不変性やゲージ場 A_3 および A_6 に関するゲージ対称性を持っている。これらは独立に存在しているわけではなく、互いに関係している。つまり、二つの変換の交換関係をとると、別の対称性が現れるということが起こる。ここでは特に超対称性に注目し、その交換関係としてどのような変換が現れるかを見てみよう。

まず、11 次元超重力理論が持っていた超対称変換以外の対称性をまとめておこう。

- 一般座標変換

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon) e_\mu^m = D_\mu \epsilon^m, \quad \delta_{\text{gc}}(\epsilon) A_{\mu\nu\rho} = \epsilon^\lambda K_{\lambda\mu\nu\rho}, \quad \delta_{\text{gc}}(\epsilon) A_6 = \epsilon^\mu K_{\mu[6]}^0 + \frac{1}{2} \epsilon^\mu A_{\mu[2]} \wedge K_4 \quad (216)$$

ただし $K_4^0 = dA_6$ である。

- 局所ローレンツ変換

$$\delta_M(\lambda_{mn})e_\mu^m = e_\mu^n \lambda_n^m, \quad \delta_M(\lambda_{mn})A_3 = 0, \quad \delta_M(\lambda_{mn})A_6 = 0. \quad (217)$$

- A_3 ゲージ変換

$$\delta_{A_3}(\Lambda_2)e_\mu^m = 0, \quad \delta_{A_3}(\Lambda_2)A_3 = d\Lambda_2, \quad \delta_{A_3}(\Lambda_2)A_6 = -\frac{1}{2}\Lambda_2 \wedge K_4. \quad (218)$$

- A_6 ゲージ変換

$$\delta_{A_6}(\Lambda_5)e_\mu^m = 0, \quad \delta_{A_6}(\Lambda_5)A_3 = 0, \quad \delta_{A_6}(\Lambda_5)A_6 = d\Lambda_5 \quad (219)$$

以下では超対称変換の交換関係をボゾン場 e_μ^m 、 A_3 、 A_6 の上で計算する。その結果、以下の代数が満足されることを見る。

$$\frac{1}{2}[\delta_Q(\xi_2), \delta_Q(\xi_1)] = \delta_{\text{gc}}(\epsilon^m) + \delta_{A_3}(\Lambda_2) + \delta_{A_6}(\Lambda_5) + \delta_M(-\xi_2 K_k^m \xi_1). \quad (220)$$

ただし、以下の量を定義した。

$$\epsilon^m = -(\xi_2 \gamma^m \xi_1), \quad (221)$$

$$(K_{mn})_{ab} = \frac{1}{3 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} (\gamma^{\mu\nu\rho\sigma})_{mn}{}_{ab} + \frac{2}{3 \cdot 2!} K_{\mu\nu mn} (\gamma^{\mu\nu})_{ab}, \quad (222)$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = -(\xi_2 \gamma_{\mu\nu} \xi_1), \quad (223)$$

$$\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma\tau} = -(\xi_2 \gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau} \xi_1). \quad (224)$$

あとでこの代数を変換を生成する演算子の間の反交換関係として書き換えるが、そこから状態のエネルギーやチャージに対する重要な条件を得ることができる。

まず、 e_μ^m の上で二回超対称変換を行うと、

$$\begin{aligned} \delta_Q(\xi_2)\delta_Q(\xi_1)e_\mu^m &= \delta_Q(\xi_2)(2\xi_1 \gamma^m \psi_\mu) \\ &= -2(D_\mu \xi_2) \gamma^m \xi_1 + \frac{1}{12} \xi_2 K_4 \gamma_\mu \gamma^m \xi_1 - \frac{1}{4} \xi_2 \gamma_\mu K_4 \gamma^m \xi_1 \end{aligned} \quad (225)$$

となる。交換関係は、この変換から ξ_1 と ξ_2 を入れ替えたものを引けば得られる。

$$[\delta_Q(\xi_2), \delta_Q(\xi_1)]e_\mu^m = 2D_\mu \epsilon^m + e_\mu^k (-\xi_2 K_k^m \xi_1). \quad (226)$$

これは e_μ^m の上で交換関係 (220) が成り立つことを意味している、

次に、反対称テンソル場 A_3 の上での代数を見てみよう。超対称変換を二回行った結果は

$$\begin{aligned} \delta_Q(\xi_2)\delta_Q(\xi_1)A_{\mu\nu\rho} &= \delta_Q(\xi_2)(2(\xi_1 \gamma_{\mu\nu} \psi_\rho) + 2(\xi_1 \gamma_{\nu\rho} \psi_\mu) + 2(\xi_1 \gamma_{\rho\mu} \psi_\nu)) \\ &= -2(D_\mu \xi_2 \gamma_{\nu\rho} \xi_1 + D_\nu \xi_2 \gamma_{\rho\mu} \xi_1 + D_\rho \xi_2 \gamma_{\mu\nu} \xi_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\xi_2 K_4 \gamma_{\mu\nu\rho} \xi_1 - \xi_2 \gamma_\mu K_4 \gamma_{\nu\rho} \xi_1 - \xi_2 \gamma_\nu K_4 \gamma_{\rho\mu} \xi_1 - \xi_2 \gamma_\rho K_4 \gamma_{\mu\nu} \xi_1) \end{aligned} \quad (227)$$

であり、 ξ_1 と ξ_2 を入れ替えたものとの差を取ると、最終的に次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\delta_Q(\xi_2), \delta_Q(\xi_1)]A_3 &= \epsilon^\mu K_{\mu[3]} + d\Lambda_2 \\ &= \delta_{\text{gc}}(\epsilon^\mu)A_3 + \delta_{A_3}(\Lambda_2)A_3 \end{aligned} \quad (228)$$

これも A_3 上で (220) が成り立つことを意味している。

A_6 ゲージ変換 δ_{A_6} に関する情報を得るためには A_6 の超対称変換を考えればよい。そのために必要になる A_6 の超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_{A_6} = -2(\xi\gamma_{[5]}\psi_1) + \frac{1}{2}A_3 \wedge \delta A_3 \quad (229)$$

この変観則の導出は §A に与えてある。これを用いると A_6 の上でもやはり (220) が成り立つことを確認することができる。

超対称変換を二回行うと、一般座標変換が現れたが、これは重力を含む理論においては超対称性も局所化されなければならないことを意味している。その結果超対称性に対応するゲージ場が現れるが、それがグラビティーノ ψ_μ^α に他ならない。

3.2 BPS bound

ほとんど平坦であるとみなせる背景を仮定し、その上に微小な場の励起があるような状況を考えよう。この場合には、超対称変換のパラメータ ξ^a を定数にした大域的な超対称変換を考えることができる。その生成子を Q_a としよう。 Q_a はグラスマン奇な 32 成分スピノルであり、それぞれの成分はエルミートである。変換に対する交換関係 (220) はチャージ Q_a に対して次の反交換関係が成り立つことを意味している。

$$\frac{1}{2}\{Q_a, Q_b\} = -(\gamma_m)_{ab}P^m - \frac{1}{2}(\gamma_{mn})_{ab}Z^{mn} - \frac{1}{5!}(\gamma_{mnpqr})_{ab}Z^{mnpqr} \quad (230)$$

ただし、 P^m は運動量演算子、 Z^{mn} と Z^{mnpqr} は A_3 と A_6 に対するチャージで、中心電荷と呼ばれる。それぞれ次の次元を持つ。

$$Q_a : [L^{-1/2}], \quad P_\mu : [L^{-1}], \quad Z^{\mu\nu} : [L^{-1}], \quad Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau} : [L^{-1}]. \quad (231)$$

P_μ の次元が $[M]$ ではないことに注意しよう。そのため、エネルギーを得るためにはプランク定数を掛けて $E = \hbar P^0$ とする必要がある。(220) の右辺に存在した局所ローレンツ変換は $K_4 = 0$ の背景を考えているのでここでは無視することができる。

(230) から、その右辺に現れるチャージに対しての重要な関係式を導くことができる。ここではスピノルに対して $(\gamma^0)^{ab} = \delta^{ab}$ であるような基底を用いることにする。

(230) の両辺に $(\gamma^0)^{ab}$ を掛けてスピノル添え字を縮約すれば、

$$Q_a Q_a = -(\gamma^0)^{ab}(\gamma_m)_{ab}P^m = \text{tr}(\gamma^0 \gamma_m)P^m = 32P^0 \quad (232)$$

が得られる。この両辺を任意の状態 $|s\rangle$ ではさむと、

$$\sum_a |Q_a|s\rangle|^2 = 32\langle s|P^0|s\rangle \quad (233)$$

となる。つまり、エネルギー $E = \hbar P^0$ の期待値は負にはならない。これは超対称性を持つ理論の一般的な性質である。

次に、行列

$$P_{\pm}^{ab} = \frac{1}{2}[(\gamma^0)^{ab} \mp (\gamma^{12})^{ab}] = \frac{1}{2}(\gamma^0)^{ac}(1 \pm \gamma^{012})_c^b \quad (234)$$

を両辺に掛けてみよう。 γ^{012} は二乗すると 1 になり、+1 固有値と -1 固有値を 16 個ずつ持つ行列であるから、 P_{\pm}^{ab} は非負の行列である。従って、左辺に対して、

$$\langle s|P_{\pm}^{ab}\{Q_a, Q_b\}|s\rangle \geq 0 \quad (235)$$

が成り立つ。一方右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\gamma^0 \mp \gamma^{12})^{ab}(-\gamma_m P^m - \frac{1}{2}\gamma_{mn}Z^{mn})_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}(\gamma^0 \mp \gamma^{12})(\gamma_m P^m + \frac{1}{2}\gamma_{mn}Z^{mn}) \\ &= 16(P^0 \pm Z^{12}) \end{aligned} \quad (236)$$

従って、期待値の意味で、次の関係式が成り立つ。

$$P^0 \pm Z^{12} \geq 0. \quad (237)$$

これがどちらの符号に対しても成り立たなければならないので、

$$P^0 \geq |Z^{12}| \quad (238)$$

を得る。このように、中心電荷を持つものは最低でもその絶対値に等しいエネルギーを持つ。

Z^{12} が 0 でない値を持つような状態を考えよう。 $P^0 = |Z^{12}|$ を満足する状態が存在すれば、不等式 (238) よりその状態は安定である。このような状態のことを BPS 状態と呼ぶ。

Z^{ij} は、ゲージ場 A_3 に対するカレントを

$$S = \frac{1}{3!} \int d^{11}x A_{\mu\nu\rho} J^{\mu\nu\rho} \quad (239)$$

によって定義したとき J^{0ij} の空間積分として定義される。

$$Z^{12} = \int d^{10}x J^{0ij} \quad (240)$$

(239) を (158) に与えた M2-ブレーンと A_3 の結合項に比較することにより、1-2 方向に伸びた M2-ブレーンがチャージ Z^{12} を持つことが分かる。もし 1-2 方向に伸びた面積 A の

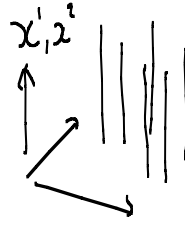


図 9:

M2-プレーンが N 枚あれば、

$$Z^{12} = \pm NA \frac{1}{l_p^3} \quad (241)$$

である。(符号はプレーンの向きによって決まる。)一方、プレーン 1 枚あたりの張力を T_{M2} とすれば、エネルギーは

$$P^0 = NAT_{M2} \quad (242)$$

となる。従って、M2-プレーンが BPS であることを仮定すれば、その張力は

$$T_{M2} = \frac{hP^0}{NA} = \frac{h|Z^{12}|}{NA} = \frac{h}{l_p^3} \quad (243)$$

となる。まったく同様にして、M5-プレーンが BPS であることを仮定すればその張力は次のようになる。

$$T_{M5} = \frac{h}{l_p^6} \quad (244)$$

N 枚の M2-プレーンが平行に置かれているとき、プレーンのチャージ Z^{12} はプレーンの位置 (プレーン間の距離) には依存しない。もしプレーンが BPS であるとする、エネルギーもプレーン間の距離に依存しないはずである。このことは、プレーン間に力が働かないことを意味している。プレーンはエネルギーを持つので、それらの間には必ず重力が働くはずであるが、BPS である場合には、それがプレーンの持つチャージによるクーロン力によって丁度打ち消される。このことを用いてもプレーンのチャージと張力の関係を求めることができる。実際に確認しておこう。ここでは背景時空はほとんど平坦であり、ニュートン近似を用いることができると仮定する。

まず、クーロン力による引力を計算しよう。4 次元の電磁気学においては、電荷 q_1 と q_2 の間に働く力は

$$F(r) = \frac{q_1 q_2}{\epsilon f(r)}, \quad f(r) = 4\pi r^2 \quad (245)$$

と与えられる。ここで、 q_1 と q_2 は、ゲージ場とそれぞれの荷電粒子との相互作用を表わす作用

$$S = q \int A_1 \quad (246)$$

の係数であり、誘電率 ϵ は電磁場の作用

$$S = \int d^4x \left(-\frac{\epsilon}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (247)$$

の係数として定義することができる。また $f(r)$ は電荷を取り囲む半径 r の球面の面積である。これを拡張することで M2-ブレーンの間のクーロン力を計算することができる。11次元超重力理論の作用 (4) を見ると、誘電率 ϵ に相当するのは h/l_p^9 であることがわかる。また、ブレーンとゲージ場の結合 (158) より $q_i = h/l_p^3$ が読み取れる。従ってクーロン力は

$$F(r) = \frac{hl_p^3}{\Omega_7 r^7}, \quad \Omega_7 = \frac{\pi^4}{3} \quad (248)$$

と与えられる。ただし Ω_7 は半径 1 の S^7 の体積である。ブレーンは広がりを持っているため、これは単位面積あたりのクーロン力と解釈される。

重力のポテンシャルについても同様に計算することができる。ここではニュートン近似を用いているので、平行におかれた M2-ブレーンの間の重力はクーロン力と同様に計算することができる。その際 ϵ の代わりにアインシュタイン作用の前の係数 h/l_p^9 を、 q_i の代わりに二枚のブレーンの張力 T_{M2} を用いればよい。

$$F(r) = -\frac{T_{M2}^2 l_p^9}{\Omega_7 r^7 h} \quad (249)$$

これがクーロンポテンシャルと相殺するはずであるという BPS 状態の性質を用いれば、M2-ブレーンの張力 (243) が得られる。M5-ブレーンの張力 (244) についてもこの方法で導出することもできる。

3.3 BPS 状態における超対称性

BPS 状態は、超対称性を部分的に残すという重要な性質を持つ。すなわち、

$$\xi^a Q_a |s\rangle = 0 \quad (250)$$

を満たすような ξ^a が存在する。たとえば $P^0 = Z^{12}$ であるような状態 $|s\rangle$ の場合を考えてみよう。この場合、

$$\frac{1}{2} \langle s | \{Q_a, Q_b\} | s \rangle = P^0 (-\gamma_0 - \gamma_{12})_{ab} = -P^0 (\gamma_0)_a^c (1 + \gamma^{012})_{cb} \quad (251)$$

であるが、 ξ^a と ξ^b を両辺に掛けると

$$\left| \xi^a Q_a |s\rangle \right|^2 = P^0 \xi \gamma_0 (1 + \gamma^{012}) \xi \quad (252)$$

が得られる。従って (250) が成り立つための必要十分条件として

$$(1 - \gamma_{012}) \xi = 0 \quad (253)$$

が得られる。この条件は、スピノル ξ に対して 32 個の成分のうちある特定の 16 個の成分が 0 であるという条件を課す。つまり、32 個の超対称性のうちその半分、16 個の超対称

変換は破れており、残る超対称性が 16 個であることを意味している。このような BPS 状態は 1/2 BPS であるといわれる。

もしブレーンの向きが逆で、 $Z^{12} = -P^0$ であれば、残る超対称性の条件は $(1 + \gamma_{012})\xi = 0$ となり、残る超対称性と破れる超対称性が逆になる。

M5-ブレーンについても全く同様なことがいえる。例えば 12345 方向に広がった BPS な M5-ブレーンについて、

$$(1 \pm \gamma_{012345})\xi = 0 \quad (254)$$

を満足するパラメータによって与えられる半分の超対称性が破れずに残る。ただし符号はブレーンの向きによって定まる。

より少ない超対称性が残る状態も存在する。例として、12 方向の M2-ブレーンと 13456 方向の M5-ブレーンを含む系 (図 10) を考えよう。このようなブレーンが存在する状態を

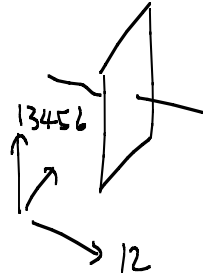


図 10: M5-ブレーンと M2-ブレーンよりなる 1/4 BPS のブレーン系の例

$|s\rangle$ とする。このとき、超対称代数の式 (230) の両辺を $|s\rangle$ ではさむと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle s|\{Q_a, Q_b\}|s\rangle &= (-\gamma_0 P^0 - \gamma_{12} Z^{12} - \gamma_{13456} Z^{13456})_{ab} \\ &= (\gamma^0)_a{}^c (P^0 - \gamma_{012} Z^{12} - \gamma_{013456} Z^{13456})_{cb} \end{aligned} \quad (255)$$

この両辺に $\xi^a \xi^b$ を掛けると、

$$\left| \xi^a Q_a |s\rangle \right|^2 = -\xi(\gamma^0)(P^0 - \gamma_{012} Z^{12} - \gamma_{013456} Z^{13456})\xi \quad (256)$$

この式の左辺は非負であるから、右辺に現れる行列も非負でなければならない。ここで、行列 γ_{012} と γ_{013456} が可換であり、同時対角化可能であること、それぞれが 16 個ずつ ± 1 固有値を持つこと、などを用いると、

$$P^0 \pm Z^{12} \pm Z^{13456} \geq 0 \quad (257)$$

が全ての符号 (4 通り) に対して成り立たなければならない。すなわち、 P^0 に対して次の制限が得られる。

$$P^0 \geq |Z^{12}| + |Z^{13456}|. \quad (258)$$

等号が成り立つ場合には、状態は BPS であり、破れずに残る超対称性が存在する。残る超対称性のパラメータ ξ に対する条件は

$$(P^0 - \gamma_{012} Z^{12} - \gamma_{013456} Z^{13456})\xi = 0. \quad (259)$$

によって決まる。 ξ のどの成分が残るかは電荷の符号に依存する。例えば Z^{12} と Z^{13456} がどちらも正である場合を考えよう。(259) に現れる行列は非負であるから、最も小さい固有値に対応する ξ に対して (259) が成り立つ。すなわち、

$$\gamma_{012}\xi = \xi, \quad \gamma_{013456}\xi = \xi. \quad (260)$$

という二つの条件が満たされる必要がある。これは 32 個の ξ の成分のうち 8 個の成分だけがこの条件を満足する。従ってこの BPS 状態は 1/4 BPS 状態である。

3.4 束縛状態

より非自明な例として、12 方向に広がった M2-ブレーンと 12345 方向に広がった M5-ブレーンを含む状態を考えてみよう。(図 11) 今度は、それぞれのブレーンの超対称性の

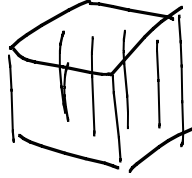


図 11: M5-ブレーンと M2-ブレーンよりなる系の例

条件は

$$(1 \pm \gamma_{012})\xi = 0, \quad (1 \pm \gamma_{012345})\xi = 0 \quad (261)$$

となるが、これらは両立しない。(二つの行列が可換ではない。) γ_{012} と γ_{012345} は反可換であり、どちらも二乗すると +1 になる。ディラック行列を適当に選ぶと、次のように行列表示することができる。

$$\gamma_{012} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{16} & \\ & \mathbf{1}_{16} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{012345} = \begin{pmatrix} & \mathbf{1}_{16} \\ \mathbf{1}_{16} & \end{pmatrix}, \quad (262)$$

このとき

$$\begin{aligned} |\xi^a Q_a |s\rangle|^2 &= \xi_a (\gamma^0)^{ab} (P^0 - \gamma_{012} Z^{12} - \gamma_{012345} Z^{12345})_b{}^c \xi_c \\ &= \xi^T \begin{pmatrix} (P^0 - Z^{12})\mathbf{1}_{16} & -Z^{12345}\mathbf{1}_{16} \\ -Z^{12345}\mathbf{1}_{16} & (P^0 + Z^{12})\mathbf{1}_{16} \end{pmatrix} \xi. \end{aligned} \quad (263)$$

この式の左辺が必ず非負であることから、右辺の行列の二つの固有値はどちらも非負でなければならない。この行列を対角化すると、その対角成分には次の二つの固有値が 16 個ずつ現れる。

$$\lambda_{\pm} = P^0 \pm \sqrt{(Z^{12})^2 + (Z^{12345})^2}. \quad (264)$$

上で述べたように、 λ_{\pm} はどちらも非負でなければならないから、次の不等式が得られる。

$$P^0 \geq \sqrt{(Z^{12})^2 + (Z^{12345})^2} \quad (265)$$

この式において等号が成り立つ場合が BPS 状態である。先ほどとは異なり、BPS 状態のエネルギーはそれぞれのブレーンが単独で存在した場合のエネルギーの和 $|Z^{12}| + |Z^{12345}|$ よりも小さくなっている。このことは、二種類のブレーンが束縛状態をなしていることを意味している。

BPS 状態においては λ_{\pm} の片方が 0 であるため、(263) の右辺の行列のランクは 16 であり、(263) を 0 にするような ξ 、すなわち破れてない超対称変換のパラメータは 16 個の独立成分を持つ。従ってここで考えた BPS 状態は 1/2 BPS 状態である。この束縛状態において残る超対称性は、二種類のブレーンのうちの片方が存在したときに残る超対称性とは異なる。

具体的に束縛状態のブレーンのエネルギーを計算してみよう。エネルギーを有限にするために、M5 ブレーンの広がっている方向 x^i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) を長さ L_i でコンパクト化しておく。M5-ブレーンは 1 枚だけ、1, 2 方向に広がった M2-ブレーンは n 枚あるとしておこう。このとき、中心電荷は次のように与えられる。

$$Z^{12} = \frac{nL_1L_2}{l_p^3}, \quad Z^{12345} = \frac{L_1L_2L_3L_4L_5}{l_p^6}. \quad (266)$$

このとき、BPS 状態のエネルギーは (265) より

$$E = hP^0 = h\sqrt{(Z^{12})^2 + (Z^{12345})^2} = \frac{hL_1L_2L_3L_4L_5}{l_p^6} \sqrt{1 + \left(\frac{nl_p^3}{L_3L_4L_5}\right)^2} \quad (267)$$

となる。M5-ブレーンに吸収された M2-ブレーンの密度を

$$\rho = \frac{n}{L_3L_4L_5} \quad (268)$$

によって定義すれば、束縛状態のエネルギー密度は

$$\mathcal{E} = \frac{h}{l_p^6} \sqrt{1 + \rho^2} = \frac{h}{l_p^6} + \frac{h\rho^2}{2} + \mathcal{O}(\rho^4) \quad (269)$$

によって与えられる。この式の右辺の展開は ρ が小さいときにより近似となる。第 1 項の h/l_p^6 は M5-ブレーンの張力であり、第 2 項の $h\rho^2/2$ は M2-ブレーンを吸収したことによるエネルギーの増加分である。

§2.7 において述べたように、M5-ブレーン上のフラックス $H_{\mu\nu\rho}$ は M5-ブレーンに吸収された M2-ブレーンの量を表すとみなすことができる。より正確には、M5-ブレーン上のある閉じた 3 次元曲面上の積分

$$n = \frac{1}{l_p^3} \oint H_3 \quad (270)$$

はフラックスの量子化条件より整数であり、その曲面と交差する M2-ブレーンの枚数をあらわすとみなすことができる。従って、ここで考えている束縛状態では

$$\rho = \frac{1}{l_p^3} H_{345} \quad (271)$$

とみなすことができる。(202) に与えた H_3 の作用からエネルギー密度を計算すると

$$\mathcal{E} = \frac{h}{4l_p^6} (H_{012}^2 + H_{345}^2) \quad (272)$$

となるが、 H_3 が自己双対であることを用いればこれは $hH_{345}^2/(2l_p^6)$ に等しく、(271) を用いれば (269) の右辺第 2 項に一致する。

4 超場形式

4.1 超空間

11 次元超重力理論の作用 (4) はそれが超対称性のもとで不変であることをチェックするだけでも面倒である。(ψ_μ^4 の項まで考慮するとなるとなおさらである。) 超場形式はこの問題を解消するために開発された方法である。この節では [26, 27] において構成された超場を用いた 11 次元超重力理論について解説する。超場形式による超重力理論の基本的なアイデアは、時空の座標として x^μ に加えてグラスマン的なスピノル座標 θ^α を導入し、

$$z^M = (x^\mu, \theta^\alpha) \quad (273)$$

によって張られる超空間上の関数として全ての場を表すというものである。添え字の使い方は表 1 のように約束しておく。超対称性はこの超空間上での一般座標変換として実現さ

表 1: 添え字の使い方のまとめ

	全て	ボゾン部分	フェルミオン部分
大域座標	M, N, \dots	μ, ν, \dots	α, β, \dots
局所座標	A, B, \dots	m, n, \dots	a, b, \dots

れる。超空間上での無限小一般座標変換

$$z^M = z'^M + \epsilon^M \quad (274)$$

のパラメータ ϵ^M から、超空間上の多脚場を E_M^A を用いて局所座標添え字を持つベクトル ϵ^A を定義する。

$$\epsilon^A = \epsilon^M E_M^A = (\epsilon^m, \epsilon^a) \quad (275)$$

ϵ^A の成分のうちボゾンの成分を ϵ^m 、フェルミオンの成分を ϵ^a とした。 ϵ^m は 11 次元時空上の一般座標変換のパラメータである。それに対して ϵ^a は超対称変換とみなすことができる。一般座標変換の元での不変性はテンソルの添え字が正しく縮約されているなどの条件が満足されれば自動的に成り立つから、超場形式による定式化においては理論の超対称性は簡単に確認することができる。

x^μ と θ^α はそれぞれ $[L]$ および $[L^{1/2}]$ の次元を持つとしよう。すると、多脚場のそれぞれの成分の次元は次のようになる。

$$E_\mu{}^m : [1], \quad E_\mu{}^a : [L^{-1/2}], \quad E_\alpha{}^m : [L^{1/2}], \quad E_\alpha{}^a : [1]. \quad (276)$$

以下では、 x^μ によって張られる空間を実空間、 z^M によって張られる空間を超空間と読んで区別することにする。

11 次元の超重力理論を実現するためには、超空間上に多脚場 $E_M{}^A(z)$ と反対称テンソル場 $A_{MNP}(z)$ を導入する。これらは以前に超重力理論を記述する際に用いた実空間上の場 $e_\mu{}^a(x)$ 、 $\psi_\mu{}^a$ 、 $A_{\mu\nu\rho}$ と次の関係にある。

$$E_\mu{}^m(z) = e_\mu{}^m + \mathcal{O}(\theta), \quad E_\mu{}^a(z) = \psi_\mu{}^a + \mathcal{O}(\theta), \quad A_{\mu\nu\rho}(z) = A_{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\theta). \quad (277)$$

超場はこれら以外にも多くの成分を持つ。超重力理論を与えるには、余分な自由度を取り除くために超場に対して拘束条件を課す必要がある。超場形式を用いた超重力理論において最も面倒なのは、拘束条件を解いて独立な自由度がどれだけであることを示すことである。

4.2 超空間上の演算規則

テンソルの成分はその添え字によって統計性が異なるので、順序に注意する必要がある。例えば二つのベクトル X^M と Y^N に対して次の式が成り立つ。

$$X^M Y^N = (-)^{MN} Y^N X^M. \quad (278)$$

ただし $(-)^{MN}$ という記号において M および N はその添え字がグラスマン偶のとき 0、グラスマン奇のとき 1 を表すものと解釈する。すなわち $(-)^{MN}$ は M と N がどちらもグラスマン奇のときは -1 、それ以外のときは $+1$ を表す。多脚場の添え字の順序は $E_M{}^A$ を採用する。($E^A{}_M$ ではない。) その逆行列は $E_A{}^M$ であり、

$$E_A{}^M E_M{}^B = \delta_A{}^B \quad (279)$$

によって定義する。大域添え字と局所添え字の変換は、

$$v_M = E_M{}^A v_A, \quad v_A = E_A{}^M v_M \quad (280)$$

のように行う。つまり、スピノル添え字の縮約の場合と同様に、縮約する添え字が左上と右下に位置するように行う。テンソルの添え字の上げ下げについては

$$T_{MN} = (-)^{(N+B)A} E_M{}^A E_N{}^B T_{AB} \quad (281)$$

のように行う。右辺に現れる符号は二つのベクトルの積の添え字の上げ下げと矛盾しないように、すなわち $T_{MN} = v_M w_N$ のときに $T_{AB} = v_A w_B$ となるように定めた。つまり、

$$\begin{aligned}
T_{MN} &= v_M w_N \\
&= E_M^A v_A E_N^B w_B \\
&= (-)^{(N+B)A} E_M^A E_N^B v_A w_B \\
&= (-)^{(N+B)A} E_M^A E_N^B T_{AB}
\end{aligned} \tag{282}$$

である。

超空間上のウェッジ積は

$$dz^M \wedge dz^N = -(-)^{MN} dz^N \wedge dz^M \tag{283}$$

と定める。つまり $d\theta^\alpha \wedge d\theta^\beta$ は α と β を入れ替えたときに統計性からの負号とウェッジ積の反対称性からの負号が現れるため、 α と β に対して対称である。

1-フォームとその成分の関係も、添え字の縮約の向きを標準の向きにとって

$$v_1 = dz^M v_M \tag{284}$$

と定義する。2-フォーム以上については、1-フォームのウェッジ積との無矛盾性から決める。例えば 2-フォームに対しては以下の式が成り立つ。

$$T_2 = (-)^{MN} \frac{1}{2} dz^M \wedge dz^N T_{MN}. \tag{285}$$

4.3 スピン接続、捩率、曲率

超空間上のスピン接続は、共変微分中に次のように現れるものとして定義する。

$$D_M v_A = \partial_M v_A + \Omega_{M-A}^B v_B. \tag{286}$$

うしろ二つの添え字を省略して行列とみなしたもの Ω_M 、1-フォーム $\Omega_A^B = dz^M \Omega_{M-A}^B$ や $\Omega = dz^M \Omega_M$ などの表現も用いる。上記の共変微分は、行列表示の 1-フォーム Ω を用いれば

$$D = d + \Omega \tag{287}$$

と表される。上付き添え字を持つベクトルの微分は次のようになる。

$$Dv^A = dv^A - v^B \Omega_B^A. \tag{288}$$

構造群、すなわち、局所座標系に作用する対称性の群は超群へは拡張せず、ローレンツ代数のままであるとする。これは必ずしもそうである必要は無く、より大きな代数を用いることもできるが、ここでは構造群として最小限必要なローレンツ群を取ることにする。

そしてボゾン成分とそれぞれのカイラリティのスピノル成分が混ざることなく変換されるものとする。このとき、スピン接続は次のようなブロック対角な形に制限される。

$$\Omega_{K-A}{}^B = \begin{pmatrix} \Omega_{K-m}{}^n & \\ & \Omega_{K-a}{}^b \end{pmatrix}. \quad (289)$$

さらに、ボゾン成分とフェルミオン成分は同じ生成子のベクトル表現とスピノル表現であり、次の関係式が成り立つ。(ここでは 1 形式場 $dz^M \Omega_M{}^A{}_B$ を用いる。)

$$\Omega_a{}^m = \Omega_m{}^a = 0, \quad \Omega_a{}^b = \frac{1}{4} \Omega_{mn} (\gamma^{mn})_a{}^b. \quad (290)$$

この式はローレンツ条件と呼ばれる。スピノルの共変微分は次のように書くことができる。

$$D_\mu \psi_a = \partial_\mu \psi_a + \frac{1}{4} (\Omega_{\mu mn} \gamma^{mn})_a{}^b \psi_b = \partial_\mu \psi_a + \Omega_{\mu a}{}^b \psi_b \quad (291)$$

超空間上での曲率は、共変微分の交換関係、あるいは反交換関係として次のように定義される。

$$R_{MN} = D_M D_N - (-)^{MN} D_N D_M \quad (292)$$

あるいは 2-フォームとして表せば

$$R = D \wedge D = d\Omega + \Omega \wedge \Omega \quad (293)$$

となる。ローレンツ条件は曲率テンソルについても成立し、

$$R_a{}^m = R_m{}^a = 0, \quad R_a{}^b = \frac{1}{4} R_{mn} (\gamma^{mn})_a{}^b. \quad (294)$$

が成り立つ。(この式中の R は全て 2-フォームである。)

捩率は

$$T_{MN}{}^A = D_M E_N{}^A - (-)^{MN} D_N E_M{}^A \quad (295)$$

あるいは

$$T^A = DE^A = dE^A + E^B \wedge \Omega_B{}^A \quad (296)$$

によって定義される。(288) と符号が異なるのは、1-フォームの順序の入れ替えによる。曲率 R の定義より、任意のベクトル v^A に対して次の式が成り立つ。

$$RDv = (DD)Dv = D(DD)v = DRv \quad (297)$$

これは次の 3-フォームが恒等的に 0 になることを意味している。

$$I_3{}^{mn} \equiv DR^{mn} = 0. \quad (298)$$

これは(曲率に対する)ピアンキ恒等式と呼ばれる。一方、捩率に対して

$$DT^A = D(DE^A) = (DD)E^A = RE^A \quad (299)$$

が成り立つ。すなわち次の 3-フォームは恒等的に 0 である。

$$I_3^A \equiv DT^A - RE^A = 0 \quad (300)$$

これは（振率に対する）ビアンキ恒等式と呼ばれる。これらのビアンキ恒等式はあとで超場に対する拘束条件を解く際に重要な役割を果たす。

11 次元超重力理論においては三回反対称テンソル超場 $A_3(z)$ が存在するから、それに対するビアンキ恒等式を与えておこう。そのためにまず場の強さを次のように定義する。

$$K_4(z) = dA_3(z). \quad (301)$$

次の 5-フォームが恒等的に 0 であることは明らかである。

$$J_5 \equiv dK_4(z) = 0. \quad (302)$$

これが K_4 に対するビアンキ恒等式である。

超空間上の一般座標変換は実空間と同じ形

$$\delta_{\text{gc}} E_M^A = D_M \epsilon^A + \epsilon^N T_{NM}^A, \quad \delta_{\text{gc}} A_{MNP} = \epsilon^K K_{KMNP} \quad (303)$$

になる。これが超対称変換を与えることはあとで示す。

4.4 拘束条件

実空間上の多脚場 $e_\mu^m(x)$ 、グラビティーノ $\psi_\mu^a(x)$ およびスピン接続 $\omega_\mu^{mn}(x)$ そしてゲージ場 $A_{\mu\nu\rho}(x)$ は超空間上の多脚場 $E_M^A(z)$ およびスピン接続 $\Omega_M^A{}_B(z)$ 、ゲージ場 $A_{MNP}(z)$ に次のように埋め込まれる。

$$\begin{aligned} E_\mu^m|_{\theta=0} &= e_\mu^m, \\ E_\mu^a|_{\theta=0} &= \psi_\mu^a, \\ \Omega_{\mu-mn}|_{\theta=0} &= \omega_{\mu-mn}, \\ A_{\mu\nu\rho}|_{\theta=0} &= A_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (304)$$

超場はこれら以外にも多くの自由度を含んでいる。それらの自由度を取り除くには超場に対して拘束条件を課す必要がある。どのような拘束条件を課せば良いかということはアブリオリには不明であり、試行錯誤を行った結果、次のように取ればよいということが知られている。

$$T_{mn}^k(z) = T_{am}^k(z) = T_{ab}^c(z) = 0, \quad T_{ab}^k(z) = 2(\gamma^k)_{ab}. \quad (305)$$

$$K_{pqra}(z) = K_{pabc}(z) = K_{abcd}(z) = 0, \quad K_{pqab}(z) = 2(\gamma_{pq})_{ab}. \quad (306)$$

(305) に与えた条件のうち $T_{mn}{}^k(z) = 0$ は実空間上の捩率なし条件に類似しているが、実空間上の捩率には次のようにグラビティーノの寄与があることに注意しよう。

$$T_{\mu\nu}{}^k(x) = T_{\mu\nu}{}^k(z)|_{\theta=0} = (E_\nu{}^b E_\mu{}^a T_{AB}{}^k)|_{\theta=0} = 2(\psi_\mu \gamma^k \psi_\nu). \quad (307)$$

これらの拘束条件を採用することの妥当性を見る一つの方法として、このような拘束条件のもとで超空間上の一般座標変換が以前に与えた超対称変換を再現することを見ておこう。この章の最初で説明したように、実空間上の超対称性は、超空間上の一般座標変換のパラメータを

$$\epsilon^A|_{\theta=0} = (\epsilon^m, \epsilon^a)|_{\theta=0} = (0, \xi^a) \quad (308)$$

とおくことによって得られる。多脚場の成分 $E_\mu{}^m$ の一般座標変換は (303) より

$$\delta_{\text{gc}}(\epsilon^A) E_\mu{}^m = D_\mu \epsilon^m + E_\mu{}^B \epsilon^A T_{AB}{}^m. \quad (309)$$

この両辺について $\theta = 0$ とおき、拘束条件 (305) や成分場との関係 (304) および (308) を用いると、

$$\delta_{\text{ss}}(\xi) e_\mu{}^m = \psi_\mu{}^b \xi^a T_{ab}{}^m|_{\theta=0} = 2(\xi \gamma^m \psi_\mu) \quad (310)$$

となり、確かに以前に与えた変換則を再現している。

超空間上の 3-形式場の一般座標変換は (303) に与えられている。これを用いると、

$$\delta_{\text{gc}}^{(A)}(\epsilon^A) A_{\mu\nu\rho}(z) = (-)^{BA+C(A+B)+D(A+B+C)} \epsilon^A E_\mu{}^B E_\nu{}^C E_\rho{}^D K_{ABCD} \quad (311)$$

となり、ここに拘束条件等を用いることにより

$$\delta_{\text{ss}}(\xi) A_{\mu\nu\rho} = -3\xi^a \psi_{[\mu}{}^b e_\nu{}^m e_\rho]{}^n K_{abmn}|_{\theta=0} = 6\xi \gamma_{[\mu\nu} \psi_{\rho]} \quad (312)$$

これもやはり以前に与えた変換則に一致する。

$\psi_\mu{}^a$ の変換則も同様に得ることができる。(303) の $E_\mu{}^a$ についての成分を抜き出して $\theta = 0$ とおくと、

$$\delta_{\text{ss}}(\xi) \psi_\mu{}^a = D_\mu \xi^a + e_\mu{}^m \xi^b T_{bm}{}^a|_{\theta=0} \quad (313)$$

これが以前に与えた変換則を再現するためには $T_{bm}{}^a|_{\theta=0}$ が K_4 のある関数になっている必要がある。実は上で与えた拘束条件を解くと、実際にそうになっていることが以下でわかる。

4.5 拘束条件を解く

拘束条件は生の場 $E_M{}^A$ や A_{MNP} ではなく、超空間上の共変なテンソル場を用いて書かれている。そこで、拘束条件を解く際にもこれら共変なテンソルだけを用いて議論するのがよい。その場合には、これらのテンソルが従うビアンキ恒等式を考慮する必要がある。

テンソルの添え字を全て局所直交座標のものにしてビアンキ恒等式を書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
0 &= I_{ABC}{}^D \equiv (D_A T_{BC}{}^D + T_{AB}{}^E T_{EC}{}^D + R_{ABC}{}^D)|_{[ABC]}, \\
0 &= I_{ABCpq} \equiv (D_A R_{BC-pq} + T_{AB}{}^D R_{DC-pq})|_{[ABC]}, \\
0 &= J_{ABCDE} \equiv (D_A K_{BCDE} + 2T_{AB}{}^F K_{FCDE})|_{[ABCDE]}
\end{aligned} \tag{314}$$

捩率に対するビアンキ恒等式（一番目）が成り立てば曲率に対するビアンキ恒等式（二番目）は自動的に成り立つことが知られている。（Dragon の定理 [9]）従って一番目と三番目のみ考慮すれば十分である。

捩率 $T_{AB}{}^C$ と反対称テンソル K_{ABCD} の成分のうち、拘束条件によって固定されていないものは

$$T_{mn}{}^a, \quad T_{am}{}^b, \quad K_{mnpq} \tag{315}$$

である。ビアンキ恒等式を解くことで、これらが互いにどのように関係しているかを明らかにすることが目標である。

拘束条件を解く際に、その次元の低い順に解いていくのが便利である。（ここで、次元とっているのは $[L^{-d}]$ の d のことである。）考えるべきビアンキ恒等式と、それらの次元を表 2 にまとめた。

表 2: ビアンキ恒等式の次元。括弧でくくったものは拘束条件を代入すると自動的に 0 になるため考える必要の無いことを表す。

$L^{\frac{1}{2}}$	L^0	$L^{-\frac{1}{2}}$	L^{-1}	$L^{-\frac{3}{2}}$	L^{-2}	$L^{-\frac{3}{2}}$
		$(I_{abc}{}^m)$	$I_{abm}{}^n$	$I_{amn}{}^p$	$I_{mnp}{}^q$	
			$I_{abc}{}^d$	$I_{abm}{}^c$	$I_{amn}{}^b$	$I_{mnp}{}^a$
(J_{abcde})	(J_{abcdm})	(J_{abcnm})	J_{abmnp}	$J_{amn pq}$	J_{mnpqr}	

ビアンキ恒等式を解く場合、ビアンキ恒等式の「次元」を定義して、それが低い方から解いていくのがよい。ビアンキ恒等式の次元は、下付き添え字がグラスマン偶であれば $+1$ 、グラスマン奇であれば $+1/2$ を割り当てることによって定義される。上付き添え字については符号を逆にする。

次元が最も低い捩率のビアンキ恒等式は次元 $1/2$ を持つ $I_{abc}{}^m = 0$ であるが、これは拘束条件を課しておけば自動的に成り立つ。次に次元が低いのは次元が 1 の拘束条件であり、 $I_{mab}{}^n = 0$ と $I_{abc}{}^d = 0$ の二つがある。

まず、 $I_{mab}{}^p = 0$ を考えよう。これは $T_{am}{}^b$ を用いて R_{abmn} を表わす式を与える。

$$R_{abmn} = -4T_{mb}{}^c(\gamma_n)_{ca}|_{\{ab\}} \tag{316}$$

さらに、この式の m と n の対称部分に注目すると、左辺は 0 であるから次の式が得られる。

$$T_{ma}{}^c(\gamma_n)_{cb}|_{\{ab\}\{mn\}} = 0. \tag{317}$$

これを解くことで、

$$T_{ma}{}^b = (X\gamma_m + Y_{mpq}\gamma^{pq} + Y_{mpqr}\gamma^{pqr} + X^{pqr}\gamma_{mpqr} + X^{pqrs}\gamma_{mpqrs})_a{}^b \quad (318)$$

が得られる。(この計算の詳細は §B.1 に与えてある。) これを (316) に代入すれば、

$$R_{ab-mn} = (4X\gamma_{mn} - 8Y_{mnp}\gamma^p + 12Y_{mnpq}\gamma^{pq} - 4X^{pqr}\gamma_{mnpqr} + 4X^{pqrs}\gamma_{mnpqrs})_{ab} \quad (319)$$

となる。さらにビアンキ恒等式 $I_{abc}{}^d = 0$ を用いよう。これは次の式を与える。

$$[2(\gamma^m)_{ab}T_{mc}{}^d + \frac{1}{4}R_{abmn}(\gamma^{mn})_c{}^d]_{\{abc\}} = 0. \quad (320)$$

ここに (318) と (319) を代入することで次の関係式が得られる。(この計算の詳細は §B.2 に与えてある。)

$$X = X_{mnp} = Y_{mnp} = Y_{mnpq} - 8X_{mnpq} = 0. \quad (321)$$

従って、テンソル X や Y の中で残るのは 4 階反対称テンソルがただ一つだけであり、 $T_{ma}{}^b$ は次のように与えられる。

$$T_{ma}{}^b = X^{pqrs}(\gamma_{mpqrs})_a{}^b + 8X_{mpqr}(\gamma^{pqr})_a{}^b = 36(\gamma_m X_4)_a{}^b - 12(X_4 \gamma_m)_a{}^b. \quad (322)$$

反対称テンソル X_4 が何であるかを見るには反対称テンソル超場に対するビアンキ恒等式の一つ $J_{abpqr} = 0$ に (322) を代入すればよい。

$$\begin{aligned} J_{abpqr} &= (4(\gamma^m)_{ab}K_{mpqr} + 24T_{ra}{}^c(\gamma_{pq})_{cb})_{\{ab\}[pqr]} \\ &= (4(\gamma^m)_{ab}K_{mpqr} - 864(\gamma_p X_4 \gamma_{qr})_{ab} + 288(X_4 \gamma_{pqr})_{ab})_{\{ab\}[pqr]} \\ &= 4(\gamma^m)_{ab}(K_{mpqr} - 288X_{mpqr}), \end{aligned} \quad (323)$$

従って 4 階反対称テンソル X_{mnpq} が場の強さ K_{mnpq} に比例しなければならない。

$$X_{mnpq} = \frac{1}{288}K_{mnpq}. \quad (324)$$

従って $T_{ma}{}^b$ は次のように与えられる。

$$T_{ma}{}^b = \frac{1}{8}(\gamma_m X_4)_a{}^b - \frac{1}{24}(X_4 \gamma_m)_a{}^b = \frac{1}{12 \cdot 4!}(\gamma_{mpqrs} K^{pqrs})_a{}^b + \frac{1}{6 \cdot 3!}(\gamma^{qrs} K_{mqr})_a{}^b \quad (325)$$

以前に、グラビティーノの変換則を超空間上の一般座標変換として得るには $T_{ma}{}^b$ が反対称テンソル場の関数として与えられなくてはならないことを見たが、この関係はまさにそこで要求されたものになっている。(325) を (319) に代入すれば

$$R_{ab-mn} = \frac{1}{3}K_{mnpq}(\gamma^{pq})_{ab} + \frac{1}{72}K^{pqrs}(\gamma_{mnpqrs})_{ab} \quad (326)$$

が得られるが、これは (222) において定義した $(K_{mn})_{ab}$ に一致している。

これ以外のビアンキ恒等式をどのように解くかの詳細は補遺にまわすことにして、ここでは結果だけをまとめておこう。ここまでに得た関係式も改めて与えておく。

テンソルの成分を別の成分によって表すもの まず、次の関係式はテンソルのいくつかの成分が独立ではなく、他のテンソルを用いて表せることを意味している。

$$T_{ma}{}^b = \frac{1}{8}(\gamma_m K_4)_a{}^b - \frac{1}{24}(K_4 \gamma_m)_a{}^b = \frac{1}{12 \cdot 4!}(\gamma_{mpqrs} K^{pqrs})_a{}^b + \frac{1}{6 \cdot 3!}(\gamma^{qrs} K_{m qrs})_a{}^b, \quad (327)$$

$$R_{ab-mn} = \frac{1}{3}K_{mnpq}(\gamma^{pq})_{ab} + \frac{1}{72}K^{pqrs}(\gamma_{mnpqrs})_{ab} \quad (328)$$

$$R_{ap-mn} = (\gamma_p)_{ab}T_{mn}{}^b - (\gamma_m)_{ab}T_{np}{}^b - (\gamma_n)_{ab}T_{pm}{}^b \quad (329)$$

(327) と (328) は既に (325) と (316) に与えた。(329) は $I_{mna}{}^p = 0$ より直ちに得ることができる。これらにより、場の強さテンソルの成分のうち以下のものだけが独立になる。

$$T_{mn}{}^a(z), \quad R_{mn-pq}(z), \quad K_{mnpq}(z). \quad (330)$$

これらは実空間上の場 ψ_μ^a , e_μ^m , $A_{\mu\nu\rho}$ の場の強さ

$$\psi_{\mu\nu}^a(x) = D_\mu \psi_\nu^a - D_\nu \psi_\mu^a, \quad R_{\mu\nu mn}(x), \quad K_4(x) = dA_3(x) \quad (331)$$

に対応している。ただし (330) の $\theta = 0$ 成分が (331) に一致するわけではなく、補正項が現れることを注意しておこう。

独立なテンソルの D_a 微分を与えるもの 以下の関係式は、これら独立な場の θ 微分を他の超場で与えるものである。

$$D_a K_{pqrs} = -12 T_{pq}{}^b (\gamma_{rs})_{ba} |_{[pqrs]}, \quad (332)$$

$$D_a R_{mn-pq} = D_m R_{an-pq} - D_n R_{am-pq} + T_{ma}{}^b R_{bn-pq} - T_{na}{}^b R_{bm-pq} - T_{mn}{}^b R_{ba-pq}, \quad (333)$$

$$D_a T_{mn}{}^b = -R_{mna}{}^b - D_m T_{na}{}^b - D_n T_{am}{}^b - T_{na}{}^c T_{cm}{}^b - T_{am}{}^c T_{cn}{}^b \quad (334)$$

(332) は $J_{amnpq} = 0$ から、(333) は $I_{amn}{}^{pq} = 0$ から直ちに得ることができる。(334) は $I_{mna}{}^b$ から得られるが、§B.4 も参照してほしい。

これらの式を用いることで、超場を任意回 θ 微分したものを θ 微分を含まない式に書き直すことが可能となり、超場の θ 展開における全ての成分を超場の $\theta = 0$ での値を用いて表すことが可能となる。

実空間上のビアンキ恒等式を与えるもの ここまでは、拘束条件の解を求めるために $E_M{}^A$ や A_{MNP} ではなく、それらの場の強さを用いて議論してきた。得られた独立なテンソルの成分 (330) がポテンシャル場を用いて表せることを保障するのが以下の関係式である。

$$I_{mnp}{}^q = R_{mnp}{}^q |_{[mnp]} = 0, \quad (335)$$

$$I_{mnp}{}^a = (D_m T_{np}{}^a + T_{mn}{}^b T_{bp}{}^a) |_{[mnp]} = 0, \quad (336)$$

$$I_{kmn}{}^{pq} = (D_k R_{mn}{}^{pq} + 2T_{km}{}^a R_{an}{}^{pq}) |_{[kmn]} = 0, \quad (337)$$

$$J_{kmnpq} = D_k K_{mnpq} |_{[kmnpq]} = 0. \quad (338)$$

(335) より次の恒等式も直ちに従う。

$$R_{mn} - R_{nm} = R_{mpqr} + R_{mqrp} + R_{mrpq} = 0, \quad (339)$$

上に与えた式は全て超場に対する式であることに注意しよう。これらから実空間上の関係式を得るには $\theta = 0$ 成分を取り出せばよい。その結果次の式を得る。

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^p(z)|_{\theta=0} &= T_{\mu\nu}{}^p(x) = D_\mu e_\nu^p(x) - D_\nu e_\mu^p(x), \\ T_{\mu\nu}{}^a(z)|_{\theta=0} &= \psi_{\mu\nu}^a(x) = D_\mu \psi_\nu^a(x) - D_\nu \psi_\mu^a(x), \\ R_{\mu\nu}{}^{pq}(z)|_{\theta=0} &= R_{\mu\nu}{}^{pq}(x) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{pq}(x) - \partial_\nu \omega_\mu{}^{pq}(x) + \omega_\mu{}^{pr} \omega_{\nu-r}{}^q(x) - \omega_\nu{}^{pr} \omega_{\mu-r}{}^q(x), \\ K_{\mu\nu\rho\sigma}(z)|_{\theta=0} &= K_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = \partial_\mu A_{\nu\rho\sigma}(x) - \partial_\nu A_{\rho\sigma\mu}(x) + \partial_\rho A_{\sigma\mu\nu}(x) - \partial_\sigma A_{\mu\nu\rho}(x) \end{aligned} \quad (340)$$

上記の関係式は全て局所座標の添え字を持つことに注意しなければならない。

実空間上の運動方程式を与えるもの 最後に、次の 3 つの関係式は実空間上の場の運動方程式を与える。

$$R_{mp}\gamma^p + \frac{1}{12}\langle 3K\gamma_m K - \gamma_m K K \rangle_1 = 0, \quad (341)$$

$$\langle D K \rangle_3 + \frac{1}{2}\langle K K \rangle_8 = 0, \quad (342)$$

$$(\gamma^k)^a{}_b T_{km}{}^b = 0. \quad (343)$$

(341) と (342) の導出は §B.4 に、(343) の導出は §B.3 に与えた。それぞれアインシュタイン方程式、 A_3 の運動方程式、 ψ_μ の運動方程式である。 $D = \gamma^m D_m$ である。これらが 11 次元超重力理論の作用の変分によって得られた運動方程式に一致する。

詳しくは §4.6 に与える。

4.6 実空間上の運動方程式

実空間上の場の強さは (340) を通して超空間上の場の強さと関係している。この関係式に現れる場の強さは大域座標の添え字を持つものに対して、超空間上の運動方程式に現れる超場は全て局所座標の添え字を持つものである。そこで、局所座標の添え字を持つ超空間上のテンソル場に対して $\theta = 0$ とおくことによって得られる実空間上の場を定義しておくのが便利である。これらは通常の場合の強さの「超共変化」と呼ばれるものを与える。一般に、

$$X_k(x) = X_k(z)|_{\theta=0} \quad (344)$$

のように超場の $\theta = 0$ 成分として与えられる実空間上の k -フォーム場があった場合、その成分 $X_{\mu_1 \dots \mu_k}(x)$ の超共変化は

$$X_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\text{cov}}(x) = e_{\mu_1}^{m_1}(x) \cdots e_{\mu_k}^{m_k}(x) X_{m_1 \dots m_k}(z)|_{\theta=0} \quad (345)$$

によって定義される。場の強さの超共変化には超対称変換を行った際に変換パラメータ ξ の微分が現れないという性質がある。

超共変化された場の強さの表式を得るには以下のようにすればよい。 $\psi_{\mu\nu}^{\text{cov } a} := e_\mu^m e_\nu^n (T_{mn}{}^a|_{\theta=0})$ を例に取ろう。超空間上で、大域座標を持つテンソルと局所座標を持つテンソルの関係を次のように与える。

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}{}^a &= E_\nu{}^B E_\mu{}^A T_{AB}{}^a \\ &= E_\nu{}^n E_\mu{}^m T_{mn}{}^a + E_\nu{}^b E_\mu{}^m T_{mb}{}^a + E_\nu{}^m E_\mu{}^b T_{bm}{}^a \end{aligned} \quad (346)$$

両辺の $\theta = 0$ 成分を取ると、

$$\psi_{\mu\nu}^a = \psi_{\mu\nu}^{\text{cov } a} + (\psi_\nu^b e_\mu^m T_{mb}{}^a|_{\theta=0} - [\mu \leftrightarrow \nu]) \quad (347)$$

が得られる。 $T_{mb}{}^a$ に (327) を代入することで $\psi_{\mu\nu}^{\text{cov}}$ を $\psi_{\mu\nu}$ と K_4 を用いて与える式を得ることができる。その結果も含め、場の強さの超共変化を以下にまとめておく。

$$\psi_{\mu\nu}^{\text{cov}} = \psi_{\mu\nu} + \left(-\frac{1}{8} K_4^{\text{cov}} \gamma_\mu \psi_\nu + \frac{1}{24} \gamma_\mu K_4^{\text{cov}} \psi_\nu - [\mu \leftrightarrow \nu] \right), \quad (348)$$

$$K_{\mu\nu\rho\sigma}^{\text{cov}} = K_{\mu\nu\rho\sigma} - 12\psi_{[\mu} \gamma_{\nu\rho} \psi_{\sigma]} = K_{\mu\nu\rho\sigma} - \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (349)$$

$$R_{\mu\nu pq}^{\text{cov}} = R_{\mu\nu pq} + [(\psi_\mu \gamma_\nu \psi_{pq}^{\text{cov}}) - (\psi_\mu \gamma_p \psi_{qv}^{\text{cov}}) - (\psi_\mu \gamma_q \psi_{vp}) - (\mu \leftrightarrow \nu)] \quad (350)$$

これらを用いると、超場に対する運動方程式を実空間上の場を用いて書き下すことができる。ここでは最も簡単なグラビティーノの運動方程式について見ておこう。

グラビティーノの運動方程式は超場に対する式 (343) の $\theta = 0$ 成分として次のように与えられる。

$$\gamma^\mu \psi_{\mu\nu}^{\text{cov}} = 0 \quad (351)$$

これが $\gamma^{\mu\nu\rho} \psi_{\nu\rho}^{\text{cov}} = 0$ と同値であることはすぐに確かめられる。ここに (348) を代入すれば、

$$0 = \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_{\nu\rho}^{\text{cov}} = \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \gamma^{[\mu} K^{\text{cov}} \gamma^{\nu]} \psi_\nu \quad (352)$$

が得られる。これは作用 (4) を ψ_μ で変分して得られる運動方程式にグラビティーノの 2 次まで一致する。もちろんグラビティーノの高次の項まで含めて正しいのは (352) である。

4.7 平坦な超空間

拘束条件によって決まらない捺率および反対称テンソルの成分を 0 におくことによって得られる超空間を平坦な超空間と呼ぶ。すなわち、平坦な超空間において捺率と反対称テンソルの 0 でない成分は

$$T_{ab}{}^k(z) = 2(\gamma^k)_{ab}, \quad K_{pqab} = 2(\gamma_{pq})_{ab} \quad (353)$$

だけであると仮定する。曲率テンソルの成分は全て 0 である。従ってスピン接続も 0 に取ることができる。

$$R_{MN} = \Omega_M = 0. \quad (354)$$

$T_{AB}{}^a = 0$ であることから、

$$T_{MN}{}^a = 0 \quad (355)$$

が成り立つ。従って、 $E_M{}^a = \text{const}$ とおくことができる。 $E_M{}^a = 0$ とおいてしまうと計量が縮退してしまうので、ここでは

$$E^a = d\theta^a, \quad E_\mu{}^a = 0, \quad E_\beta{}^a = \delta_\beta^a. \quad (356)$$

とおくことにする。最後の式の δ_β^a が二種類の添え字を持つことに違和感を感じるかもしれないが、特定の背景を選んだことにより一般座標変換の不変性は失われているので仕方のないことである。こうすると、

$$T^k = -\frac{1}{2}dz^N \wedge dz^M T_{MN}{}^k = -d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha (\gamma^k)_{\alpha\beta} \quad (357)$$

となる。ただし $(\gamma^k)_{\alpha\beta} = \delta_\beta^b \delta_\alpha^a (\gamma^k)_{ab}$ である。この式の解として次のものを採用しよう。

$$E^k = dx^k + \theta \gamma^k d\theta, \quad E_\mu{}^k = \delta_\mu^k, \quad E_\alpha{}^k = \theta^b (\gamma^k)_{ba} \quad (358)$$

K_4 については平坦な超空間においては

$$K_4 = -\frac{1}{4}E^p \wedge E^q \wedge E^a \wedge E^b K_{pqab} = \frac{1}{2}E^p \wedge E^q \wedge d\theta \wedge (\gamma_{pq})d\theta = d\theta(\gamma_{[2]})d\theta + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (359)$$

と与えられる。最後の表式では θ について高次の項を無視した。この場の強さを実現するにはポテンシャルを次のように取ればよい。

$$A_3 = \theta(\gamma_{[2]})d\theta + \mathcal{O}(\theta^4) \quad (360)$$

大域的な超対称性変換は超空間上の一般座標変換のうち、場の関数形を変化させないものとして定義される。すなわち、大域的対称性の変換パラメータは次の条件を満足しなければならない。

$$\delta E_M{}^A = D_M \Xi^A + E_M{}^B \Xi^C T_{CB}{}^A = 0. \quad (361)$$

これは次の 4 つの式に分解することができる。

$$\begin{aligned} \delta E_\mu{}^m &= \partial_\mu \epsilon^m = 0, \\ \delta E_\mu{}^a &= \partial_\mu \epsilon^a = 0, \\ \delta E_\alpha{}^m &= \partial_\alpha \epsilon^m + 2\epsilon^b (\gamma^m)_{b\alpha} = 0, \\ \delta E_\alpha{}^a &= \partial_\alpha \epsilon^a = 0. \end{aligned} \quad (362)$$

これらより、

$$\epsilon^m(z) = \epsilon_0^m + 2\theta \gamma^m \xi_0, \quad \epsilon^a(z) = \xi_0^a. \quad (363)$$

あるいは

$$\epsilon^\mu(z) = \epsilon_0^\mu + \theta\gamma^\mu\xi_0, \quad \epsilon^\alpha(z) = \xi_0^\alpha. \quad (364)$$

が得られる。ただし、 ϵ_0 および ξ_0 は定数のパラメータであり、それぞれ大域的な並進対称性および大域的な超対称性のパラメータとみなされる。これらのパラメータを用いれば、超空間上の座標変換は次のように与えられる。

$$\delta x^\mu = \epsilon_0^\mu + \theta\gamma^\mu\xi_0, \quad \delta\theta^\alpha = \xi_0^\alpha. \quad (365)$$

4.8 超対称 M2-ブレーン

M2-ブレーンの作用のボゾン部分は、ブレーンの張力 T に比例する部分とブレーンの電荷 Q に比例する部分からなり、次のように与えられる。

$$S = -T \int d^3\sigma \sqrt{-\det(G_{ij})} + Q \int A_3. \quad (366)$$

超対称性を持つ M2-ブレーンの作用を得るにはこれを超場形式で書かれた作用であると解釈しなおすだけでよい [11]。ただしブレーン上の座標を σ^i とし、ブレーン上に誘導された計量 G_{ij} は次のように定義される。

$$G_{ij} = (-)^{MN} \partial_i z^M \partial_j z^N E_M^m E_N^n \eta_{mn} = \Pi_i^m \Pi_j^n \eta_{mn}. \quad (367)$$

ここで Π_i^m を次のように定義した。

$$\Pi_i^m = \frac{\partial z^M}{\partial \sigma^i} E_M^m. \quad (368)$$

この計量の定義において局所ローレンツ添え字の縮約がベクトル添え字についてのみなされていることに注意。ブレーン上の座標 σ^i に対する添え字 i, j, \dots の上げ下げはこの誘導計量を用いて行う。また、 A_3 との結合項は

$$\int A_3 = \int d^3\sigma \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} (-)^{NM+P(M+N)} \frac{\partial z^M}{\partial \sigma^i} \frac{\partial z^N}{\partial \sigma^j} \frac{\partial z^P}{\partial \sigma^k} A_{MNP}(z) \quad (369)$$

を意味する。

この作用は σ^i によって張られる 3 次元時空上の場 z^M の理論であるとみなすことができる。ここでは背景の超空間が平坦である場合について、3 次元の理論がどのような物理的自由度を持つかを見ておく。[12]

ボゾン場 x^μ に対しては、ブレーンに沿った方向の座標は静的ゲージを取ることでブレーン上の座標 σ^i と同一視され、垂直方向の座標 x^I はブレーン上のスカラー場として振舞うことは以前に述べたとおりである。

ここでは以前には考慮しなかったフェルミオンがブレーン上でどのような自由度を与えるかを見ておこう。まず、南部・後藤作用の部分に注目する。

Π_i^m を次のように定義しておくこと便利である。

$$\Pi_i^m = \frac{\partial x^m}{\partial \sigma^i} + \theta \gamma^m \frac{\partial \theta}{\partial \sigma^i}. \quad (370)$$

(370) を (366) の南部-後藤作用部分に代入し、フェルミオン θ について 4 次以上の項を無視すると次のようになる。

$$S = -T \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\tilde{g}_{ij})} \left[1 + (\theta \tilde{\gamma}^i \partial_j \theta) \right] + \mathcal{O}(\theta^4). \quad (371)$$

ここで次の行列を導入した。

$$\tilde{\gamma}_i \equiv \frac{\partial x^m}{\partial \sigma^i} \gamma_m, \quad \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \sigma^i} \frac{\partial x^n}{\partial \sigma^j} \eta_{mn} \quad (372)$$

これは 3 次元の γ 行列とよく似た性質を満足する。

$$\{\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j\} = 2\tilde{g}_{ij}. \quad (373)$$

ただし、3 次元のディラック行列とは異なり、3 つを掛けても単位行列にはならない。 $\tilde{\gamma}$ を次のように定義する、

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{6} E^{ijk} \tilde{\gamma}_{ijk}. \quad (374)$$

ただし E_{ijk} はブレン上での完全反対称テンソルであり、

$$E_{ijk} = \Pi_i^m \Pi_j^n \Pi_k^p \epsilon_{mnp} \quad (375)$$

によって定義される。

$$\tilde{\gamma}^2 = 1 \quad (376)$$

を満たす。

(360) に与えた A_3 を (366) の Wess-Zumino 項に代入すると、

$$\begin{aligned} S_{\text{WZ}} &= \frac{1}{2} Q \int dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge (\theta \gamma_{\mu\nu} d\theta) + \mathcal{O}(\theta^4) \\ &= \frac{1}{2} Q \int \sqrt{-G} d^3 \sigma E^{ijk} (\theta \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \theta) + \mathcal{O}(\theta^4) \\ &= Q \int \sqrt{-G} d^3 \sigma (\theta \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma} \partial_k \theta) + \mathcal{O}(\theta^4). \end{aligned} \quad (377)$$

となる。最後の変形に $E^{ijk} \tilde{\gamma}_{ij} = (1/3) E^{ijm} \tilde{\gamma}_{ijm} \tilde{\gamma}^k = 2\tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^k$ を用いた。

南部 - 後藤作用から得られた (371) と Wess-Zumino 項から得られた (377) を合計すれば

$$S_{\text{fermion}} = - \int d^3 \sigma (\theta \tilde{\gamma}^i \partial_i (T - Q \tilde{\gamma}) \theta) \quad (378)$$

となる。 $\tilde{\gamma}$ の期待値によってスピノルを二つの部分に分けよう。例えば、 $\theta = \theta_+ + \theta_-$ のように分解し θ_{\pm} は γ に対する固有値が ± 1 の部分であるとする。すると、作用を次のように書き換えることができる。

$$S_{\text{fermion}} = - \int d^3\sigma \left[(T - Q)(\theta_+ \tilde{\gamma}^i \partial_i \theta_+) + (T + Q)(\theta_- \tilde{\gamma}^i \partial_i \theta_-) \right] \quad (379)$$

フェルミオン運動項の係数 $T \pm Q$ が負になってしまうとユニタリティが破れてしまうが、そのようなことが起こらないことは以前に与えた BPS bound の式 $T \geq |Q|$ によって保障されている。

大域的な超対称変換は (365) に

$$\delta x^m = \theta \gamma^m \xi, \quad \delta \theta = \xi \quad (380)$$

によって与えられていた。フェルミオン θ に対する変換則は、この対称性が常に自発的に破れていることを表している。超対称性が超空間の並進であり、ブレーンは θ 方向のある特定の位置に存在しているから、超対称性が破れるのは当然である。

しかし、以前 BPS 条件 $|Q| = T$ が成り立つ場合には超対称性のうち半分は破れずに残ることを見た。このことは、以下のようにして説明することができる。 $Q = +T$ の場合と $Q = -T$ の場合が考えられるが、ここでは $Q = T$ であると仮定しよう。この場合 (379) は次のようになる。

$$S_{\text{fermion}} = -2T \int d^3\sigma (\theta_- \tilde{\gamma}^i \partial_i \theta_-) \quad (381)$$

この作用は θ_+ を含まない。従って、大域的な超対称変換以外に、次の局所変換の下でもブレーンの作用は不変である。

$$\delta_{\kappa} \theta_+ = \kappa_+ \quad (382)$$

κ_+ は $\tilde{\gamma} \kappa_+ = \kappa_+$ を満足するスピノルであり、ブレーン上の座標に依存していてもよい。この対称性は κ -対称性と呼ばれる。 ξ をパラメータとする超対称変換と、 κ_+ をパラメータとする κ -変換を同時に行うと、フェルミオン θ は次のように変換される。

$$\delta \theta_+ = \xi_+ + \kappa_+, \quad \delta \theta_- = \xi_- \quad (383)$$

従って、 ξ_+ による超対称変換とパラメータ $\kappa_+ = -\xi_+$ による κ 変換を同時に行うという変換はフェルミオンの値を変化させないから、破れずに残っている。これが BPS 状態が保っている超対称変換である。 κ 対称性によってフェルミオンの変化分を相殺できる必要があるが、そのためには超対称変換のパラメータが次の条件を満足しなければならない。

$$\tilde{\gamma} \xi_+ = \xi_+ \quad (384)$$

例えばブレーンが 012 方向に広がっている場合には $\gamma_{012} \xi_+ = \xi_+$ となり、これは丁度 (253) の条件に一致している。

κ 対称性はゲージ対称性であり、超空間上のブレーンをフェルミオン座標によって張られるある方向へ変形させても物理量に影響を与えないことを意味している。ボゾン座標に

についてはブレーンの形状を現しており、物理的な意味を持つので、類似の局所的対称性は存在しない。従って、 κ 対称性のもとでもボゾン座標は変化しない。ただし、ボゾン座標とフェルミオン座標を区別する際に x^μ と θ^α に分けてしまうと、これは超空間上の座標の取り方に依存してしまう。 κ 対称性がボゾン座標を変化させないという条件を超空間上の座標の選び方に依存しない形で表すには次のように取る必要がある。

$$\delta_\kappa z^M E_M{}^m = 0 \quad (385)$$

この式によって x^μ の κ 変換は θ^α の κ 変換を用いて表すことができる。もし多脚場が (356) および (358) によって与えられる座標系を採用していれば、 x^μ の変換は次のように与えられる。

$$\delta x^\mu = -\theta \gamma^\mu \delta_\kappa \theta \quad (386)$$

κ 対称性はここで考えているような平坦な超空間上のブレーンだけではなく、(拘束条件を満足する) 一般の曲がった超空間の上のブレーンに対して存在しなければならない。曲がった背景上の M2-ブレーンに対して κ 対称性が存在することは §C で示してある。

ここまでは平坦な M2-ブレーンを考えてきたが、M2-ブレーンの微小振動を考慮すれば、M2-ブレーン上のスカラー場とフェルミオン場の間の超対称変換を求めることができる。[12]

以前にも行ったように静的ゲージ $x^i = \sigma^i$ を取ろう。ブレーンに垂直な方向の座標を x^I とする。 x^I が σ^i に依存している場合、 $\tilde{\gamma}_i$ は次のように与えられる。

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma_i + \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma_I \quad (387)$$

微小振動であるという仮定を用いて $\partial_i x^I$ の二次以上の項は無視する。 $\tilde{\gamma}$ は次のように与えられる。

$$\tilde{\gamma} = \gamma \left(1 + \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma^i \gamma_I \right). \quad (388)$$

ここで、 γ は $x^I = 0$ であるときの $\tilde{\gamma}$ である。

以前は θ_\pm を $\tilde{\gamma}$ の固有ベクトルとして定義したが、ここでは定数行列 γ の固有ベクトルとして定義することにしよう。すなわち $\gamma \theta_\pm = \pm \theta_\pm$ である。 $\delta_\kappa \theta$ は $\tilde{\gamma}$ の正固有値の空間に属しなければならないので、次のように表すことができる。

$$\delta_\kappa \theta = \frac{1}{2} (1 + \tilde{\gamma}) \kappa \quad (389)$$

ただしここでは κ は任意のスピノルとし、射影行列 $(1 + \tilde{\gamma})/2$ を掛けることで $\tilde{\gamma}$ の正固有値を持つ部分だけを抜き出した。従って、超対称変換と κ 変換をあわせた一般形は次のようになる。

$$\delta \theta = \xi + \frac{1}{2} \left[1 + \gamma \left(1 + \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma^i \gamma_I \right) \right] \quad (390)$$

γ の正固有値部分と負の固有値の部分に分けて書くと、次の二つの式が得られる。

$$\begin{aligned}\delta\theta_+ &= \xi_+ + \kappa_+ + \frac{1}{2} \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma^i \gamma_I \kappa_-, \\ \delta\theta_- &= \xi_- - \frac{1}{2} \frac{\partial x^I}{\partial \sigma^i} \gamma^i \gamma_I \kappa_+\end{aligned}\quad (391)$$

となる。 κ 対称性を用いることで、 $\theta_+ = 0$ というゲージを取ることができる。このゲージを破らない超対称変換は次のようにパラメータを選ぶことで得られる。

$$\kappa_+ = -\xi_+, \quad \kappa_- = \xi_- = 0. \quad (392)$$

これがブレーン上の超対称変換を与える。これによってゲージ固定されていないフェルミオンの成分 θ_- は次のように変換される。

$$\delta\theta_- = \frac{1}{2} (\partial_i x^I) \gamma^i \gamma_I \xi_+ \quad (393)$$

スカラー場 x^I の変換は x^μ に対する κ 対称性が (386) によって与えられることを用いて次のように決まる。

$$\delta x^I = \theta_- \gamma^I \xi_+ - \theta_- \gamma^I \delta_\kappa \theta_+ = 2\theta_- \gamma^I \xi_+ \quad (394)$$

M2-ブレーン上の座標である x^i については $\delta x^i = \theta_- \gamma^i \xi_+ = 0$ である。これらの変換のもとで、スカラー場 x^I とフェルミオン場 θ_- の作用

$$S = T_{M2} \int d^3\sigma \left(-\frac{1}{2} \partial_i x^I \partial^i x^I - 2(\theta_- \gamma^i \partial_i \theta_-) \right) \quad (395)$$

は不変である。

フェルミオンの規格化を標準的なものにするために $\psi = 2\theta_-$ を定義しておく。すると、作用は

$$S = T_{M2} \int d^3\sigma \left(-\frac{1}{2} \partial_i x^I \partial^i x^I - \frac{1}{2} (\psi \gamma^i \partial_i \psi) \right) \quad (396)$$

となり、この作用を不変に保つ超対称変換は

$$\delta\psi = (\partial_i x^I) \gamma^i \gamma_I \xi_+, \quad \delta x^I = \psi \gamma^I \xi_+ \quad (397)$$

である。スピノルは次の条件を満足する。

$$\gamma_{012} \xi = \xi, \quad \gamma_{012} \psi = -\psi. \quad (398)$$

5 重なった M2-ブレーン

5.1 ブレーン上の理論

ここまでに、M2-ブレーンや M5-ブレーンが、単独で存在し、無限に広がっているときに、その低エネルギー有効作用がブレーンの振動を表すスカラー場とその超対称パートナー

を用いて記述されることを見た。低エネルギー極限においてこれらは自由場の理論になり、それほど面白い物理を含んでいるわけではない。

しかし、同じブレーンを複数枚重ねると状況は変わってくるであろうことが弦理論に含まれる D-ブレーンについての知識から示唆される。このノートでは全く触れないが、弦理論は M-理論と同様のブレーンを含んでおりそのうち D-ブレーンに対しては摂動論的な解析によってその上にどのような自由度が存在するかを調べることが可能である。そのような解析の結果、1枚の D-ブレーンの場合には M-ブレーンと同様に低エネルギーでは自由場の理論に帰着するが、複数枚の D-ブレーンが重なった状況では相互作用のある共形場理論が実現される場合があるということが知られている。例えば D3-ブレーンを N 枚重ねた系は低エネルギー極限において $\mathcal{N} = 4$ 超対称性を持つ超対称 $U(N)$ ゲージ理論によって記述されるということが知られている。この理論はゲージ結合定数に対するベータ関数が 0 であり、量子補正がほとんど無く、エネルギースケールによって変化しない共形場理論であると考えられている。

それでは N 枚のブレーンが重なったような状況において、その上の低エネルギー有効理論はどのようなものになるであろうか。ブレーン上の理論に限らず、何らかの理論があったときに、その低エネルギー極限がどのようなものになるかという問題はいろいろな場面で現れる重要な問題である。その答えとしては、大きく分けると以下のような可能性がある。

- 自明な理論（自由度が全て massive であり、低エネルギーにおいては何も残らない）
pure Yang-Mills 理論はこのような理論の一例である。pure Yang-Mills 理論においては閉じ込めが起こり、gauge singlet である glue ball が物理的な粒子として存在するが、glue ball はダイナミカルスケール程度の質量を持つため、低エネルギー極限においては全く自由度の存在しない自明な理論になる。
- 自由場の理論（互いに相互作用しない、零質量場の理論）
massless QCD（クォークの質量が 0 である QCD）はこのような理論の例である。この理論はゲージ重項としてメソンとバリオンを含む。バリオンはダイナミカルスケール程度の質量を持つために低エネルギーにおいては見えなくなり、メソンだけの理論となる。メソンはカイラル対称性の破れに伴う南部・ゴールドストーンボゾンであり、その相互作用については低エネルギー定理が成り立つ。すなわち全ての相互作用は微分結合であり、低エネルギー極限においては相互作用が消失し、自由場の理論になる。
- 相互作用する非自明な共形場理論
 $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論はこのような理論の一例である。この理論はベータ関数が厳密に 0 であり、Yang-Mills 結合定数はどんなに低エネルギーにおいても有限の値を保つ。

M2-ブレーンが 1 枚の場合には、低エネルギー極限が自由場の理論になることをすでに見た。それでは M2-ブレーンが複数枚重なったときに、その上に実現される理論はこれらのうちのどのクラスに属するのであろうか。

弦理論の場合と異なり、低エネルギーの自由度を直接導出する方法は今のところ知られていないが、ここ数年で M2-ブレーンの低エネルギー有効理論については大きな進展があり、後で述べる ABJM モデルが重なった N 枚の M2-ブレーンを記述する理論の一つであると考えられている。「理論の一つ」といったのは、ABJM 理論と量子論のレベルで等価であろうと考えられている理論が複数提案されているためである。M2-ブレーンの低エネルギー有効理論の解析はそのような 3 次元の場の理論の間の双対性の解明にも有用であると考えられているが、ここではもっぱら ABJM モデルのみに注目しよう。

ABJM モデルが重なった M2-ブレーン上の理論を与えているという主張の正当性のチェックは、重なった M2-ブレーンが持つと期待されるさまざまな性質を ABJM モデルが持つことを確認するという作業を繰り返すことにより状況証拠を積み上げていくという方法でなされている。従って、M2-ブレーン上に実現される場の理論の情報を用いることなくその性質を調べる手段が必要になる。その代表的なものが、M2-ブレーンを重力的に調べる方法である。M2-ブレーンは固有のエネルギー密度を持つため、重力の効果により背景時空を曲げる。その曲率が十分小さければ、ブレーンを一般相対性理論の古典的な解として取り扱うことが可能となる。そのような解析を行うために、まずは曲率がどの程度になるか、大まかに見積もってみよう。

D 次元時空に張力 T の p -ブレーンが N 枚重なって存在している状況を考えよう。作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} R - NT \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det G} \quad (399)$$

と与えられる。ただし G はニュートン定数、 T はブレーンの張力である。この作用には二つのパラメータ G と NT が含まれるが、運動方程式は作用の全体の係数には依存しないので、これらのパラメータは積 NGT の形で運動方程式に現れる。従って、解の典型的な長さのスケールを L とすると、次元解析により

$$L^{D-p-3} = NGT \quad (400)$$

が成り立つはずである。M 理論においては、数係数を除き

$$G \sim h^{-1} l_p^9, \quad T_{M2} \sim h l_p^{-3} \quad (401)$$

なので、M2-ブレーンが N 枚重なっている場合の典型的スケールは

$$L \sim N^{\frac{1}{6}} l_p \quad (402)$$

である。 N が十分大きければ $L \gg l_p$ になり、古典的な重力理論を用いてブレーンに対する情報を得ることができる。そのためには、ここでの計算をより厳密に行い、M2-ブレーンを表すアインシュタイン方程式の解を求めることが必要になる。

5.2 ブラック M2-ブレーン

以下では M2-ブレーンの枚数 N が非常に大きいことを仮定し、古典的な超重力理論の解としてブレーンの古典解を具体的に求めよう。M2-ブレーンの伸びている方向を (t, x^1, x^2)

とし、そのまわりの極座標 (r, θ^a) を用いることにする。プレーンに沿った並進対称性や、 (x^1, x^2) 平面での回転対称性、および θ^a 方向の回転対称性を仮定すると、計量を次のように置くことができる。

$$ds^2 = -a^2(r)dt^2 + b^2(r)\delta_{ij}dx^i dx^j + c^2(r)dr^2 + r^2 d^2(\theta)h_{ab}(\theta)d\theta^a d\theta^b \quad (403)$$

関数 a, b, c, d は動径座標 r の関数である。十分遠方では時空が平坦になることを仮定し、次の境界条件を置く。

$$a, b, c, d \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1. \quad (404)$$

N 枚の M2-プレーンが重なっている場合には、そのまわりの K_7 の積分が次のように与えられるはずである。

$$N = -\frac{1}{l_p^6} \oint K_7 \quad (405)$$

回転対称性を仮定すれば、 K_7 の成分のうち 0 でないのは角度方向のみであり、

$$K_4 = -|K|e^{\hat{t}}e^{\hat{1}}e^{\hat{2}}e^{\hat{r}} = -ab^2c|K|dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dr. \quad (406)$$

と与えることができる。ただし $|K|$ は K_4 の 0 でない成分の大きさであり、(405) より次のように決まる。

$$|K| \equiv (-K_{\mu\nu\rho\sigma}K^{\mu\nu\rho\sigma})^{1/2} = \frac{Nl_p^6}{\Omega_7 d^7 r^7} = \frac{6Q}{d^7 r^7} \quad (407)$$

あとで便利なように

$$Q = \frac{Nl_p^6}{6\Omega_7} \quad (408)$$

を定義した。

ここではプレーンの向き付けは、3 階反対称テンソル場との結合が

$$S = \frac{h}{l_p^3} \int A_{012} dt dx^1 dx^2 \quad (409)$$

と与えられるように定義した。この場合、平行なプレーンの中のクーロン力が斥力となることから、遠方でのゲージ場が定数項を除き

$$A_{012} \propto -\frac{1}{r^6} \quad (410)$$

となり、符号が負になるはずである。こうして (406) の符号が選ばれる。

ここで、 Ω_7 は半径が 1 の S^7 の体積である。実はアインシュタイン方程式には角度方向の計量 h_{ab} はそのリッチテンソルの形でのみ現れる。従って、リッチテンソルが球面 S^7 と同様に

$$R_{ab} = 6h_{ab}, \quad (411)$$

という関係を満足すれば、以下の議論は全く同様に行うことができる。そのような場合、ここで考えている古典解は (403) において $a = b = c = d = 1$ とおいて得られる錐多様体

の頂点に M2-ブレーンを置いた状況を表わしているものと解釈される。(411) を満足する多様体はアインシュタイン多様体と呼ばれる。S⁷ 以外のアインシュタイン多様体を考える場合、Ω₇ をその多様体の体積とすればよい。このような一般化を簡単に行えるように、以下では Ω₇ に S⁷ に対する値 Ω₇ = π⁴/3 の代入はそれとはっきり断って行うことにする。

こうして、計量が与えられればゲージ場は一意的に決まるが、これはゲージ場の運動方程式を満足する。従って、あとはアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{l_p^9}{2h} T_{\mu\nu} = \frac{1}{2 \cdot 3!} K_{\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3} K_{\nu}{}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} - \frac{1}{4 \cdot 4!} K_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} K^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \quad (412)$$

を解けばよい。ただし $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ はアインシュタインテンソルである。これは次の 4 つの式に分解することができる。

$$G_{tt} = -\frac{1}{4}|K|^2 g_{tt}, \quad G_{ij} = -\frac{1}{4}|K|^2 g_{ij}, \quad G_{rr} = -\frac{1}{4}|K|^2 g_{rr}, \quad G_{ab} = \frac{1}{4}|K|^2 g_{ab}. \quad (413)$$

計量 (403) およびテンソル場の強さ (407) をこれらに代入することにより連立微分方程式が得られる。それらを解くことで次の解が得られる。[13, 14]

$$a = H^{-1/3} f^{1/2}, \quad b = H^{-1/3}, \quad c = H^{1/6} f^{-1/2}, \quad d = H^{1/6}. \quad (414)$$

すなわち計量が次のように与えられる。

$$ds^2 = H^{-2/3}(-f dt^2 + dx^i dx^i) + H^{1/3}(f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_7^2) \quad (415)$$

ただし、 f と h は次の調和関数である。

$$H(r) = 1 + \frac{r_0^6}{r^6}, \quad f(r) = 1 - \frac{r_h^6}{r^6}. \quad (416)$$

裸の特異点が生じないためには $r_h^6 \geq 0$ でなければならない。この解のパラメータは h_0 と f_0 の二つであり、チャージ Q と次のように関係している。

$$(r_0^6 + r_h^6)r_0^6 = Q^2 \quad (417)$$

$r = r_h$ が地平面の位置を与え、ここで与えた解は $h \geq r_h$ の範囲で定義されている。 K_4 については次のように与えられる。

$$K_4 = -\frac{ab^2c6Q}{d^7 r^7} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dr = d \left(\frac{1}{H} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \right) \quad (418)$$

すなわち

$$A_3 = \frac{1}{H} dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \quad (419)$$

である。

得られた古典解のエネルギー密度を求めてみよう。一般に、漸近平坦な時空において ADM エネルギー [31] は次のように定義される。

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int (g_{ij,j} - g_{ii,j}) dS_j \quad (420)$$

ただし、 g_{ij} はある時刻における時空の断面の計量であり、無限遠方で δ_{ij} に漸近するものである。積分は空間を取り囲む無限に大きい曲面上で行う。(403) に与えた計量の場合に、曲面としてブレーンを取り囲む $S^2 \times \mathbb{R}^2$ を用いよう。 \mathbb{R}^2 はブレーンに沿った方向である。ブレーンに沿った方向の単位面積あたりのエネルギーは次のようになる。

$$E = \frac{h}{l_p^9} \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega_7 r^7 [-2(b^2)' - 7(d^2)' + \frac{7}{r}(c^2 - d^2)] \quad (421)$$

ニュートン定数が $1/(16\pi G) = h/l_p^9$ と与えられることを用いた。(414) を代入すれば

$$E = \frac{6\Omega_7 h}{l_p^9} \left(r_0^6 + \frac{7}{6} r_h^6 \right) \quad (422)$$

得られたエネルギー密度を、ブレーンの中心電荷密度

$$Z = \frac{Nh}{l_p^3} = \frac{6\Omega_7 h}{l_p^9} Q \quad (423)$$

と比較してみると、 $r_h^6 \geq 0$ であれば $E \geq |Z|$ が成り立つことがわかる。この式は以前に与えた BPS bound とつじつまが合っている。

5.3 AdS/CFT

先ほど得られた M2-ブレーン解で、BPS bound で許される最低エネルギーを持つ解、すなわち $r_h = 0$ で与えられる解をみてみよう。

$$ds^2 = H^{-\frac{2}{3}} \eta_{ij} dy^i dy^j + H^{\frac{1}{3}} (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2) \quad (424)$$

このような解は extremal M2-ブレーンと呼ばれ、 $E = |Z|$ を満足していることからわかるように超対称性が部分的に残っている。(このことを用いると、アインシュタイン方程式を解かなくても解を求めることができる。この方法は § で説明している。) この解の典型的なスケールは r_0 である。このスケールに比べて中心部分に非常に近い部分 ($r \ll r_0$) に注目しよう。このとき $H = r_0^6/r^6$ と近似することができる。その結果、計量は次のようになる。

$$ds^2 = \left(\frac{r^4}{r_0^2} \eta_{ij} dy^i dy^j + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 \right) + r_0^2 d\Omega_7^2 \quad (425)$$

この計量は、括弧でくくった最初の二項によって表される 4 次元空間と、3 項目が表す半径 r_0 の 7 次元球面 S^7 の直積の構造をしている。最初の二項が表す空間は Anti-de Sitter (AdS) 空間と呼ばれる。とくに、ここで現れた AdS 空間は 4 次元であるので、しばしば AdS_4 と表される。

AdS_4 の計量について詳しく見てみよう。文献においてよく用いられる座標へ移るために、

$$r^2 = \frac{r_0^3}{2\rho} \quad (426)$$

という座標変換を行う。その結果

$$ds^2 = L^2 \frac{\eta_{ij} dy^i dy^j + d\rho^2}{\rho^2}, \quad L = \frac{r_0}{2} \quad (427)$$

を得る。 L は AdS 空間の半径と呼ばれるパラメータである。

この計量は、ブレーンの並進対称性、回転対称性に対応した次の対称性をもつ。

$$y^i \rightarrow y^i + a^i, \quad y^i \rightarrow M^i_j y^j \quad M \in SO(1, 2). \quad (428)$$

これら以外に、古典解を考えて初めて現れる次の対称性も存在する。

$$(y^i, \rho) \rightarrow (ay^i, a\rho). \quad (429)$$

y^i という座標はブレーンに沿った方向であり、この変換はブレーン上のスケール変換を与えているとみなすことができる。ブレーンの近傍の時空がこのような対称性を持つことは、ブレーン上の自由度を記述する理論はスケール不変性を持つということを示唆している。(429) は座標 ρ も y^i と同様に変換する。このことは、上で行った $r \propto \rho^{-1/2}$ の小さいところを見るという極限操作が、低エネルギー極限に対応していることを表している。

多くの場合スケール不変性を持つ理論はより大きな共形対称性を持つ。AdS 空間においても、上記の対称性を含むより大きな対称性 $SO(2, 4)$ を持つことが知られている。そして $SO(2, 4)$ はまさに共形対称性の群に他ならない。従って、M2-ブレーン上の理論は共形対称性を持つ理論 (CFT) であると期待される。

このように、AdS 空間上の重力を含む理論 (ここでは M 理論) と平坦な時空上の理論 (ここでは M2-ブレーン上の理論) の低エネルギー極限が対応するという関係を AdS/CFT と呼ぶ。

5.4 熱力学的性質

この解はチャージ Q のほかに、もう一つのパラメータを持っている。これはブレーンのホーキング温度を表すパラメータであると解釈することができる。ホーキング温度 T は表面重力と関係しており、 $2\pi T = h(\partial_r \sqrt{-g_{tt}}) / \sqrt{g_{rr}}|_{\text{hor}}$ によって与えられる。古典解の計量を代入すれば

$$2\pi T = \frac{\hbar a'(r_h)}{c(r_h)} = \frac{\hbar}{2} f'(r_h) H^{-1/2}(r_h) = \frac{3\hbar}{r_h} \left(1 + \frac{r_0^6}{r_h^6}\right)^{-1/2} \quad (430)$$

この温度はブレーン上の場の理論を考える場合には、その場の理論における温度と解釈されるべきものである。ブレーン上の場の理論をブレーン系の低エネルギー極限として定義する場合には、ブレーン上の場の理論におけるエネルギースケールは全てプランクエネルギー h/l_p に比べて十分小さいと仮定しなければならない。温度も同様である。

温度 T とブレーンの枚数 N を固定しておいて、 $l_p \rightarrow 0$ の極限を取ると、パラメータ r_0 と t_h は $r_0 \sim l_p^1$ 、 $r_h \sim l_p^{3/2}$ のように振舞う。より正確には、 l_p についてのべき展開の最低次の項は次の式によって与えられる。

$$r_0^6 = \frac{Nl_p^6}{6\Omega_7}, \quad r_h^2 = \frac{2\pi T}{3\hbar} r_0^3. \quad (431)$$

さらに、このブラックホールのエントロピーを持つ。一般に、ブラックホールのエントロピーはニュートン定数 G と地平面の面積 A を用いて

$$S = \frac{A}{4\hbar G} \quad (432)$$

と与えられる。ここで考えている 11 次元超重力理論の場合にはアインシュタイン作用の係数が

$$\frac{1}{16\pi G} = \frac{\hbar}{l_p^9} \quad (433)$$

であることと上記の計量から求められる地平面の面積が

$$A = \Delta x^1 \Delta x^2 b^2(r_h) \Omega_7 r_h^7 d^7(r_h) = \Delta x^1 \Delta x^2 \Omega_7 r_h^7 H^{1/2}(r_h) \quad (434)$$

ブレーンは無限に広がっているが、ここでは座標 x^1 と x^2 方向の広がりが $\Delta x^1 \times \Delta x^2$ の部分についての面積を与えた。これらと (431) を用いれば、ブレーンの単位面積あたりのエントロピー S が次のように求められる。

$$S = \frac{(2\pi)^4 T^2}{27\hbar^2} \sqrt{\frac{N^3}{6\Omega_7}} \quad (435)$$

エントロピーが T^2 に比例するということは、ブレーン上の場の自由度が共形場の理論によって与えられるということを仮定すれば、そこから次元解析によって決まることである。一般に $S = cT^2$ とすれば、自由エネルギー F や内部エネルギー U は次のように与えられる。

$$F = -\frac{c}{3} T^3, \quad U = \frac{2c}{3} T^3. \quad (436)$$

F は $dF = -SdT$ を用いて、 U は $U = F + TS$ を用いて得ることができる。これらは、熱力学の関係式を用いることなく、直接古典解から読み取ることでもある。

例えば ADM エネルギー (422) が BPS bound で許される最小値、すなわち中心電荷 (423) の絶対値に比較してどれだけ大きいかを計算すると、上に与えた内部エネルギー U に一致することがわかる。

F を求めるには、ユークリッド化された古典解を用いるのが簡単である。場の理論において有限温度の平衡系を扱う便利な方法として「松原の方法」というものが知られている。これは時間方向をユークリッド化 (Wick 回転) してコンパクト化し、その周期を $\beta = \hbar/T$ とみなすというものである。これは温度 T の系における分配関数

$$\text{tr}(e^{-H/T}) \quad (437)$$

があたかも時間発展演算子 $e^{-iHt/\hbar}$ において $t = -i\hbar/T$ という置き換えを行ってトレースを取った形をしているということに基づいている。このことから、有限温度の熱浴中に置かれたブレーンの古典解を考えれば、時間座標をウィック回転した上で新たな時間座標 τ が \hbar/T の周期性を持つようにすればよい。このような古典解は次のように与えられる。

$$ds^2 = H^{-2/3}(r)(f(r)d\tau^2 + dx^2 + dy^2) + H^{1/3}(r)(f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega_7^2) \quad (438)$$

これは地平面に相当する $r = r_h$ も含め、いたるところで滑らかな空間を表している。そのことを確認しておこう。問題となるのは $r = r_h$ の部分である。そこで $r = r_h$ の近傍を調べるために、 $r = r_h + \epsilon^2$ を計量に代入してみよう。ここで興味があるのは τ 方向と r 方向であるので、それ以外の座標は無視する。 ϵ の高次を無視すると、

$$ds^2 = \frac{2r_h}{3}H^{1/3}(r_h) \left(H^{-1}(r_h) \left(\frac{3}{r_h} \right)^2 \epsilon^2 d\tau^2 + d\epsilon^2 \right) \quad (439)$$

となる。これは τ を角度座標、 ϵ を動径座標とする極座標の計量である。この二次元面が原点において滑らかであるためには、 τ に関する周期 $\beta = \hbar/T$ が次の条件を満たしてなければならない。

$$H^{-1/2}(r_h) \frac{3}{r_h} \beta = 2\pi \quad (440)$$

(431) を用いれば、この関係式が確かに成り立つことを確認できる。逆に、ユークリッド化した古典解が特異性を持たないという条件からホーキング温度を求めることもできる。

自由エネルギーは、この古典解のユークリッド化された作用の値と次の関係にある。

$$\frac{F}{T} = \frac{S_E}{\hbar} \quad (441)$$

この関係を用いて F を計算する際には、解の中心部分、すなわち $r \ll r_0$ の部分に注目し、その部分の S_E のみを計算するのがよい。 $r \ll r_0$ の部分では S^7 の半径は一定となり、古典解は S^7 コンパクト化によって得られる 4 次元の重力理論

$$S_E = -\frac{\Omega_7 r_0^7 h}{l_p^9} \int \sqrt{g} \left(R + \frac{6}{L^2} \right) \quad (442)$$

の古典解

$$ds^2 = \frac{r^4}{r_0^4} (f(r)d\tau^2 + dx^2 + dy^2) + \frac{r_0^2}{r^2} f^{-1}(r) dr^2 \quad (443)$$

とみなすことができる。ただし $L = r_0/2$ を定義した。この 4 次元重力理論に対してはアインシュタイン方程式より $R = -12/L^2$ が成り立つので、作用は古典解の体積

$$V = \int \sqrt{g} d^4x \quad (444)$$

を用いて次のように与えられる。

$$S_E = \frac{\Omega_7 r_0^7 h}{l_p^9} \frac{6}{L^2} V = \frac{24 r_0^5 h}{l_p^9} \Omega_7 V \quad (445)$$

によって与えられる。

古典解全体を考えれば当然体積は発散するから、計算を行う際には適当な cutoff を導入する必要がある。ここでは $r = r_{\max}$ を適当に定めて、その上に場の理論が住んでいるとする。古典解を代入すれば体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_{r=r_h}^{r=r_{\max}} d\tau dx^1 dx^2 dr ab^2 c = \frac{1}{6} \beta \Delta x^1 \Delta x^2 \frac{r_{\max}^6}{r_0^5} f(r_{\max}) \\ &= \frac{r_0}{6} (a(r_{\max})\beta) (b(r_{\max})\Delta x^1) (b(r_{\max})\Delta x^2) f^{1/2}(r_{\max}) \end{aligned} \quad (446)$$

が得られる。ここで、 $a\beta$ や $b\Delta x^i$ は計量まで考慮した長さである。特に $a\beta$ を $\tilde{\beta}$ とおいておこう。

$$\tilde{\beta} = a(r_{\max})\beta = \frac{2\pi}{3} \frac{r_0 r_{\max}^2}{r_h^2} \quad (447)$$

従って、自由エネルギーは

$$F = \frac{4r_0^6 h}{l_p^9} \Omega_7 f^{1/2}(r_{\max}) = \frac{4r_0^6 h}{l_p^9} \Omega_7 - \frac{2r_0^6 h}{l_p^9} \Omega_7 \frac{r_h^6}{r_{\max}^6} \quad (448)$$

となる。この第1項は定数であるので無視することにする。第2項をさらに次のように書き換える。

$$F = -2h\Omega_7 \frac{r_0^9}{l_p^9} \frac{r_h^6}{r_0^3 r_{\max}^6} = -2h\Omega_7 \left(\frac{N}{6\Omega_7} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi}{3\tilde{\beta}} \right)^3 = -\frac{(2\pi)^4 T^3}{3^4 \hbar^2} \sqrt{\frac{N^3}{6\Omega_7}} \quad (449)$$

これは以前に求めた値に一致している。

このように、別々の方法で求めた S と F がつじつまが合っているということは、ブラックホールが熱力学的に扱える対象であることを示している。

5.5 自由場との比較

前節で得られた自由エネルギーを自由場の理論のものと比較してみよう。

あるコンパクトな2次元空間上にある自由スカラー場 ϕ を考える。2次元空間の座標を x 、時間座標を t とする。適当な固有関数展開

$$\phi(x, t) = \sum_n \phi_n(t) Y_n(x) \quad (450)$$

を行うことで、スカラー場の作用は次のように各モードの係数 $\phi_n(t)$ を用いて次のように与えることができる。

$$L = \frac{1}{2} \sum_n (\dot{\phi}_n^2 - \omega_n^2 \phi_n^2) \quad (451)$$

ただし ω_n は Y_n に対応する固有振動数であり、エネルギー量子 $\epsilon = \hbar\omega_n$ に対応する。

一般に、ボゾンのエネルギー量子 ϵ による自由エネルギー f は次のように与えられる。

$$Z = e^{-f/T} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/T} = 1 - e^{-\epsilon/T}. \quad (452)$$

すなわち

$$f(\epsilon) = T \log(1 - e^{-\epsilon/T}) \quad (453)$$

である。この自由エネルギーを全てのモードに対して足し上げれば、スカラー場の自由エネルギーを得ることができる。コンパクト空間が体積 V のトーラスである場合を考えよう。 V が十分に大きければ、モードに対する和は相空間上での積分に置き換えることができる。零質量場に対しては、分散関係 $\epsilon = |p|$ が成り立つから、全自由エネルギーが次のように得られる。

$$F = V \int \frac{d^2p}{h^2} f(|p|) = V \frac{T^3}{h^2} \int \log(1 - e^{-x}) d^2x = -2\pi\zeta(3)V \frac{T^3}{h^2}. \quad (454)$$

ここではスカラー場を仮定したが、自由場ボゾン場であれば場のスピンによる影響は自由度の個数を増やすだけである。フェルミオンの場合には統計性が異なるので計算をやり直す必要があるが、その結果、自由度一つあたりボゾンの $3/4$ 倍の寄与を与えることがわかる。従って、 n_B 個の自由ボゾン場と n_F 個の自由フェルミオン場がある場合にその自由エネルギーは

$$\frac{F}{V} = 2\pi\zeta(3) \left(n_B + \frac{3}{4}n_F \right) \frac{T^3}{h^2} \quad (455)$$

となる。

これを M2-ブレーンの自由エネルギーと比較することで以下の点に気づく。

- 温度依存性は T^2 に比例している。これは理論のスケール不変性を仮定すれば次元解析によって決まるものなので両者で一致するのは当然のことである。
- 自由場の場合をみてもわかるように、 T^2 の係数は理論に含まれる effective な自由度の個数とみなすことができる。M2-ブレーン上の理論においては、この個数は $N^{\frac{3}{2}}$ に比例する。

この二番目の性質は、M2-ブレーンの低エネルギー極限として得られる理論が、自明な理論でも自由場の理論でもない、非自明な強結合の理論であることを強く示唆している。

上で求めた自由エネルギーを経路積分表示で計算しておくのも有益である。エネルギー量子 $\epsilon = \hbar\omega$ に対応する自由度 x に対する分配関数は次のような経路積分によって与えることができる。

$$Z(\epsilon) = \int \mathcal{D}x \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int d\tau (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)\right) \quad (456)$$

ユークリッド化された時間方向 τ は周期 $\beta = \hbar/T$ でコンパクト化されているとする。(456)の経路積分を実行するために $x(\tau)$ をさらに次のようにモード展開する。

$$x(\tau) = \sum_k a_k e^{i\omega'_k \tau} \quad (457)$$

ただし

$$\omega'_k = \frac{2\pi k}{\beta} \quad (458)$$

である。従って

$$Z = \prod_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k^2 + \omega^2}} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_k^2}}} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{2\pi T}\right)^2 \frac{1}{k^2}}} \quad (459)$$

ここで全体の係数を無視した。さらに、恒等式

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{\sinh(\pi a)}{\pi a} \quad (460)$$

を用いると、

$$Z = \frac{\frac{\epsilon}{2T}}{\sinh \frac{\epsilon}{2T}} = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon/T}} \quad (461)$$

が得られる。これは (452) に与えたものと一致している。

一つのモードに対する分配関数が経路積分を用いて (456) のように与えられるということは、場の分配関数が

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]/\hbar} \quad (462)$$

によって与えられることを意味している。ただし、背景時空は $M \times S^1$ の構造をしており、 S^1 の周期によって温度が定まる。これは直ちに任意の 3 次元コンパクト多様体上での分配関数に一般化することができる。一般の 3 次元多様体においては時間方向 τ を定義する自然な方法がないので、この分配関数に対して通常の意味での熱力学的な解釈を与えることは難しいが、後でみるように、そのような一般化された分配関数は M2-ブレーンとその上の場の理論の関係を調べる上で重要な役割を果たす。

5.6 S^3 分配関数

平坦な 3 次元時空上の場の理論の分配関数は場の理論においては空間 $X_3 = S^1 \times M$ の上のユークリッド化された場の理論の経路積分 (462) によって与えられる。そして対応する M2-ブレーンの自由エネルギーは 4 次元重力理論 (442) の古典解で同じ空間 X_3 を境界に持つものの古典的作用から (441) によって得ることができる。

この対応関係は、熱力学的な解釈を離れて一般の 3 次元多様体 X_3 に拡張することができる。M2-ブレーンに対する分配関数を次のように定義する。

$$Z = e^{-S_E^{\text{grav}}/\hbar} \quad (463)$$

ただし S_E^{grav} はユークリッド化された 4 次元重力理論 (442) であり、 X_3 を境界として持つ古典解について評価したものである。一方 M2-ブレーン上の場の理論に対する分配関数は、理論に含まれる場をまとめて Φ で表わせれば経路積分

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_E[\Phi]\right) \quad (464)$$

によって与えられる。作用 S_E は空間 X_3 上でのユークリッド化された場の理論の作用である。これら二つは発散項の除去などを適切に行えば一致するはずである。これらの分配関数に対応する「自由エネルギー」がしばしば次のように定義される。

$$Z = e^{-F}. \quad (465)$$

通常自由エネルギーの定義 $Z = e^{-F/T}$ とは定義が異なることに注意しよう。一般の X_3 においては温度 T が定義できないため、通常のように定義することはできない。こうして定義される自由エネルギーは無次元量である。

あとで重要になるのは $X_3 = S^3$ の場合である。重力側の計算は簡単なので、ここで計算しておこう。 S^3 の半径を R としておく。

境界が $X_3 = S^3$ で与えられる古典解は、半径 $L = r_0/2$ の AdS_4 である。

$$ds^2 = L^2(d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2) \quad (466)$$

動径座標 ρ の最大値 ρ_{\max} を、表面の S^3 の半径が R になるように取る。

$$R = L \sinh \rho_{\max} \quad (467)$$

アインシュタイン方程式を用いれば、古典解の作用はその体積と (445) の関係にあるから、体積を求めればよい。体積は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} V &= 2\pi^2 L^4 \int_0^{\rho_{\max}} \sinh^3 \rho d\rho \\ &= 2\pi^2 L^4 \left(\frac{2}{3} - \cosh \rho_{\max} + \frac{1}{3} \cosh^3 \rho_{\max} \right) \\ &= 2\pi^2 L^4 \left(\frac{1}{3} \frac{R^3}{L^3} - \frac{3R}{2L} + \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{L}{R}\right) \right) \end{aligned} \quad (468)$$

従って、重力理論の古典的作用は次のように与えられる。

$$S_E^{\text{grav}} = h \left(\frac{\pi^4}{24\Omega_7} \right)^{1/2} N^{3/2} \left(\frac{1}{3} \frac{R^3}{L^3} - \frac{3R}{2L} + \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{L}{R}\right) \right) \quad (469)$$

R に依存しない定数項に注目すると、対応する自由エネルギーが次のように決まる。

$$F = 2\pi N^{3/2} \sqrt{\frac{\pi^4}{54\Omega_7}} \quad (470)$$

ここで、内部空間が S^7 の場合には

$$\Omega_7 = \frac{\pi^4}{3} \quad (471)$$

であるから

$$F = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi N^{3/2} \quad (472)$$

が得られる。これが S^3 自由エネルギーと呼ばれる量である。上で述べたようにこれは通常自由エネルギーとは次元が異なり、無次元量である。

次の章では、この自由エネルギーが ABJM の S^3 自由エネルギーと数係数まで含めて完全に一致することを見る。

5.7 ABJM モデル

これまでに与えた M2-ブレーン古典解を用いた解析の結果は、重なった M2-ブレーンは相互作用のある共形場理論によって記述されることを示唆している。M2-ブレーンが 1/2 BPS であることから、その理論は $\mathcal{N} = 8$ の超対称性を持つと期待されるが、そのような超対称性を持つラグランジアンを構成する試みはなかなか成功しなかった。Bagger, Lambert[19, 20, 21] と Gustavsson[22, 23] は、初めてこの対称性を持つ理論を構成し、現在 BLG モデルと呼ばれている。このモデルは $SU(2) \times SU(2)$ の Chern-Simons 理論であり、任意枚数の M2-ブレーンを記述する理論としては成功しなかったが、大きな超対称性 ($\mathcal{N} \geq 4$) を持つ初めての Chern-Simons 理論の例であり、その後の進展に大きな影響を与えた。

$\mathcal{N} \geq 4$ の超対称性を持つ Chern-Simons 理論の特徴は、そのゲージ群が自由には選べないという点である。たとえば $\mathcal{N} = 8$ の場合には上で述べたように $SU(2) \times SU(2)$ しか許されない。Aharony, Bergman, Jafferis, Maldacena は $\mathcal{N} = 6$ の超対称性を持つ $U(N) \times U(N)$ Chern-Simons 理論を構成した。[18] このモデルはゲージ群のサイズ N を任意の値に取ることができ、これを M2-ブレーンの枚数とみなすことで、任意枚数の重なった M2-ブレーンの低エネルギー有効作用を与えると考えられており、現在 ABJM モデルと呼ばれている。ABJM モデルの超対称性は、ラグランジアンレベルでは $\mathcal{N} = 6$ であるが、非摂動的な効果によって $\mathcal{N} = 8$ に拡大すると期待されている。[24, 25]

ABJM モデルの作用を与えよう。ここでは $\mathcal{N} = 2$ の超場を用いて与える。3次元スピノルに関する約束については §E を参照してほしい。

ABJM モデルはゲージ群 $U(N) \times U(N)$ を持つ Chern-Simons 理論である。二つの $U(N)$ ゲージ群を $U(N)_I$ ($I = 1, 2$) とする。対応するベクトル多重項を V_I ($I = 1, 2$) とする。さらに $U(N)_I$ の随伴表現に属するカイラル多重項 Φ_I と (N, \bar{N}) 表現に属する二つのカイラル多重項 A^i ($i = 1, 2$) そして (\bar{N}, N) 表現に属する二つのカイラル多重項 B^i ($i = 1, 2$) が含まれる。この理論のクイバー図形を図 12 に与えた。

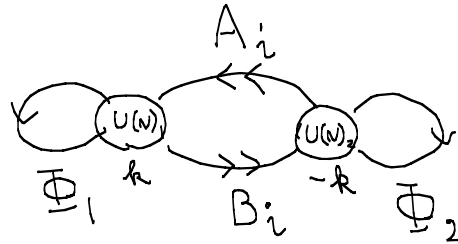


図 12: ABJM モデルのクイバー図形

ベクトル多重項の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 S_{\text{CS}} &= - \sum_{I=1,2} \frac{\hbar k_I}{4\pi} \int d^3x d^4\theta \text{tr}(DV_I \bar{D}V_I + \dots) \\
 &= \sum_{I=1,2} \frac{\hbar k_I}{2\pi} \int d^3x \text{tr} \left[-\sigma_I D_I + \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} A_\mu^I \partial_\nu A_\rho^I - \frac{i}{3} A_\mu^I A_\nu^I A_\rho^I \right) + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \quad (473)
 \end{aligned}$$

… の部分はゲージ群が非アーベル群の場合、すなわち $N \geq 2$ の場合に存在する相互作用項であり、成分場で表したときのチャーンサイモン項の 3 次の項に相当する。 k_I は Chern-Simons レベルと呼ばれるパラメータであり、 $k_1 + k_2 = 0$ である。次のようにおく。

$$k_1 = k, \quad k_2 = -k. \quad (474)$$

大きなゲージ変換との無矛盾性より k は整数でなければならない。カイラル多重項については、超場を用いた表式だけを与えておこう。随伴表現に属するカイラル多重項 Φ_I の作用は

$$S_{\text{adj}} = -\frac{\hbar k}{4\pi} \int d^3x d^2\theta \text{tr}(\Phi_1^2 - \Phi_2^2) + \text{c.c.} \quad (475)$$

である。 Φ_I は運動項を持たない補助場であり、運動方程式を用いて消去することができる。双基本表現に属する場については作用は次のように与えられる。

$$S_{\text{matter}} = \frac{\hbar}{2\pi} \int d^3x d^4\theta \text{tr}(A_i^\dagger e^{2V_1} A^i e^{-2V_2} + B^i e^{-2V_1} B_i^\dagger e^{2V_2}) \\ + \left[\frac{\hbar}{2\pi} \sqrt{2} \int d^3x d^2\theta \text{tr}(\epsilon_{ij} B^i \Phi_1 A^j + \epsilon_{ij} A^i \Phi_2 B^j) + \text{c.c.} \right] \quad (476)$$

この作用は $\mathcal{N} = 2$ の超場で書かれているから、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称変換のもとでの不変性は明らかである。ベクトル多重項 $V = (A_\mu, \sigma, \lambda, D)$ に対する $\mathcal{N} = 2$ 超対称変換は次のように与えられる。

$$\delta_Q \sigma = (\xi \bar{\lambda}) + (\bar{\xi} \lambda), \\ \delta_Q A_\mu = i(\xi \gamma_\mu \bar{\lambda}) - i(\bar{\xi} \gamma_\mu \lambda), \\ \delta_Q D = -(\xi \gamma^\mu D_\mu \bar{\lambda}) - (\bar{\xi} \gamma^\mu D_\mu \lambda) + (\xi[\sigma, \bar{\lambda}]) + (\bar{\xi}[\sigma, \lambda]), \\ \delta_Q \lambda = \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \xi F_{\mu\nu} - \gamma^\mu \xi D_\mu \sigma + D \xi. \quad (477)$$

パラメータ ξ は複素スピノルである。カイラル多重項 $\Phi = (\phi, \psi, F)$ に対しては、変換則は次のようになる。

$$\delta_Q \phi = \sqrt{2}(\xi \psi), \\ \delta_Q \psi = \sqrt{2}\xi F + \sqrt{2}\bar{\xi} \sigma \phi - \sqrt{2}\gamma^\mu \bar{\xi} D_\mu \phi, \\ \delta_Q F = -\sqrt{2}(\bar{\gamma}^\mu D_\mu \psi) - \sqrt{2}(\bar{\xi} \sigma \psi) - 2(\bar{\xi} \lambda) \phi. \quad (478)$$

実は、ABJM モデルの作用は $\mathcal{N} = 6$ の超対称性のもとで不変である。このことが明らかな形に作用を書くには補助場をすべて消去した上でカイラル多重項 A^i と B^i に含まれるスカラー場とスピノル場を次のように置くのが良い。

$$A^1 = (q^1, -\psi_4), \quad A^2 = (q^4, \psi_1), \quad B^1 = (q_3^\dagger, -\bar{\psi}^2), \quad B^2 = (q_2^\dagger, \bar{\psi}^3) \quad (479)$$

こうすると、作用は Chern-Simons 項

$$S_{\text{CS}} = \frac{\hbar}{2\pi} \int d^3x \text{tr} \left[\frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu^1 \partial_\nu A_\rho^1 - \frac{4\pi i}{3} A_\mu^1 A_\nu^1 A_\rho^1 \right) - \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left(A_\mu^2 \partial_\nu A_\rho^2 - \frac{4\pi i}{3} A_\mu^2 A_\nu^2 A_\rho^2 \right) \right] \quad (480)$$

および物質場を含む以下の項の和になる。

$$\begin{aligned} S_{\text{kin}} &= \frac{\hbar}{2\pi} \int d^3x \text{tr} \left[-D_\mu \bar{q}_i D^\mu q^i + \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi \right], \\ S_{\text{pot}} &= \frac{2\hbar}{2\pi k^2} \int d^3x \text{tr} \left[-q^i \bar{q}_i q^k \bar{q}_j q^j \bar{q}_k + \frac{1}{6} q^k \bar{q}_i q^i \bar{q}_j q^j \bar{q}_k + \frac{1}{6} q^i \bar{q}_i q^j \bar{q}_j q^k \bar{q}_k + \frac{2}{3} q^i \bar{q}_k q^j \bar{q}_i q^k \bar{q}_j \right], \\ S_Y &= -\frac{\hbar}{2\pi k} \int d^3x \text{tr} \left[2\psi_i \bar{\psi}^j q^i \bar{q}_j - 2\bar{\psi}^i \psi_j \bar{q}_i q^j - \psi_i \bar{\psi}^i q^j \bar{q}_j + \bar{\psi}^i \psi_i \bar{q}_j q^j \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{ijkl} \psi_i \bar{q}_j \psi_k \bar{q}_l - \epsilon_{ijkl} \bar{\psi}^i q^j \bar{\psi}^k q^l \right] \quad (481) \end{aligned}$$

作用をこのように書き換えるとこの理論が大域的対称性 $SU(4) \times U(1)$ を持つことが明らかになる。それぞれの場は表 3 のように変換される。添え字 $i = 1, 2, 3, 4$ は $SU(4)$ の添え

表 3: ABJM モデルのゲージ対称性と大域的対称性

	$U(N)_1$	$U(N)_2$	$SU(4)_R$	$U(1)_B$
A^1	adj	1	1	0
A^2	1	adj	1	0
q^i	N	\bar{N}	4	1
ψ_i	N	\bar{N}	$\bar{4}$	1

字である。

上に与えた作用は次の超対称変換のもとで不変である。

$$\begin{aligned} \delta q^i &= \sqrt{2} \xi^{ij} \psi_j, \\ \delta \psi_i &= -\sqrt{2} \gamma^\mu \xi_{ij} D_\mu q^j + \frac{\sqrt{2}}{k} \xi_{ij} (q^k \bar{q}_k q^j - q^j \bar{q}_k q^k) - \frac{2\sqrt{2}}{k} \xi_{jk} (q^j \bar{q}_i q^k), \\ \delta A_\mu^1 &= -\frac{\sqrt{2}i}{k} \left[\xi_{ij} \gamma_\mu (q^i \bar{\psi}^j) + \xi^{ij} \gamma_\mu (\psi_i \bar{q}_j) \right], \\ \delta A_\mu^2 &= \frac{\sqrt{2}i}{k} \left[\xi^{ij} \gamma_\mu (\bar{q}_i \psi_j) + \xi_{ij} \gamma_\mu (\bar{\psi}^i q^j) \right]. \quad (482) \end{aligned}$$

ただし、超対称変換のパラメータ ξ_{ij} は $SU(4)$ の 6 表現に属し、以下の関係式を満たす。

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}, \quad (\xi_{ij})^* = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \xi_{kl} \quad (483)$$

この拘束条件のために、変換パラメータはマヨラナスピノル 6 個分の自由度を持つ。従って、この超対称性は $\mathcal{N} = 6$ である。上で与えた $\mathcal{N} = 2$ 超対称変換はパラメータ $\xi_{12} = \xi$ による超対称変換に対応する。場および超対称変換パラメータの次元は以下の通りである。

$$A_\mu^{1,2} : [L^{-1}], \quad q_i : [L^{-1/2}], \quad \psi^i : [L^{-1}], \quad \xi_{ij} : [L^{1/2}]. \quad (484)$$

5.8 モジュライ空間

ABJM が M2-ブレーンを記述していると主張する上で重要な性質の一つは、ABJM モデルのモジュライ空間が N 枚のブレーンの運動を与えるモジュライ空間に一致するということである。

モジュライ空間はスカラー場の真空期待値の取り得る値のなす空間のことである。3次元では 1-フォーム場の双対場が 0-フォーム、すなわちスカラー場になるため、ABJM モデルのモジュライ空間を決定するためにはゲージ場の双対場を考慮することが必要になる。以下ではまず、ゲージ場の効果を見捨ててモジュライ空間を求め、そのあとにゲージ場がどのような役割を果たすかを見ることにしよう。

ABJM モデルのポテンシャルは次のように書くことができる。

$$V(q) = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2}{3k^2} \int d^3x \operatorname{tr} (Q_k^{i,j} (Q_k^{i,j})^\dagger) \quad (485)$$

ただし、 $Q_k^{i,j}$ は次のように定義される。

$$Q_k^{i,j} = T_k^{i,j} - \frac{1}{2} \delta_k^j T_l^{i,l} + \frac{1}{2} \delta_k^i T_l^{j,l}, \quad T_k^{i,j} = q^i \bar{q}_k q^j - q^j \bar{q}_k q^i \quad (486)$$

上記のポテンシャルは非負である。従ってポテンシャルの極小点は $Q_k^{i,i} = 0$ によって与えられる。これは $T_k^{i,j} = 0$ と等価である。もし全ての q^i が対角的であれば、それは明らかに解である。

$$q^i = \begin{pmatrix} q_{(1)}^i \\ q_{(2)}^i \\ \vdots \\ q_{(N)}^i \end{pmatrix}. \quad (487)$$

ゲージ場の効果を見捨てれば、 $q_{(m)}^i$ を m 番目の M2-ブレーンの座標とみなすことによりブレーンの運動と ABJM モデルのスカラー場の真空期待値の間に対応をつけることができる。

ゲージ場の寄与を考えると、これが多少変更される。以下では話を簡単にするために、 N 枚の M2-ブレーンがばらばらに存在する場合、すなわちスカラー場の対角成分 $q_{(m)}^i$ が m ごとにすべて異なる場合について考えよう。この場合、ヒッグス機構によって一部の場は質量を獲得する。それらの場を見捨て、零質量の場だけを残すと互いに相互作用のない N

個の独立した理論が得られる。それぞれの理論はゲージ群が $U(1) \times U(1)$ の ABJM モデルである。この、一つのブレーンに対応する部分にのみ注目すると、作用は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{\hbar k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} (A_\mu^1 \partial_\nu A_\rho^1 - A_\mu^2 \partial_\nu A_\rho^2), \\ S_{\text{kin}} &= \frac{\hbar}{2\pi} \int d^3x \text{tr} \left[-D_\mu \bar{q}_i D^\mu q^i + \bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu \psi \right] \end{aligned} \quad (488)$$

ただし共変微分は

$$D_\mu q^i = \partial_\mu q^i - i(A_\mu^1 - A_\mu^2)q^i \quad (489)$$

と定義される。ゲージ場との極小結合を除き、物質場の相互作用項は消える。

二つのゲージ場は、共変微分の中に $A_\mu^B = A_\mu^1 - A_\mu^2$ の形でのみ現れる。作用を A_μ^B と A_μ^1 を用いて書き換えれば

$$S = \frac{\hbar k}{2\pi} \int \left(A^1 dA^B - \frac{1}{2} A^B dA^B \right) + S_{\text{matter}}[A^B] \quad (490)$$

S_{matter} は物質場の運動項であり、ゲージ場は A_1^B のみを含む。ここで、 A^1 についての運動方程式を求めるとゲージ場 A_1^B に対する拘束条件

$$dA_1^B = 0 \quad (491)$$

が得られる。これは次のように解くことができる。

$$kA_1^B = da. \quad (492)$$

ここで a はスカラー場であり、双対光子と呼ばれる。 a は F_2^1 の正準共役量であるが、フラックスの量子化条件

$$\oint F_2^1 \in 2\pi\mathbf{Z} \quad (493)$$

があるために、 a は周期が 2π の角度変数である。

双対光子は新たな自由度を与えない。なぜなら (492) はゲージ変換

$$\delta A_\mu^B = \partial\lambda \quad (494)$$

のもとで a が

$$\delta a = k\lambda \quad (495)$$

と変換されることを意味しているから、ゲージ変換によって吸収できてしまうためである。 $a = 0$ というゲージ固定を行おう。 a は周期 2π の角度変数なので、これは a が整数であるといっているのと同じことである。このゲージ固定により、連続的なゲージ対称性は固定されるが、まだ $\lambda = 2\pi n/k$ による離散的変換はまだ固定されずに残る。このため、スカラー場に対する変換

$$q^i \sim e^{2\pi i n/k} q^i, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (496)$$

はゲージ変換であり、この変換によって互いに移りあう点は同じ点であるとみなす同一視を行わなければならない。従って、ABJM モデルは $\mathbf{C}^4/\mathbf{Z}_k$ 上を運動する N 枚の M2-ブレーンを表す。特に $k = 1$ であれば、 \mathbf{C}^4 上にいる M2-ブレーンを表していると考えられる。

6 厳密な分配関数

6.1 局所化を用いた分配関数の計算

次の経路積分によって定義される ABJM モデルの分配関数を計算したい。

$$Z = \int \mathcal{D}\Psi e^{-S[\Psi]/\hbar} \quad (497)$$

ただし Ψ は ABJM モデルに含まれる全ての場を表し、 S はユークリッド化された ABJM 作用を表す。体積による発散を避けるために S^3 でコンパクト化しておく。

AdS/CFT によって期待されるのは $Z = e^{-F}$ によって定義される自由エネルギーが次のように与えられることである。

$$F \propto N^{\frac{3}{2}} \quad (498)$$

このような N 依存性は摂動論では得ることができない。

実は、超対称性をうまく用いることで、自由エネルギーを厳密に計算することができる。3次元の超共形場理論に対するこのような計算は始めに [5] において一般公式が与えられ、その後 [6] および [7] においてラージ N 極限における解析がなされた。([5] で与えられた一般公式は、カイラル多重項のがカノニカルな共形次元 $1/2$ を持つ場合のものである。ABJM モデルについての計算を行う場合にはこれで十分であるが、以下ではそれを任意の共形次元を持つカイラル多重項にまで一般化した公式を与えることにする。このような拡張は [28, 29] においてなされた。)

このような計算を行うためには ABJM モデルの持つ $\mathcal{N} = 6$ のような大きな超対称性は必要ではなく、 $\mathcal{N} = 2$ の超共形対称性があれば十分である。そこで、3次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形対称性についてまとめておこう。

S を不変に保つ、ある超対称変換を δ_1 と書くことにしよう。この変換は $\delta_1^2 = 0$ を満足すると仮定しておく。これを用いて (497) を次のように変形しよう。

$$Z = \int \mathcal{D}\Psi e^{(-S[\Psi] + t\delta_1 V)/\hbar} \quad (499)$$

これは実は変形パラメータ t に依存しない。実際、 t で微分してみると

$$\frac{dZ}{dt} = \int \mathcal{D}\Psi (\delta_1 V) e^{(-S[\Psi] + t\delta_1 V)/\hbar} = \int \mathcal{D}\Psi \delta_1 (\hbar^{-1} V e^{(-S[\Psi] + t\delta_1 V)/\hbar}) = 0 \quad (500)$$

となり、 t に依存しないことがわかる。我々が求めたいのは (497) であるが、直接 (497) の定義を用いなくても、任意の t において (499) を用いることで計算してもよい。 $\delta_1 V$ が場の運動項を与えるように V を選ぶことができれば、 $t \rightarrow \infty$ 極限は弱結合極限であり、相互作用項を無視することができる。そして (499) の経路積分は有限個の自由度を除きガウス積分になるために計算することができる。

この方法は δ_1 を定義できる任意の背景上で用いることができる。たとえば、平坦な背景上ではカイラル多重項の運動項は二つの線形独立な定数スピノルを ϵ_1 と ϵ_2 に対応する超

対称変換 δ_1 と δ_2 を用いて次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{def}} &= ht \int d^3x \int d^4\theta \Phi^\dagger e^V \Phi = ht \int d^3x D^2 \bar{D}^2 (\Phi^\dagger e^V \Phi)|_{\theta=0} = ht \delta_1 \delta_2 \int d^3x (\bar{D}^2 (\Phi^\dagger e^V \Phi)|_{\theta=0}) \\ &= ht \delta_1 \delta_2 \int d^3x (F^\dagger \phi) \end{aligned} \quad (501)$$

従って、

$$V \propto h \delta_2 \int d^3x (F^\dagger \phi) \quad (502)$$

と選ぶことで変形項がカイラル多重項の運動項になる。

ベクトル多重項についても同様であるが、通常のベクトル多重項の運動項 $\int d^2\theta WW + \int d^2\theta \bar{W}\bar{W}$ のうち、 δ_1 exact term として再現できるは第 1 項だけであることに注意しよう。

$$S_{\text{def}} = ht \int d^3x \int d^2\theta \text{tr} WW = ht \delta_1 \delta_2 \int d^3x \text{tr} \lambda \lambda \quad (503)$$

しかし、局所化を行い、分配関数を行うためには、以下で見るようにこれだけで十分である。ここであげた変形項の例は平坦な時空中のものであったが、同様な方法で曲がった背景上の理論に対しても変形項を構成することが可能である。

6.2 共形平坦な背景上での超対称性

$\mathcal{N} = 2$ 超対称変換則を共形平坦な時空中の上での変換則に拡張しよう。

平坦な 3 次元ミンコフスキー時空中において、ベクトル多重項に対する超対称変換は (477) である。もう一度与えておこう。

$$\begin{aligned} \delta_Q^0 \sigma &= (\bar{\lambda} \xi) + (\bar{\xi} \lambda), \\ \delta_Q^0 A_\mu &= -i(\bar{\lambda} \gamma_\mu \xi) - i(\bar{\xi} \gamma_\mu \lambda), \\ \delta_Q^0 D &= (D_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \xi) - (\bar{\xi} \gamma^\mu D_\mu \lambda) + ([\sigma, \bar{\lambda}] \xi) + (\bar{\xi} [\sigma, \lambda]), \\ \delta_Q^0 \lambda &= \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \xi F_{\mu\nu} - \gamma^\mu \xi D_\mu \sigma + D \xi, \\ \delta_Q^0 \bar{\lambda} &= \frac{i}{2} \bar{\xi} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\xi} \gamma^\mu D_\mu \sigma + D \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (504)$$

ただし、これが平坦な時空中での変換則であることを強調するために δ_Q ではなく δ_Q^0 と書いた。

この超対称変換 Q を一般の共形平坦な背景のもとでの変換則に一般化しよう。共形平坦な時空というのは、ワイル変換を用いて平坦な時空に移ることのできるものを意味する。ワイル変換は背景の計量に次のように作用する。

$$e_\mu^m = e^{-\alpha} e'^m_\mu \quad (505)$$

この変換のもとで、共形次元が n である場 Φ は次のように変換される。

$$\Phi = e^{n\alpha}\Phi' \quad (506)$$

ベクトル多重項の場合および変換パラメータの共形次元は次のように与えられる。

$$\xi: -\frac{1}{2}, \quad \bar{\xi}: -\frac{1}{2}, \quad A_\mu: 0, \quad \sigma: 1, \quad D: 2, \quad \lambda: \frac{3}{2}, \quad \bar{\lambda}: \frac{3}{2}. \quad (507)$$

(A_μ のウェイトが 0 であることに注意しよう。これに対し、 $A_m = e_m^\mu A_\mu$ のウェイトは 1 である。) このようにウェイトを割り当てておくと、(504) に与えた全ての変換則について、全ての項のウェイトは一致している。従って、ワイル変換のパラメータ α が定数である限り変換則はその形を変えない。

このことを拡張し、共形平坦な時空中の場の共形変換を (504) の変換則に対して局所的な共形変換を行うことで定義しよう。つまり、 e_μ^m が共形平坦な時空 M 上の多脚場、 $e_\mu^{m'}$ が M と共形変換 (505) によって関係する平坦な時空 M' 上の多脚場とする。共形次元が n である M 上の場 Φ の超対称変換を

$$\delta_Q \Phi = e^{n\alpha} \delta_Q^0 \Phi' \quad (508)$$

によって定義する。ただし $\Phi' = e^{-n\alpha}\Phi$ は M 上の場 Φ を共形変換によって平坦な時空 M' 上に移したものである。これにより任意の共形平坦な背景上での超対称変換が定義される。

このような定義の問題点は、共形平坦な時空中の計量が与えられたときに、平坦な時空へ移るための共形変換 α を具体的に与えなければならないことである。場 Φ の超対称変換が微分を含まない場合には、(508) の右辺を M 上の場で書き換えると、両辺の共形変換の因子が相殺し、 α 依存性は残らない。しかし変換則が微分を含む場合には $\partial\alpha$ を含む項が現れる。このような項をうまく扱うには、変換則に現れる微分を共形共変な形に書き換えておけばよい。すなわち、ある微分 $D^{\text{cov}}\Phi$ を導入し、その共形変換が $e^{n\alpha} D^{\text{cov}}\Phi$ のように与えられるようにすればよい。このような共変微分を定義するには、通常は対応するゲージ場を導入することが必要である。しかしここでは、変換パラメータ ξ の微分を用いることでそのような共変変化をうまく行うことができる。

変換パラメータ ξ が共形ウェイト $-1/2$ を持つことと、スピン接続がワイル変換 (505) のもとで

$$\omega_{\lambda-mn}(e) = \omega_{\lambda-mn}(e') - (e'_{\lambda m} e_n^{\prime\kappa} - e'_{\lambda n} e_m^{\prime\kappa}) \partial_\kappa \alpha \quad (509)$$

と変換されることを用いれば、変換パラメータの微分 $D_\mu \xi$ のワイル変換が次のように与えられる。

$$D_\mu \xi = e^{-\alpha/2} \left(D'_\mu \xi' - \frac{1}{2} \gamma'_\mu \gamma^{\prime\kappa} \xi' \partial_\kappa \alpha \right) \quad (510)$$

この変換は、ゲージ場の変換則右辺が変換パラメータの微分 $\partial_\kappa \alpha$ を含んでいるという点においてゲージ場の変換則に類似している。このことをうまく利用し、 $D_\mu \xi$ をゲージ場のように入用することで、共形変換のもとで共変に変換される、すなわち $\partial\alpha$ が変換の中に現れ

ないような量を作ることができる。たとえば (504) に現れる微分項に対しては、次のように $D\xi$ を組み合わせればよい。

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\sigma)\gamma^\mu\xi &\rightarrow (\partial_\mu\sigma)\gamma^\mu\xi + \frac{2}{3}\sigma\gamma^\mu D_\mu\xi, \\(\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\lambda) &\rightarrow (\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\lambda) + \frac{1}{3}(D_\mu\bar{\xi}\gamma^\mu\lambda)\end{aligned}\quad (511)$$

新たに加えられた項は、背景が平坦であり変換パラメータ ξ が定数スピノルである場合には0であるので、何ら影響を与えない。従って、平坦な背景上では自由にこの置き換えを行うことができる。さらに、共形変換のもとでこれらは次のように $\partial\alpha$ を含む項を与えない。

$$\begin{aligned}(\partial_\mu\sigma)\gamma^\mu\xi + \frac{2}{3}\sigma\gamma^\mu D_\mu\xi &= e^{\frac{3}{2}\alpha} \left[(\partial_\mu\sigma')\gamma'^\mu\xi' + \frac{2}{3}\sigma'\gamma'^\mu D'_\mu\xi' \right], \\(\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\lambda) + \frac{1}{3}(D_\mu\bar{\xi}\gamma^\mu\lambda) &= e^{2\alpha} \left[(\bar{\xi}')\gamma'^\mu D'_\mu\lambda' + \frac{1}{3}(D'_\mu\bar{\xi}')\gamma'^\mu\lambda' \right]\end{aligned}\quad (512)$$

従って、(511) の置き換えを行った超対称変換則

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= (\bar{\lambda}\epsilon) + (\bar{\epsilon}\lambda), \\ \delta A_\mu &= -i(\bar{\lambda}\gamma_\mu\epsilon) - i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda), \\ \delta D &= (D_\mu\bar{\lambda}\gamma^\mu\epsilon) - (\bar{\epsilon}\gamma^\mu D_\mu\lambda) + ([\sigma, \bar{\lambda}]\epsilon) + (\bar{\epsilon}[\sigma, \lambda]) + \frac{1}{3}(\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\epsilon) - \frac{1}{3}(D_\mu\bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda), \\ \delta\lambda &= \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\epsilon F_{\mu\nu} - \gamma^\mu\epsilon D_\mu\sigma + D\epsilon - \frac{2}{3}\gamma^\mu D_\mu\epsilon\sigma, \\ \delta\bar{\lambda} &= \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\epsilon}\gamma^\mu D_\mu\sigma + D\bar{\epsilon} + \frac{2}{3}D_\mu\bar{\epsilon}\gamma^\mu\sigma.\end{aligned}\quad (513)$$

は任意の共形平坦な背景上でそのまま用いることができる。ここで、変換パラメータとして ξ のかわりに ϵ を用いた。この理由はあとで明らかになる。

この変換則 (513) に現れる変換パラメータ ϵ は定数スピノルではない (曲がった時空の場合には一般に定数スピノルを定義できないから当然である。) が、平坦な時空の定数スピノルに対してワイル変換を行って得られるものでなければならない。この条件は次のように書くこともできる。

$$D_\mu\epsilon = \gamma_\mu\kappa \quad (514)$$

ただし κ は任意のスピノルである。この条件式はキリング方程式と呼ばれる。この式によって、 ϵ が平坦な時空上の定数スピノルとワイル変換でつながることは以下のように保障される。まず、(514) の関係式はワイル変換によって (κ を適当に再定義することにより) 形を変えない。従って、もし ϵ が (514) を満足すれば、それをワイル変換して得られる平坦な時空上のスピノル ϵ' も (514) と同じ形の式、すなわち

$$D'_\mu\epsilon' = \gamma'_\mu\kappa' \quad (515)$$

を満足するはずである。平坦な時空の上で直交座標系を取っているとすれば、これは簡単に解くことができ、次の一般解を得る。

$$\epsilon' = \xi - \chi'\zeta \quad (516)$$

ただし ξ と ζ は x'^{μ} 空間上の定数スピノルである。 ξ によって表される部分は確かに定数スピノルである。さらに、 $\epsilon' = -\chi'\zeta$ という部分についても、インバージョン変換

$$x''^{\mu} = \frac{x'^{\mu}}{x'_{\lambda}x'^{\lambda}} \quad (517)$$

によって定義される x''^{μ} 空間上の定数スピノルであることが確認できる。(x''^{μ} 空間が平坦になるように適当にワイル変換を行う必要がある。) 従って、(514) を満足する ϵ は平坦時空の定数スピノルとワイル変換でつながっている。

実は、平坦な時空上での解 (516) の第 2 項は、しばしば S によって表される超共形変換に対応するものである。従って、(513) の形に超対称変換を書き換えておくことには、平坦ではない共系平坦な時空に対して適用できるということだけではなく、平坦な時空における S 変換が $\epsilon = -\chi\zeta$ を代入するだけで得ることができるという利点もある。

同様の方法を用いて、平坦な背景上で与えたカイラル多重項の超対称変換を一般の共形平坦な時空上のものに拡張することができる。平坦な背景上で、共形次元が $n_D = n_R = n$ のカイラル多重項、すなわち成分場のウェイトが

$$\phi : n \quad \psi : n + \frac{1}{2} \quad F : n + 1 \quad (518)$$

と与えられる多重項を考えよう。 Q 変換は (478) である。もう一度与えておこう。

$$\begin{aligned} \delta_Q^0 \phi &= \sqrt{2}(\xi\psi), \\ \delta_Q^0 \psi &= \sqrt{2}\xi F + \sqrt{2}\bar{\xi}\sigma\phi - \sqrt{2}\gamma^{\mu}\bar{\xi}D_{\mu}\phi, \\ \delta_Q^0 F &= -\sqrt{2}(\bar{\xi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi) - \sqrt{2}(\bar{\xi}\sigma\psi) - 2(\bar{\xi}\lambda)\phi. \end{aligned} \quad (519)$$

変換則 (519) に含まれる微分項の共形共変化は

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu}\phi)\gamma^{\mu}\bar{\xi} &\rightarrow (\partial_{\mu}\phi)\gamma^{\mu}\bar{\xi} + \frac{2}{3}n\phi\gamma^{\mu}D_{\mu}\bar{\xi}, \\ (\bar{\xi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi) &\rightarrow (\bar{\xi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi) + \frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{2}\right)(D_{\mu}\bar{\xi}\gamma^{\mu}\psi) \end{aligned} \quad (520)$$

のように行うことができる。こうして、次の変換則が得られる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}(\epsilon\psi), \\ \delta\psi &= \sqrt{2}\epsilon F + \sqrt{2}\bar{\epsilon}\sigma\phi - \sqrt{2}\gamma^{\mu}\bar{\epsilon}D_{\mu}\phi - \frac{2\sqrt{2}}{3}n\phi\gamma^{\mu}D_{\mu}\bar{\epsilon}, \\ \delta F &= -\sqrt{2}(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi) - \sqrt{2}(\bar{\epsilon}\sigma\psi) - 2(\bar{\epsilon}\lambda)\phi - \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(n - \frac{1}{2}\right)(D_{\mu}\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}\psi), \\ \delta\phi^{\dagger} &= \sqrt{2}(\bar{\epsilon}\bar{\psi}), \\ \delta\bar{\psi} &= \sqrt{2}\bar{\epsilon}F^{\dagger} + \sqrt{2}\epsilon\phi^{\dagger}\sigma - \sqrt{2}\gamma^{\mu}\epsilon D_{\mu}\phi^{\dagger} - \frac{2\sqrt{2}}{3}n\phi^{\dagger}\gamma^{\mu}D_{\mu}\epsilon, \\ \delta F^{\dagger} &= -\sqrt{2}(\epsilon\gamma^{\mu}D_{\mu}\bar{\psi}) - \sqrt{2}(\epsilon\bar{\psi}\sigma) - 2\phi^{\dagger}(\epsilon\lambda) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(n - \frac{1}{2}\right)(D_{\mu}\epsilon\gamma^{\mu}\bar{\psi}). \end{aligned} \quad (521)$$

6.3 S^3 分配関数の計算 (ベクトル多重項)

局所化を用いて S^3 上の分配関数を求めるには、 S^3 上の超対称性を用いる必要がある。半径が r である S^3 上のキリングスピノルは ϵ に対応するものが 4 個、 $\bar{\epsilon}$ に対応するものが 4 個ある。ここでは ϵ に対応するものを用いる。 ϵ に対する 4 つのキリングスピノルのうち、二つは次のキリング方程式を満たす。

$$D_\mu \epsilon = \frac{i}{2r} \gamma_\mu \epsilon \quad (522)$$

あとの二つは符号が逆の微分方程式を満足する。ここでは (522) を満足する二つの線形独立なキリングスピノル ϵ_1 と ϵ_2 に注目し、それらに対応する超対称変換を δ_1 、 δ_2 とする。以下ではこれらを用いて作用の変形項を構成し、局所化により分配関数を計算する。

(522) を満足するキリングスピノル、すなわち ϵ_1 と ϵ_2 の線形結合を ϵ とすれば、対応する超対称変換 δ はベクトル多重項に対して次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta \sigma &= (\bar{\lambda} \epsilon), \\ \delta A_\mu &= -i(\bar{\lambda} \gamma_\mu \epsilon), \\ \delta D &= (D_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \epsilon) + ([\sigma, \bar{\lambda}] \epsilon) + \frac{i}{2r} (\bar{\lambda} \epsilon) \\ \delta \lambda &= \frac{i}{2} \gamma^{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu} - \gamma^\mu \epsilon D_\mu \sigma + D \epsilon - \frac{i}{r} \epsilon \sigma, \\ \delta \bar{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (523)$$

これを用いると、以下の \mathcal{T} 、 \mathcal{V}_a 、 \mathcal{S} に対して

$$\delta \mathcal{T} = \epsilon^a \mathcal{V}_a, \quad \delta \mathcal{V}_a = \epsilon_a \mathcal{S}. \quad (524)$$

を示すことができる。

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} \lambda \lambda, \quad (525)$$

$$\mathcal{V} = -D \lambda + i F \lambda - D \sigma \lambda + \frac{i}{r} \lambda \sigma, \quad (526)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \sigma D^\mu \sigma - i \gamma^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} D_\rho \sigma + \left(i D + \frac{1}{r} \sigma \right)^2 \\ &\quad + 2(D_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \lambda) + 2([\sigma, \bar{\lambda}] \lambda) - \frac{i}{r} (\bar{\lambda} \lambda) \end{aligned} \quad (527)$$

従って、 ϵ_1 と ϵ_2 を適当に規格化しておけば $\mathcal{S} = \delta_1 \delta_2 \mathcal{T}$ であり、分配関数を変化させない変形項として次のものを採用することができる。

$$\begin{aligned} S &= \hbar t \int d^3 x \sqrt{g} \mathcal{S} \\ &= \hbar t \int d^3 x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \sigma D^\mu \sigma - i \gamma^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} D_\rho \sigma + \left(i D + \frac{1}{r} \sigma \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(D_\mu \bar{\lambda} \gamma^\mu \lambda) + 2([\sigma, \bar{\lambda}] \lambda) - \frac{i}{r} (\bar{\lambda} \lambda) \right). \end{aligned} \quad (528)$$

ポゾン場の部分は正定値であるから、 $t \rightarrow \infty$ の極限で次の式が成り立つ部分が経路積分に効く。

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \sigma = 0, \quad iD + \frac{1}{r} \sigma = 0. \quad (529)$$

この解は、 σ_0 を任意の定数として次のように与えられる。

$$A_\mu = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad iD = -\frac{1}{r} \sigma_0. \quad (530)$$

ただし、 $D^\mu A_\mu = 0$ というゲージをとった。経路積分は、停留点をパラメトライズする σ_0 に対する積分と、そのまわりの fluctuation の積分とに分かれる。 σ_0 はリー代数に値を持つが、ゲージ変換を用いて $\sigma_0 = U \tilde{\sigma}_0 U^{-1}$ のように対角化することができ、カルタン部分代数に値を持つ $\tilde{\sigma}_0$ の積分に直すことができる。このときヤコビアンとして Vandermonde 行列式が現れる。

$$\int d\sigma_0 = \int d\tilde{\sigma}_0 \left(\prod_{\alpha \in G} \alpha(\tilde{\sigma}_0) \right) \quad (531)$$

積は全てのルート（正ルート、負ルート両方を含む）に対して取る。以下では $\tilde{\sigma}_0$ を単に σ_0 と表し、カルタン部分代数に値をとるものとする。

弱結合極限 $t \rightarrow \infty$ を取り、停留点周りでのガウス積分を実行するために、全ての場を、以下のように期待値部分と振動部分に分解しよう。

$$\Psi = \Psi_0 + \frac{1}{\sqrt{t}} \Psi' \quad (532)$$

Ψ_0 は σ に対しては σ_0 であり、それ以外の場に対しては 0 である。これを作用に代入し、 $t \rightarrow \infty$ の極限を取れば、相互作用部分は全て落ちる。 $D^\mu A_\mu = 0$ というゲージ固定条件を用いれば

$$S = \hbar \left(-A'_\nu D_\mu D^\mu A'^\nu + \frac{2}{r^2} A'_\mu A'^\mu + A'_\mu [\sigma_0, [\sigma_0, A'^\mu]] - \sigma' D_\mu D^\mu \sigma' \right. \\ \left. - 2(\bar{\lambda}' \gamma^\mu D_\mu \lambda') - 2(\bar{\lambda}' [\sigma_0, \lambda']) - \frac{i}{r} (\bar{\lambda}' \lambda') \right) \quad (533)$$

が得られる。共変微分中のゲージ場はその期待値 $A_\mu = 0$ で置き換えられている。あとは、それぞれの場を調和関数により展開し、ガウス積分を行えばよい。 S^3 上の調和関数については §F にまとめておいた。

スカラー場 σ' に作用する微分演算子はラプラシアンであり、その固有値は次のように与えられる。

$$-r^2 D_\mu D^\mu = l(l+2) \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{縮退度 } (l+1)^2 \quad (534)$$

しかし σ' に対する積分は定数を与えるから無視することができる。

S^3 上の divergenceless vector field は S^3 を回転させる $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$ のもとで $(s, s+1)$ 表現または $(s+1, s)$ 表現に属している。それぞれの成分に対して、ラプラシアンの固有値は次のように与えられる。

$$-r^2 D_\mu D^\mu = (l+2)^2 - 2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{縮退度 } (l+1)(l+3). \quad (535)$$

従って、ベクトル場に作用する微分演算子

$$D_{\text{vec}} = -D_\mu D^\mu + \frac{2}{r^2} + \alpha(\sigma_0)^2 \quad (536)$$

の固有値は次のように与えられる。

$$r^2 D_{\text{vec}} = (l+2)^2 + \alpha(r\sigma_0)^2 = (l+2+i\alpha(r\sigma_0))(l+2-i\alpha(r\sigma_0)), \quad l=0,1,2,\dots \quad (537)$$

フェルミオンに作用する微分演算子は

$$\frac{r}{2} D_{\text{fermi}} = -r\gamma^\mu D_\mu - \alpha(r\sigma_0) - \frac{i}{2} \quad (538)$$

である。 S^3 上のディラック演算子の固有値が

$$r\gamma^\mu D_\mu = \pm i(l + \frac{3}{2}), \quad l=0,1,2,\dots, \quad \text{縮退度 } (l+1)(l+2) \quad (539)$$

と与えられることを用いれば、(538) の固有値は次のように与えられる。

$$\pm i(l + \frac{3}{2}) - \alpha(r\sigma_0) - \frac{i}{2}, \quad l=0,1,\dots \quad (540)$$

すなわち、次の二つの系列の固有関数が存在する。

$$i(l+1+i\alpha(r\sigma_0)), \quad -i(l+2-i\alpha(r\sigma_0)), \quad l=0,1,\dots \quad (541)$$

以上の固有値を合わせれば、分配関数が次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\prod_{L=0}^{\infty} (l+1+i\alpha(r\sigma_0))^{(L+1)(L+2)} \prod_{L=0}^{\infty} (l+2-i\alpha(r\sigma_0))^{(L+1)(L+2)}}{\prod_{L=0}^{\infty} (L+2+i\alpha(r\sigma_0))^{(L+1)(L+3)} \prod_{L=0}^{\infty} (L+2-i\alpha(r\sigma_0))^{(L+1)(L+3)}} \\ &= \frac{\prod_{L=0}^{\infty} (L+1+i\alpha(r\sigma_0))^{(L+2)}}{\prod_{L=0}^{\infty} (L+2-i\alpha(r\sigma_0))^{(L+1)}} \end{aligned} \quad (542)$$

さらに、 α についての積を取る際に α と $-\alpha$ が常に組になって現れることを用いれば、次のように書いておいてもよい。

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} (k+i\alpha(r\sigma_0)) \prod_{k=1}^{\infty} (k-i\alpha(r\sigma_0)) \quad (543)$$

この無限積は、発散する定数因子を無視して次のように書き換えることができる。

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha(r\sigma_0)^2}{k^2} \right) = \frac{\sinh(\pi\alpha(r\sigma_0))}{\pi\alpha(r\sigma_0)} \quad (544)$$

α はもともと随伴表現の全てのウェイトを走る。すなわち、全てのルートと、カルタン部分代数に対応する、 $\alpha=0$ である。しかし $\alpha=0$ に対しては (544) は 1 を与えるので考慮

する必要はなく、 $\alpha \neq 0$ のものだけを考えればよい。さらに、この式の分母に現れる α は、(531) に現れる Vandermonde 行列式と相殺する。

ここまでの計算では、もともとの作用 S の寄与は考慮しなかった。実際、 S 中のほとんどの項は $t \rightarrow \infty$ の極限で 0 になる。ただし、CS 項がある場合には非自明な寄与が残る。一般のゲージ群に対しては、超対称な CS 項は次のように与えることができる。

$$S_{\text{CS}} = \frac{\hbar}{2\pi} \int dt d^2r \text{tr}' \left[-\sigma D + \gamma^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{2\pi i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \quad (545)$$

ただし tr' は必ずしも正定値ではない二次形式で、CS レベルも含めて定義されているものとする。ユークリッド化を行うと、

$$S_E = -iS_{\text{CS}} = -\frac{\hbar}{2\pi} \int d^3V \text{tr}' \left[-\sigma D + \gamma^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{2} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \quad (546)$$

となる。ここで (532) を代入し、 $t \rightarrow \infty$ の極限を取ると、次の項が残る。

$$S_E = \frac{\hbar}{2\pi} \int d^3V \text{tr}' \frac{i}{r} \sigma_0^2 = \pi i \hbar \text{tr}' (r \sigma_0)^2 \quad (547)$$

S^3 の体積が $2\pi^2 r^3$ であることを用いた。この寄与まであわせれば、分配関数は次のように与えられる。

$$Z = \int d\sigma_0 e^{-\pi i \text{tr}' (r \sigma_0)^2} \prod_{\alpha \in G} \sinh(\pi \alpha (r \sigma_0)). \quad (548)$$

6.4 S^3 分配関数の計算 (カイラル多重項)

カイラル多重項に対してパラメータ ϵ による超対称変換は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}(\epsilon\psi), & \delta\psi &= \sqrt{2}\epsilon F & \delta F &= 0, & \delta\phi^\dagger &= 0, \\ \delta\bar{\psi} &= +\sqrt{2}\epsilon\phi^\dagger\sigma - \sqrt{2}\gamma^\mu\epsilon D_\mu\phi^\dagger - \frac{\sqrt{2}i}{r}n\phi^\dagger\epsilon, \\ \delta F^\dagger &= -\sqrt{2}(\epsilon\gamma^\mu D_\mu\bar{\psi}) - \sqrt{2}(\epsilon\bar{\psi}\sigma) - 2\phi^\dagger(\epsilon\lambda) + \frac{\sqrt{2}i}{r}\left(n - \frac{1}{2}\right)(\epsilon\bar{\psi}). \end{aligned} \quad (549)$$

この変換則を用いれば、以下の \mathcal{T} 、 \mathcal{V}_a 、 \mathcal{S} の間に関係式

$$\delta\mathcal{T} = \epsilon^a \mathcal{V}_a, \quad \delta\mathcal{V}_a = \epsilon_a \mathcal{S}. \quad (550)$$

が成り立つことが示される。

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2}F^\dagger\phi, \quad (551)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^\mu(D_\mu\bar{\psi})\phi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(F^\dagger\psi) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{i(2n-1)}{2r}\bar{\psi}\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\sigma\phi + \phi^\dagger\lambda\phi, \quad (552)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -D_\mu D^\mu\phi^\dagger\phi + (D_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - F^\dagger F + \frac{i(2n-1)}{2r}(\bar{\psi}\psi) - \frac{n(n-2)}{r^2}\phi^\dagger\phi \\ &\quad -\sqrt{2}(\bar{\psi}\lambda)\phi - \sqrt{2}\phi^\dagger(\lambda\psi) - (\bar{\psi}\sigma\psi) + \frac{i(1-2n)}{r}\phi^\dagger\sigma\phi + \phi^\dagger\sigma\sigma\phi + \phi^\dagger D\phi \end{aligned} \quad (553)$$

\mathcal{T} と \mathcal{S} はスカラー、 \mathcal{V} はスピノルである。 ϵ_1 と ϵ_2 の規格化を適当に選べば $\mathcal{S} = \delta_1 \delta_2 \mathcal{T}$ となるから、次のものを変形項として採用することができる。

$$\begin{aligned}
S_{\text{def}} &= \hbar t \int d^3x \sqrt{g} \mathcal{S} \\
&= \hbar t \int d^3x \sqrt{g} \left(-D_\mu D^\mu \phi^\dagger \phi + (D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - F^\dagger F + \frac{i(2n-1)}{2r} (\bar{\psi} \psi) + \frac{n(2-n)}{r^2} \phi^\dagger \phi \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) \phi - \sqrt{2} \phi^\dagger (\lambda \psi) - (\bar{\psi} \sigma \psi) + \frac{i(1-2n)}{r} \phi^\dagger \sigma \phi + \phi^\dagger \sigma \sigma \phi + \phi^\dagger D \phi \right). \quad (554)
\end{aligned}$$

ボゾン部分についてはやはり正定値であり、場が 0 の部分に局所化する。そこで全ての場を $\Psi = \Psi' / \sqrt{t}$ のようにリスケールすると、 $t \rightarrow \infty$ の極限において相互作用部分が落ちて次のようになる。

$$\begin{aligned}
S &= \hbar \int d^3x \sqrt{g} \left[\phi'^\dagger \left(-D_\mu D^\mu - \frac{n(n-2)}{r^2} + \frac{i(2-2n)}{r} \sigma_0 + \sigma_0^2 \right) \phi' \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}' \left(-\gamma^\mu D_\mu + \frac{i(2n-1)}{2r} - \sigma_0 \right) \psi' - F'^\dagger F' \right]. \quad (555)
\end{aligned}$$

σ_0 はカルタン部分代数に値を持つが、物質場が属する表現のそれぞれのウェイト ρ に対応する σ_0 の固有値を $\rho(\sigma_0)$ と表すことにしよう。ベクトル多重項の場合と同様に、調和関数展開を用いてガウス積分を実行することができる。

まず、補助場 F' に対する成分は単に定数を与えるから無視してよい。スカラー場 ϕ に作用する微分演算子は

$$r^2 D_{\text{bos}} = -r^2 D_\mu D^\mu + 1 - [n - 1 + i\rho(r\sigma_0)]^2 \quad (556)$$

である。スカラー場のラプラシアン固有値は (534) で与えられるから、(556) の固有値は

$$r^2 D_{\text{bos}} = (l+1)^2 - [n - 1 + i\rho(r\sigma_0)]^2 = (l+n+i\rho(r\sigma_0))(l+2-n-i\rho(r\sigma_0)) \quad (557)$$

である。

フェルミオンに対する微分演算子は

$$r D_{\text{fermi}} = -r \gamma^\mu D_\mu + \frac{i(2n-1)}{2} - \rho(r\sigma_0) \quad (558)$$

であるが、(539) に与えた S^3 上のディラック演算子の固有値を用いると

$$r D_{\text{fermi}} = \pm i \left(l + \frac{3}{2} \right) + \frac{i(2n-1)}{2} - \rho(r\sigma_0) \quad (559)$$

である。すなわち次の二つの系列が存在する。

$$\begin{aligned}
r D_{\text{fermi}} &= i(l+1+n+i\rho(r\sigma_0)), \\
r D_{\text{fermi}} &= -i(l+2-n-i\rho(r\sigma_0)) \quad (560)
\end{aligned}$$

以上の結果を合わせると、次の分配関数が得られる。

$$\begin{aligned} Z_{1\text{-loop}} &= \prod_{\rho} \frac{\prod_{l=0}^{\infty} (l+1+n+i\rho(r\sigma_0))^{(l+1)(l+2)} \prod_{l=0}^{\infty} (l+2-n-i\rho(r\sigma_0))^{(l+1)(l+2)}}{\prod_{l=0}^{\infty} (l+n+i\rho(r\sigma_0))^{(l+1)^2} \prod_{l=0}^{\infty} (l+2-n-i\rho(r\sigma_0))^{(l+1)^2}} \\ &= \prod_{\rho} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1-n-i\rho(r\sigma_0)}{k-1+n+i\rho(r\sigma_0)} \right)^k \end{aligned} \quad (561)$$

ここで、

$$z = 1 - n - i\rho(r\sigma_0) \quad (562)$$

を定義して、

$$\ell(z) = \log \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+z}{k-z} \right)^k \quad (563)$$

を定義しておく。この関数の微分は次のように簡単な関数になる。

$$\frac{d\ell(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z} + \frac{k}{k-z} \right) = -\pi z \cot(\pi z). \quad (564)$$

二つ目の等号において ζ 関数正則化を用いた。この式と $\ell(0) = 0$ を用いることで $\ell(z)$ が一意的に決まる。関数 $\ell(z)$ は双曲的ガンマ関数 $\Gamma_h(z; \omega_1, \omega_2)$ と $\Gamma_h(z; i, i) = e^{\ell(1+iz)}$ という関係にあることが知られている [34]。

ここまでの結果を全てまとめると、分配関数を与える一般公式

$$Z = \int d\sigma_0 e^{-\pi i \text{tr}'(r\sigma_0)^2} \prod_{\alpha \in G} \sinh(\pi\alpha(r\sigma_0)) \prod_{\rho} e^{\ell(1-n-i\rho(r\sigma_0))} \quad (565)$$

が得られる。

あとは積分を実行すれば、厳密な分配関数が得られるが、ゲージ群が大きい極限では積分を実行する必要は無く、 Z を極値とするような固有値分布に対する被積分関数をそのまま分配関数とみなすことができる。この場合、自由エネルギーは次のように与えられる。

$$F = \pi i \text{tr}'(r\sigma_0)^2 - \sum_{\alpha \in G} \log \sinh(\pi\alpha(r\sigma_0)) - \sum_{\rho} \ell(1-n-i\rho(r\sigma_0)) \quad (566)$$

(ここでは $r\sigma_0$ のことを単に σ と書いた。) ρ に対する和はカイラル多重項全てについて行われるが、カイラル多重項がカノニカルな次元 $n = 1/2$ を持ち、表現がベクトル的な場合、すなわち、表現 R とその複素共役表現 R^* が対になって現れる場合には、それらの寄与を合わせたものは次のように初等関数で書くことができる。

$$-\ell\left(\frac{1}{2} - iz\right) - \ell\left(\frac{1}{2} + iz\right) = \log \cosh \pi z. \quad (567)$$

6.5 ABJM 行列模型

求めた一般公式を ABJM モデルに適用しよう。ABJM モデルの場合には、ゲージ群が $U(N) \times U(N)$ なので、それぞれの $U(N)$ に対する σ_0 を

$$r\sigma_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}, \quad r\sigma_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\lambda}_N \end{pmatrix} \quad (568)$$

とおく。Chern-Simons 項に現れるトレースは

$$\text{tr}'(r\sigma_0)^2 = k \sum_{i=1}^N (\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2) \quad (569)$$

と与えられる。 $U(N)_1$ のルートを α_{ij} ($i \neq j$) $U(N)_2$ のルートを $\tilde{\alpha}_{ij}$ ($i \neq j$) とすれば、

$$\alpha_{ij}(r\sigma_0) = \lambda_i - \lambda_j, \quad \tilde{\alpha}_{ij}(r\sigma_0) = \tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j. \quad (570)$$

bi-fundamental field に対しては

$$\rho_{ij}(r\sigma_0) = \lambda_i - \tilde{\lambda}_j. \quad (571)$$

これらを Z に対する一般公式 (565) に代入しよう。ABJM モデルでは、大きな R -対称性のためにカイラル多重項の共形次元は量子補正を受けず (567) を用いることができる。その結果次の積分が得られる。

$$Z = \int \left(\prod_i e^{-i\pi k(\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2)} d\lambda_i d\tilde{\lambda}_i \right) \frac{\prod_{i<j} [\sinh^2(\pi(\lambda_i - \lambda_j)) \sinh^2(\pi(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j))]}{\prod_{i,j} \cosh^2(\pi(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j))} \quad (572)$$

この積分によって定義される行列模型はしばしば ABJM 行列模型と呼ばれる。

λ 積分を実行すれば、ABJM モデルの分配関数を厳密に求めることができる。ここでは、 N が大きい極限を考えることにしよう。その場合、積分を実行する必要はなく、 $1/N$ 展開の最初の項は Z の極値として求めることができる。[7] 従って、 $Z = e^{-F}$ によって自由エネルギー F を定義すれば F は単に (572) の被積分関数の対数を取ったもの

$$\begin{aligned} F(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = & \pi i k \sum_j (\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2) \\ & - 2 \sum_{i<j} \log \sinh(\pi(\lambda_i - \lambda_j)) - 2 \sum_{i<j} \log \sinh(\pi(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j)) \\ & + 2 \sum_{i,j} \log \cosh(\pi(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j)) \end{aligned} \quad (573)$$

の極値として求めることができる。極値を与える式は次のものである。

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} &= -ik\lambda_i - \sum_{j \neq i} \coth \pi(\lambda_j - \lambda_i) + \sum_j \tanh \pi(\tilde{\lambda}_j - \lambda_i) = 0, \\
 -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \tilde{\lambda}_i} &= +ik\tilde{\lambda}_i - \sum_{j \neq i} \coth \pi(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_i) + \sum_j \tanh \pi(\lambda_j - \tilde{\lambda}_i) = 0,
 \end{aligned} \tag{574}$$

これを数値的に解いてみると、固有値分布が図 13 のようになることがわかる。以下のこと

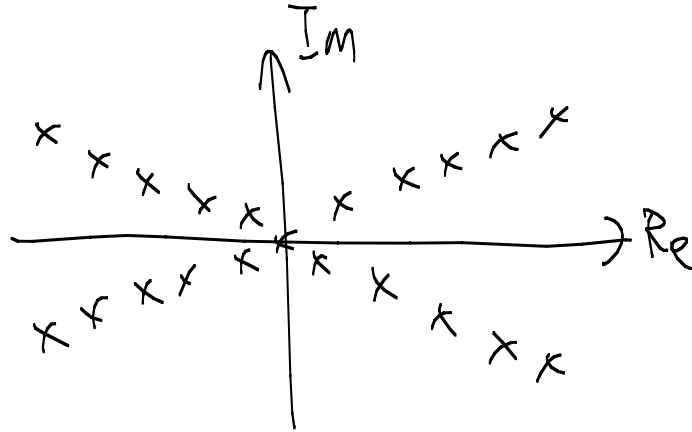


図 13: ABJM matrix model の固有値分布

を読み取ることができる。

- $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i$ は real ではない。これらはもともと hermitian matrix の固有値として定義されたものであるが、saddle point approximation においては一般に複素になる。
- λ_i と $\tilde{\lambda}_i$ それぞれで符号を反転させる対称性を持つ。
- λ_i と $\tilde{\lambda}_i^*$ の入れ替えのもとで不変。よって $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i^*$ とおくことができる。
- $N \rightarrow \infty$ の極限においては、

$$-\frac{1}{4} < \text{Im } \lambda_i < \frac{1}{4} \tag{575}$$

であり、実部については N とともに広がっていく。

以上のことを踏まえて、次のようにおいてみよう。

$$\lambda_j = N^\alpha x_j + iy_j, \quad \tilde{\lambda}_j = N^\alpha x_j - iy_j \tag{576}$$

$N \rightarrow \infty$ の極限において、次の式により固有値密度 $\rho(x)$ を定義する。

$$\sum = N \int dx \rho(x) \tag{577}$$

定義より、 $\rho(x)$ は次のように規格化されている。

$$\int \rho(x) dx = 1 \quad (578)$$

これらを用いて自由エネルギー (573) を書き換えよう。まず Chern-Simons 項から現れる項は

$$\begin{aligned} \pi i k \sum_i (\lambda_i^2 - \tilde{\lambda}_i^2) &= \pi i k N \int dx \rho ((N^\alpha x + iy)^2 - (N^\alpha x - iy)^2) \\ &= -4\pi k N^{1+\alpha} \int dx \rho x y \end{aligned} \quad (579)$$

となる。これ以外の寄与は

$$f(z) = \log \cosh(\pi z) \quad (580)$$

という関数を用いて

$$-\sum_{i,j} f\left(\lambda_i - \lambda_j + \frac{i}{2}\right) - \sum_{i,j} f\left(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j + \frac{i}{2}\right) + 2 \sum_{i,j} f(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) \quad (581)$$

と表されている。(定数項を無視した。) z の実部は $N \rightarrow \infty$ 極限において N^α 程度の広がりを持つ。 z の実部が大きいところでは上記の関数は単純な関数

$$f_0(z) = \text{sign}(\text{Re } z)(\pi z - \log 2) + \text{const} \quad (582)$$

に急速に近づいていく。(581) の関数 $f(z)$ をこの簡単な関数に置き換えてみよう。 i と j に対する和を $x_i > x_j$ と $x_i < x_j$ の場合に分けて、後者の場合には i と j を入れ替えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} &-2 \sum_{x_i > x_j} f_0\left(\lambda_i - \lambda_j + \frac{i}{2}\right) - 2 \sum_{x_i > x_j} f_0\left(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j + \frac{i}{2}\right) + 2 \sum_{x_i > x_j} f_0(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) + 2 \sum_{x_i > x_j} f_0(\tilde{\lambda}_i - \lambda_j) \\ &= 2\pi \sum_{x_i > x_j} \left[-\left(\lambda_i - \lambda_j + \frac{i}{2}\right) - \left(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j + \frac{i}{2}\right) + (\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) + (\tilde{\lambda}_i - \lambda_j) \right] \end{aligned} \quad (583)$$

λ_i や $\tilde{\lambda}_i$ を含む項は全て相殺し、定数項だけが残る。そこで、関数 f_0 の自由エネルギーへの寄与は無視することができ、ずれの部分 $f - f_0$ だけに注目することができる。[30] これは $\text{Re } z = 0$ の近傍でのみ値を持つ。特に $z = N^\alpha x + iy$ とおいて $N \rightarrow \infty$ の極限をとった場合には、 $x \neq 0$ では $f - f_0 \rightarrow 0$ となるので、 x 依存性を δ 関数で近似することができる。このことを踏まえ、以下では $z = \hat{x} + iy$ と置き、

$$f(z) - f_0(z) = g(y)\delta(\hat{x}) \quad (584)$$

という近似を行うことにする。関数 $g(y)$ を決めるには、左辺を $-\infty < \hat{x} < \infty$ で積分すればよい。

$$f(z) - f_0(z) = \log(1 + e^{-2\pi z \text{sign}(\hat{x})}) \quad (585)$$

であるから、関数 $g(y)$ は

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{-\infty}^0 \log(1 + e^{2\pi z}) d\hat{x} + \int_0^{\infty} \log(1 - e^{-2\pi z}) d\hat{x} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{e^{2\pi i n y} + e^{-2\pi i n y}}{n^2} \end{aligned} \quad (586)$$

のように決まる。最後に得られた無限和は実行できて、 $-1/2 \leq y \leq 1/2$ の範囲では次のように与えられる。

$$g(y) = \frac{\pi}{12} - \pi y^2. \quad (587)$$

$-1/2 \leq y \leq 1/2$ の外での関数形は、 $g(y)$ が周期 1 の周期関数であることから定まる。

この結果を用いて、 $N \rightarrow \infty$ 極限での自由エネルギーを求めよう。(584) の近似を用い、 $f_0(z)$ の項が自由エネルギーに定数でしか寄与しないので無視しよう。これは関数 $f(z)$ を関数 $g(y)\delta(\hat{x}) = N^{-\alpha}g(y)\delta(x)$ で置き換えてよいことを意味する。この結果、自由エネルギーの残りの項が次のように変形できる。まず、 $\lambda_i - \lambda_j$ を含む項は

$$\begin{aligned} -\sum_{i \neq j} \log \sinh(\pi(\lambda_i - \lambda_j)) &= -N^2 \int dx \int dx' \rho(x)\rho(x') f\left(\lambda - \lambda' + \frac{i}{2}\right) \\ &= -N^{2-\alpha} \int dx \rho^2 g\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (588)$$

となる。 $\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j$ を含む項も全く同じ寄与を与える。また、 $\lambda_i - \tilde{\lambda}_j$ を含む部分は

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i,j} \log \cosh(\pi(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j)) &= 2N^2 \int dx dx' \rho \rho' f(\lambda_i - \tilde{\lambda}_j) \\ &= 2N^{2-\alpha} \int dx \rho^2 g(2y) \end{aligned} \quad (589)$$

となる。

これらを全て合わせれば、自由エネルギーが x の一重積分の形で次のように与えられる。

$$F = \int \left(-4\pi N^{1+\alpha} k \rho x y + 2N^{2-\alpha} \left(g(2y) - g\left(\frac{1}{2}\right) \right) \rho^2 \right) dx \quad (590)$$

この式の N 依存性を見てみると、 $N^{1+\alpha}$ に比例する部分と $N^{2-\alpha}$ に比例する部分よりなる。 $N \rightarrow \infty$ 極限において極値が存在するためには N に対するこれら二つの部分の振る舞いが同じで、それらがうまくバランスしなければならない。これは $\alpha = 1/2$ 、すなわち F が $N^{3/2}$ に比例することを意味している。

数値計算の結果を信じて $|y| < 1/4$ を仮定し、関数 $g(y)$ の具体系を用いれば、自由エネルギーは次のように表される。

$$F = \pi N^{3/2} \int \left(-4k \rho x y + \left(\frac{1}{2} - 8y^2 \right) \rho^2 \right) dx \quad (591)$$

あとはこの自由エネルギーが最小値を取るような $\rho(x)$ と $y(x)$ の関数形を決めればよい。 $\rho(x)$ は拘束条件 (578) を満たしているので、対応するラグランジュ未定乗数 μ を導入し、 F に加えておこう。

$$\frac{1}{\pi N^{3/2}} F = \int \left(-4k\rho xy + \left(\frac{1}{2} - 8y^2 \right) \rho^2 - \mu\rho \right) dx + \mu \quad (592)$$

$\rho(x)$ の変分に対する停留条件より、次の関係式が得られる。

$$-4kxy + (1 - 16y^2)\rho - \mu = 0. \quad (593)$$

$y(x)$ の変分に対する停留条件からは、

$$-4k\rho x - 16y\rho^2 = 0 \quad (594)$$

が得られる。これらより $y(x)$ と $\rho(x)$ の関数形が次のように決定される。

$$y(x) = -\frac{kx}{4\mu}, \quad \rho(x) = \mu. \quad (595)$$

固有値密度 $\rho(x)$ が x によらず一定であるが、これは x がある有限の範囲に分布していることを表している。 ρ の積分が 1 であることから x の範囲は次のように得られる。

$$|x| \leq \frac{1}{2\mu} \quad (596)$$

これらを自由エネルギーに代入すると、自由エネルギーは μ の関数として次のように与えられる。

$$F = \pi N^{3/2} \int_{-1/(2\mu)}^{1/(2\mu)} \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{k^2 x^2}{2} \right) dx = \pi N^{3/2} \left(\frac{\mu}{2} + \frac{k^2}{24\mu^3} \right) \quad (597)$$

これが μ に対して極値を取る必要があるので、 μ で微分して 0 と置くことにより μ が次のように決定される。

$$\mu^2 = \frac{k}{2} \quad (598)$$

これを代入すると、

$$F = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi N^{3/2} k^{1/2} \quad (599)$$

これは内部空間が S^7/Z_k の場合、すなわち $\Omega_7 = \pi^4/(3k)$ の場合に重力側で求めた分配関数 (470) に一致する。特に $k=1$ である場合には (472) に一致する。

6.6 おわりに

§6 で解説した 3 次元共形場理論の最近の進展についてはすでにレビュー [32] がありますので、さらに詳しく知りたい方はそちらも参照してください。

謝辞

集中講義に呼んでくださった立教大学の矢彦沢さんと、集中講義に参加して長時間話を聞いて下さった方々に感謝いたします。

A A_6 の超対称変換

A_3 の双対場である A_6 の超対称変換を与えよう。 A_6 は A_3 の双対場として定義される。すなわち、 K_7 に対するビアンキ恒等式が K_4 に対する運動方程式を与えるように A_6 と A_3 の関係は定義される。(4) を A_3 で変分することによって得られる A_3 の運動方程式は、次のようになる。

$$d * (K_4 - \kappa_4) = \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4. \quad (600)$$

ここではフェルミオンを含む項も無視せず書いた。(もともとの作用において無視されているフェルミオンの高次の項についてはここでも無視する。) κ_4 がフェルミオンを含む部分であり、次のように定義される。

$$\kappa_4 = \psi_\mu \gamma^{[\mu} \gamma_{[4]} \gamma^{\nu]} \psi_\nu. \quad (601)$$

場の強さ K_7 は次のように定義するのが便利である。

$$K_7 = *(K_4 - \kappa_4). \quad (602)$$

(後に述べる超場形式を用いると、この関係式は超共変化された場の強さを用いて $K_7^{\text{cov}} = *K_4^{\text{cov}}$ と書けることをコメントしておこう。) (603) より、 K_7 は次の式を満足する。

$$dK_7 = \frac{1}{2} K_4 \wedge K_4. \quad (603)$$

これをビアンキ恒等式だと思って解けば

$$K_7 = dA_6 + \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4 \quad (604)$$

が得られる。すなわち、 A_6 は質量殻上で次の関係式によって定義することができる。

$$dA_6 = *K_4 - *\kappa_4 - \frac{1}{2} A_3 \wedge K_4. \quad (605)$$

質量殻上でこの式と矛盾しないように A_6 の超対称変換を決定しなければならない。そのためまず (605) の右辺の超対称変換を計算しよう。これは既に知っている多脚場や A_3 の変換則を用いて決定することができる。ここでもフェルミオンの高次の項は無視する。

まず、ゲージ場を含まない変分は次の二つである。

$$\begin{aligned} \delta_A * K_4 &= 2 * d(\xi \gamma_{[2]} \psi_1) = 2 * D_\mu (\xi \langle \gamma^\mu \gamma_{[4]} \gamma^\nu \rangle_2 \psi_\nu) = 2 D_\mu (\xi \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]} \gamma^\nu \rangle_9 \psi_\nu), \\ \delta_{\psi_1} * \kappa_4 &= 2 * \psi_\rho \gamma^{[\rho} \gamma_{[4]} \gamma^{\sigma]} D_\sigma \xi = 2 \psi_\rho \gamma^{[\rho} \gamma_{[7]} \gamma^{\sigma]} D_\sigma \xi = 2 \psi_\rho \langle \gamma^\rho \gamma_{[7]} \gamma^\sigma \rangle_{9,5} D_\sigma \xi \end{aligned} \quad (606)$$

ただし、どの場に対しての変換を行うのかを示すのに (82) で定義した変換記号を用いた。ホッジ双対演算は公式 $*\gamma_{[n]} \propto \gamma_{[11-n]}$ を用いて処理した。ただし、特定の階数を抜き出す括弧 $\langle \dots \rangle$ がある場合、ホッジ双対演算を直接その中身に作用させてはならない。(606) の一つ目は次のように処理した。

$$*\langle \gamma^\mu \gamma_{[4]} \gamma^\nu \rangle_2 = \frac{1}{4} * \{ \gamma^\mu, [\gamma_{[4]}, \gamma^\nu] \} = \frac{1}{4} \{ \gamma^\mu, [\gamma_{[7]}, \gamma^\nu] \} = \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]}, \gamma^\nu \rangle_9 \quad (607)$$

(606) の二つをあわせれば、

$$\begin{aligned} \delta_A * K_4 - \delta_{\psi_1} * \kappa_4 &= 2D_\mu (\xi \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]} \gamma^\nu \rangle_9 \psi_\nu) - 2(D_\mu \xi) \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]} \gamma^\nu \rangle_{9,5} \psi_\nu \\ &= 2(\xi \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]} \gamma^\nu \rangle_{9,5} D_\mu \psi_\nu) - 2D_\mu (\xi \langle \gamma^\mu \gamma_{[7]} \gamma^\nu \rangle_5 \psi_\nu) \\ &= 2(\xi \gamma^{\mu\nu} \gamma_{[7]} \gamma^\rho D_\mu \psi_\rho) - 2d(\xi \gamma_{[5]} \psi_1) \end{aligned} \quad (608)$$

となる。さらにこの第1項は

$$2(\xi \gamma^{\mu\nu} \gamma_{[7]} \gamma^\rho D_\mu \psi_\rho) = \xi \left(\frac{1}{3} \gamma_{[7]} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_{[7]} \right) \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho \quad (609)$$

と変形することができる。

ゲージ場を一つ含む変分は次のように与えられる。

$$\delta_e(*K_4) = -2 * (\psi_\mu \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_1 \xi), \quad (610)$$

$$\delta_{\psi_2}(-* \kappa_4) = -\frac{1}{8} * \psi_\mu \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \xi - \frac{1}{8} * \psi_\mu \gamma^\nu \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \gamma_\nu \xi, \quad (611)$$

$$\begin{aligned} \delta_A \left(-\frac{1}{2} A_3 \wedge K_4 \right) &= -\delta A_3 \wedge K_4 + \frac{1}{2} d(A_3 \wedge \delta A_3) \\ &= 2 * (\psi_\mu \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K \rangle_9 \xi) + \frac{1}{2} d(A_3 \wedge \delta A_3). \end{aligned} \quad (612)$$

(610) は以前に与えた公式 (103) に

$$A_{\mu_1 \dots \mu_4} = \frac{1}{7!} \epsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_7 \mu_1 \dots \mu_4} dx^{\lambda_1} \wedge dx^{\lambda_7}, \quad B_{\mu_1 \dots \mu_4} = K_{\mu_1 \dots \mu_4} \quad (613)$$

を代入することで直ちに得られる。

(611) をディラック行列の反対称積の階数ごとに分解すると、

$$*\psi_\mu \left(\langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_1 + \frac{1}{2} \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_3 + 0 \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_5 - \frac{1}{2} \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_7 - \langle \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \rangle_9 \right) \xi \quad (614)$$

これに (610) と (612) の第1項を加えると第1項と第5項の符号が変わるが、この符号の変化は ψ_μ と ξ を入れ替えることで吸収することができる。従って和は (611) において ψ_μ と ξ を入れ替えたものになる。こうして、(610), (611), (612) の和は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\delta_e(*K_4) - \delta_{\psi_2}(*\kappa_4) - \delta_A \left(\frac{1}{2} A_3 \wedge K_4 \right) \\ &= -\frac{1}{8} * \xi \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \psi_\mu - \frac{1}{8} * \xi \gamma^\nu \gamma_{[4]} \gamma^\mu K_4 \gamma_\nu \psi_\mu + \frac{1}{2} d(A_3 \wedge \delta A_3) \\ &= -\frac{1}{4} \xi \left(\frac{1}{3} \gamma_{[7]} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_{[7]} \right) \gamma^{\mu\nu} K_4 \gamma^\rho \psi_\rho + \frac{1}{2} d(A_3 \wedge \delta A_3) \end{aligned} \quad (615)$$

全てあわせると、次の式が得られる。

$$d\delta A_6 = d \left(-2(\xi \gamma_{[5]} \psi_1) + \frac{1}{2} A_3 \wedge \delta A_3 \right) + \xi \left(\frac{1}{3} \gamma_{[7]} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_{[7]} \right) \left(\gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho - \frac{1}{4} \gamma^{[\mu} \mathbb{K}_4 \gamma^{\nu]} \psi_\nu \right) \quad (616)$$

この式の右辺二行目、括弧でくくられた二つ目の因子はグラビティーノの運動方程式に比例しているから on-shell で 0 である。従って、 A_6 の超対称変換 (229) を読み取ることができる。

B ビアンキ恒等式を解く

B.1 $I_{mab}{}^p = 0$ を解く

ここでは (317) を満足する $T_{ma}{}^c$ の一般形を求める。 $T_{ma}{}^b$ はスピノル添え字を二つ持つので、ディラック行列の反対称積で展開することができる。従って、次のようにおくことができる。

$$T_{ma}{}^b = (T_m)_a{}^b = \sum_{k=0}^5 Y_{m-p_1 \dots p_k} (\gamma^{p_1 \dots p_k})_a{}^b. \quad (617)$$

$Y_{m-p_1 \dots p_k}$ は後ろの k 個の添え字について反対称な $k+1$ 階テンソルである。これに γ_n を掛けて m と n について対称化すると、

$$T_m \gamma_n |_{\{mn\}} = \sum (Y_{m-p_1 \dots p_{k-1}} \gamma^{p_1 \dots p_{k-1}}{}_n + (k+1) Y_{m-p_1 \dots p_k n} \gamma^{p_1 \dots p_k}) |_{\{mn\}} \quad (618)$$

拘束条件は、この行列の対称部分、すなわちディラック行列の反対称積に分解したときに 1 階、2 階、5 階の部分が 0 になることを要求している。階数ごとに考えていこう。

まず、1 階部分からは次の条件を得る。

$$(Y_m \gamma_n + 2Y_{m-pn} \gamma^p)_{\{mn\}} = 0. \quad (619)$$

このような式を解くには、添え字に具体的な値を割り当ててみるのが簡単である。 $(m, n) = (1, 1)$ において γ_1 部分を取り出すと、 $Y_1 = 0$ が得られる。他の成分に対しても同様であるから、 $Y_m = 0$ が結論される。これを (619) に戻せば、 Y_{mnp} が完全反対称であることがわかる。

2 階部分からは

$$(Y_{m-p} \gamma^p{}_n + 3Y_{m-p_1 p_2 n} \gamma^{p_1 p_2})_{\{mn\}} = 0 \quad (620)$$

を得る。 $(m, n) = (1, 1)$ において γ^{12} 部分を取り出すと、 $Y_{(1-2)} \gamma^{12} = 0$ となり、 Y_{mn} の非対角成分が 0 であることがわかる。さらに $(m, n) = (1, 2)$ で γ^{12} 部分を取り出すと、 $Y_{1-1} \gamma^{12} - Y_{2-2} \gamma^{12} = 0$ となり、対角成分が全て等しいことがわかる。従って $Y_{mn} = X \delta_{mn}$ とおくことができる。さらにこれを (620) に戻せば Y_{mnpq} が完全反対称であることがわかる。

あとは 5 階部分を解けばよい。11 次元では 5 階と 6 階のディラック行列の反対称積は独立ではないからそれらが互いに相殺する可能性を考慮しなければならないが、実際にはそのような相殺は起こらないことがわかる。5 階、6 階の部分を取り出すと、次の条件が得られる。

$$(Y_{m-p_1 \dots p_4} \gamma^{p_1 \dots p_4} + Y_{m-p_1 \dots p_5} \gamma^{p_1 \dots p_5})_{\{mn\}} = 0. \quad (621)$$

$(m, n) = (0, 0)$ および $(m, n) = (0, 1)$ の場合に γ^{01234} を含む項を取り出せば、 $Y_{0-1234} = Y_{1-1234} - Y_{0-0234} = 0$ が得られる。これは Y_{m-pqrs} がある三階反対称テンソル X_{mnp} を用いて $Y_{m-npqr} = \delta_{m[n} X_{pqr]}$ と与えられることを意味している。 Y_{mnpqrs} に対しても全く同様に $Y_{m-npqrs} = \delta_{m[n} X_{pqr}]$ が得られる。こうして、(317) の一般解 (318) が得られる。

B.2 $I_{abc}{}^d = 0$ を解く

次元が 1 のもうひとつのビアンキ恒等式 $I_{abc}{}^d = 0$ を解くことを考えよう。この条件を効率的に解くために、まずはテンソル $I_{abc}{}^d$ をローレンツ群の規約表現に分解しておくのがよい。 $I_{abc}{}^d$ の 3 つの下付きスピノル添え字は対称である。11 次元において 3 つのスピノル表現の対称積は次のように規約分解される。

$$(32 \times 32 \times 32)_{\text{sym}} = 4224 + 1408 + 320 + 32. \quad (622)$$

$I_{abc}{}^d$ はさらにもう一つスピノル添え字をもつから、その規約分解は次のように与えられる。

$$4224 \times 32 = 47190 + 37752 + 28314 + 17160 + 4290 + 462_5, \quad (623)$$

$$1408 \times 32 = 17160 + 11583 + 5005 + 4290 + 3003 + 1430 + 1144 + 462_5 \\ + 429 + 330_4 + 165_3 + 55_2, \quad (624)$$

$$320 \times 32 = 4290 + 3003 + 1430 + 462_5 + 429 + 330_4 + 165_3 + 65 + 55_2 + 11_1, \quad (625)$$

$$32 \times 32 = 462_5 + 330_4 + 165_3 + 55_2 + 11_1 + 1_0. \quad (626)$$

この中で、0 から 5 までの添え字のついているものは、反対称テンソル表現であることを意味している。(添え字は反対称テンソルの階数である。) ビアンキ恒等式的具体形と R_{ab} が (316) のように $T_{ma}{}^b$ を用いて与えられることを用いれば、 $I_{abc}{}^d$ は、階数が 0、3、4 の反対称テンソル X と Y の線形結合である。従って上記の規約分解の中でそれらの表現以外は実際には恒等的に 0 になっている。特に、 4224×32 の規約分解はこれらの表現を含まないから恒等的に 0 である。従って、 $I_{abc}{}^d = 0$ を示すためには、対称な 3 つのスピノル添え字に対する規約分解から得られる 4 つの規約表現のうち、 $1408 + 320 + 32$ の部分のみを考えれば十分である。このことは $(\gamma^{mn})^{ab} I_{abc}{}^d$ が 0 になることを示せば十分であること

を意味している。この式に (318) と (319) を代入すれば、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
(\gamma_{uv})^{ab} I_{abc}{}^d &= -\frac{176}{3} X \gamma^{uv} \\
&\quad - \frac{8}{3} Y_{mnp} \gamma^{uvmnp} + \frac{16}{3} (Y_{umn} + 30X^{umn}) \gamma^{vmn}|_{[uv]} - \frac{16}{3} (Y_{uvm} + 30X^{uvm}) \gamma^m \\
&\quad + \frac{2}{3} (Y_{mnpq} - 8X_{mnpq}) \gamma^{uvmnpq} + \frac{16}{3} (Y_{umnp} - 8X_{umnp}) \gamma_{vmnp}|_{[uv]} \\
&\quad - 56(Y_{uvmn} - 8X_{uvmn}) \gamma^{mn}
\end{aligned} \tag{627}$$

右辺のディラック行列の添え字は全て $(*)_c^d$ であるが、省略した。これが 0 になるという条件から本文中に与えた式 (321) が得られる。

B.3 $I_{mab}{}^c = 0$ を解く

(325) によって $T_{ma}{}^b$ は反対称テンソル場で書けているから、その θ 微分も (332) によって次のように決定される。

$$D_a T_{mb}{}^c = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} (\gamma_m \gamma^{pqrs})_b{}^c - \frac{1}{24} (\gamma^{pqrs} \gamma_m)_b{}^c \right] (\gamma_{rs})_{ad} T_{pq}{}^d \tag{628}$$

ビアンキ恒等式 $I_{mab}{}^c$ は $T_{ma}{}^c$ の θ 微分を含む。

$$\frac{3}{2} I_{mab}{}^c = [-D_a T_{mb}{}^c + R_{mab}{}^c]_{\{ab\}} + (\gamma^k)_{ab} T_{km}{}^c. \tag{629}$$

この式の曲率テンソルを (329) を用いてグラビティーノ超場で書き換え、さらに θ 微分項も (628) によってグラビティーノ超場で書き換えればこの式を $T_{mn}{}^a$ の線形関係として表すことができる。 $T_{mn}{}^a$ を SO(11) の規約表現に分解すると、1408 + 320 + 32 となる。(629) が 0 になるという条件は、ローレンツ共変性よりこれら 3 つの規約表現のうちの幾つかが 0 であるという条件を与えるはずである。スピノル添え字が 3 つある (629) を直接扱うのは難しいので、 a と b を γ^u でつぶしてみると、次の式をえる。

$$18(\gamma_u)^{ab} I_{mab}{}^c = (-144\gamma^u \gamma^p T_{pm} + 40\gamma^m \gamma^p T_{pu} + 41\delta^{mu} \gamma^{pq} T_{pq} + 5\gamma^{mu} \gamma^{pq} T_{pq})^c \tag{630}$$

この式から簡単に次の式を示すことができる。

$$(\gamma^k)^a{}_b T_{km}{}^b = 0. \tag{631}$$

これは以前に与えた (343) である。この式は $T_{mn}{}^a$ の規約分解のうち 320 + 32 が 0 であることを表している。(630) の中には $\gamma^m T_{mn}$ という形でのみ T_{mn} が現れているので、(631) が成り立てば (630) が 0 になることは明らかである。さらに、(631) をもちいれば $(\gamma_{uv})^{ab} I_{mab}{}^c = (\gamma_{uvwxy})^{ab} I_{mab}{}^c = 0$ も示すことができる。これらの式は $I_{mab}{}^c = 0$ を表している。

B.4 $I_{mna}{}^b = 0$ を解く

$T_{mn}{}^a$ の θ 依存性を決定するには、次元が 2 のビアンキ恒等式 $I_{mna}{}^b = 0$ を用いればよい。

$$D_a T_{mn}{}^b = -R_{mna}{}^b - D_m T_{na}{}^b - D_n T_{am}{}^b - T_{na}{}^c T_{cm}{}^b - T_{am}{}^c T_{cn}{}^b \quad (632)$$

ただし、この式の左辺の $T_{mn}{}^b$ の一部の成分は (631) によって 0 になっている。このことと矛盾しないためにはこの式の右辺の対応する成分が消えていなければならない。この部分を抜き出すために、(632) の γ -トレースを取り、グラビティーノの運動方程式 (631) を用いれば、グラビティーノの場の強さを含まない次の式を得る。

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{mp} \gamma^p = D_m T_n \gamma^n - D_n T_m \gamma^n + T_n T_m \gamma^n - T_m T_n \gamma^n \quad (633)$$

ただし、恒等式 (339) を用いた。また、リッチテンソルを $R_{mp} = R_{mnp}{}^n$ と定義した。この式の右辺の γ -行列の反対称積による分解は次のようになる。

$$D_m T_n \gamma^n - D_n T_m \gamma^n = \frac{1}{12} \langle \gamma_m \mathcal{D} K \rangle_4 + \frac{1}{6} \langle \gamma_m \mathcal{D} K \rangle_2, \quad (634)$$

$$T_n T_m \gamma^n - T_m T_n \gamma^n = -\frac{1}{24} \langle 3K \gamma_m K - \gamma_m K K \rangle_1 + \frac{1}{24} \langle \gamma_m K K \rangle_7 + \frac{1}{12} \langle \gamma_m K K \rangle_9. \quad (635)$$

ただし反対称テンソル場に対するビアンキ恒等式 $J_{\widehat{m}\widehat{n}\widehat{p}\widehat{q}\widehat{r}} = 0$ より従う $\mathcal{D} K + K \overleftarrow{\mathcal{D}} = 0$ を用いた。(この式中の微分演算子はどちらも K に作用する。) よって右辺は次のように書くことができる。

$$-\frac{1}{24} \langle 3K \gamma_m K - \gamma_m K K \rangle_1 + \frac{1}{8} \gamma_m \left(\langle \mathcal{D} K \rangle_3 + \frac{1}{2} \langle K K \rangle_8 \right) + \frac{1}{24} \left(\langle \mathcal{D} K \rangle_3 + \frac{1}{2} \langle K K \rangle_8 \right) \gamma_m \quad (636)$$

これらを用いると、(633) は以前に与えた (341) と (342) に分解できる。

C κ 対称性の確認

ここでは背景時空は平坦であると仮定し、フェルミオン場 θ の二次の項までを考慮したが、そのような近似を行わずに κ 対称性の存在を確認するには以下のようにする。

以下では共変性を保つために、 κ 対称性そのものではなく、 κ 対称性と局所ローレンツ対称性を組み合わせた次の変換のもとでの不変性を見る。

$$\delta^{\text{cov}} = \delta_\kappa - \delta_M (\delta z^K \Omega_K) \quad (637)$$

すると、テンソル量 X に対する δ^{cov} 変換は

$$\delta^{\text{cov}} X = \delta_\kappa z^M D_M X \quad (638)$$

となる。(385) を用いればテンソル量 X の δ^{cov} 変換は次のようになる。

$$\delta^{\text{cov}} X = \Delta^a D_a X, \quad \Delta^a = \delta_\kappa z^M E_M^a. \quad (639)$$

多脚場に対しては

$$\begin{aligned}\delta^{\text{cov}} E^A &= (d\delta_\kappa z^M) E_M^A + dz^M \delta z^N D_N E_M^A \\ &= D(\delta_\kappa z^M E_M^A) - \delta_\kappa z^M dz^N T_{NM}^A\end{aligned}\quad (640)$$

が成り立ち、 $A = m$ および $A = a$ の場合にはそれぞれ多脚場 1-フォームの δ^{cov} 変換は

$$\delta^{\text{cov}} E^m = 2E^b \Delta^a (\gamma^m)_{ab} = 2(\Delta \gamma^m E), \quad \delta^{\text{cov}} E^a = D\Delta^a + E^m \Delta^b T_{bm}^a \quad (641)$$

と与えられる。

これらを用いて、M2-ブレーン作用がどのように変換されるかを見てみよう。まず南部・後藤作用

$$S_{\text{NG}} = -2T \int d^3\sigma \sqrt{-\det G_{ij}} \quad (642)$$

についてであるが、この項は Π_i^m を用いて与えられているが (641) より直ちに

$$\delta \Pi_i^m = 2(\Delta \gamma^m \Pi_i^a) \quad (643)$$

となり、これを用いれば

$$\delta S_{\text{NG}} = -2T \int d^3\sigma \sqrt{-\det G_{ij}} (\Delta \gamma^i \Pi_i) \quad (644)$$

を得る。

次に、ゲージ場との結合項について見てみよう。そのためには、 A_3 が κ 変換のもとでどのように変換されるかを知る必要がある。 κ 変換はブレーンの座標に対する変換であるが、これを背景時空の座標変換に拡張して考えれば、 A_3 の変換は一般座標変換の公式 (303) を用いて

$$\delta^{\text{cov}} A_{MNP} = \delta z^K K_{KMNP} \quad (645)$$

が成り立つ。 K_4 の 0 でない成分のみ取り出せば、

$$\delta A_3 = -\frac{1}{2} E^n E^m E^b \Delta^a K_{abmn} = 2(\Delta \gamma_{[2]} E) \quad (646)$$

従ってゲージ場との結合項の変換は

$$\delta S_q = Q \int \delta A_3 = Q \int \sqrt{-\det G_{ij}} E^{ijk} (\Delta \gamma_{ij} \Pi_k) = 2Q \int \sqrt{-\det G_{ij}} (\Delta \gamma \gamma^k \Pi_k) \quad (647)$$

最後に

$$\frac{1}{6} E^{ijk} \gamma_{ijk} = \gamma \quad (648)$$

を用いた。二つを合わせれば、

$$\delta_\kappa S_{\text{M2}} = -2 \int d^3\sigma \sqrt{-\det G_{ij}} (\Delta (T - Q\gamma) \gamma^i \Pi_i^a) \quad (649)$$

従って、作用が不変になるための条件は

$$(T - Q\gamma) \Delta = 0 \quad (650)$$

である。

D Extremal M2-ブレーン解

先ほど求めた M2-ブレーン解で、特に $r_h = 0$ の場合を考えてみよう。このとき $E = |Z|$ が成り立ち、解は BPS になる。すなわち超対称性が部分的に残っている。この場合の解は、(415) において $r_h = 0$ とおくことで次のように得られる。

$$ds^2 = H^{-2/3} \eta_{ij} dx^i dx^j + H^{1/3} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad H = 1 + \frac{N l_p^6}{6 \Omega_7 r^6}. \quad (651)$$

実は、この解が超対称性の一部を保っていることを用いるとアインシュタイン方程式を直接解かなくても解を比較的簡単に求めることができる。ここではその方法を紹介しておこう。

まず、計量を次のように取る。

$$ds^2 = a^2(r) \eta_{ij} dy^i dy^j + b^2(r) (dr^2 + r^2 d\Omega_7^2). \quad (652)$$

6 ~ 11 方向については極座標を導入し、その動径方向を r 、角度方向の計量を半径 1 の S^4 上の計量である $d\Omega_7^2$ を用いて与えた。ブレーンに垂直な方向の座標が $dr^2 + r^2 d\Omega_7^2$ のまともりで現れるように動径座標 r に対する座標変換を適当に行った。 $a(r)$ と $b(r)$ は未知関

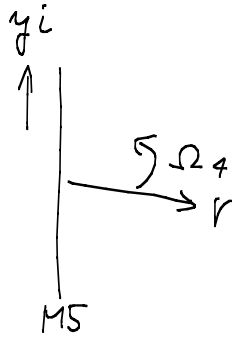


図 14: M2-ブレーン解における座標

数である。(§5.2 で用いたものとは異なるので注意。)

ゲージ場については、ブレーンが N 枚存在することから前節と同様にして次のように決まる。

$$K_4 = -|K| e^{\hat{t}} e^{\hat{1}} e^{\hat{2}} e^{\hat{r}}, \quad |K| = \frac{N l_p^6}{\Omega_7 r^7 b^7} \quad (653)$$

前節では上記の計量とゲージ場をアインシュタイン方程式し、得られた二階の微分方程式を解いた。ここではその代わりに古典解が BPS であること、すなわち古典解の上で破れていない超対称性が残っているということを仮定する。一般に対称性が破れているかどうかは、その変換を行ったときに場の値が変化するかどうかによって判定される。ここで考えているような古典解上の超対称性の場合には、フェルミオン場の真空期待値は 0 であることが仮定されているためにボゾン場の超対称変換は自動的に 0 になる。次の条件だけが非自明な方程式を与える。

$$\delta(\xi) \psi_\mu = D_\mu \xi + \frac{1}{24} \gamma_\mu K_4 \xi - \frac{1}{8} K_4 \gamma_\mu \xi = 0. \quad (654)$$

ψ_μ の変換則に現れる共変微分やゲージ場 K_4 は背景の計量、すなわち未知関数 $a(r)$ や $b(r)$ に依存している。この式に $\xi \neq 0$ であるような解が存在すると要請することにより未知関数に対する微分方程式の組を得ることができる。しかもそれらは一階の微分方程式であり、直接アインシュタイン方程式を解くよりも遥かに簡単に解くことができる。

BPS 条件 (654) を用いて古典解を求めるためには、スピノル場を用いる必要があるので、局所ローレンツ座標を設定する必要がある。ここでは多脚場を次のようにとることにする。

$$e^{\hat{i}} = a(r)dy^i, \quad e^{\hat{r}} = b(r)dr, \quad e^{\hat{a}} = rb(r)e^{\hat{a}}. \quad (655)$$

ただし $\hat{e}^{\hat{a}}$ は半径 1 の S^7 上で定義された多脚場 $e^{\hat{a}}d\theta^a$ である。ここでは局所直交系の添え字はハットをつけて区別した。このとき 0 でないスピン接続の成分は次の通りである。

$$\omega_{i-\hat{j}\hat{r}} = \frac{a'}{b}\delta_{ij}, \quad \omega_{a-\hat{b}\hat{r}} = \left(1 + \frac{rb'}{b}\right)\delta_{ab} = \omega_{a-\hat{b}\hat{r}}^0 + \frac{rb'}{b}\delta_{ab}, \quad \omega_{a-\hat{b}\hat{c}} = \omega_{a-\hat{b}\hat{c}}^0. \quad (656)$$

ただし、 ω^0 は、平坦な $r-\theta^a$ 空間上での、つまり $b(r) = 1$ のときのスピン接続である。ブレーンが BPS であるということから、 $\delta\psi_\mu = 0$ の解が存在するとして、そのスピノルを ξ とする。これはブレーンに垂直な方向の座標 (r, θ^a) に依存する。 $r \rightarrow \infty$ においては平坦な時空と同様に θ 方向の回転 $SO(8)$ のもとでスピノル表現に属しているはずである。この回転対称性はブレーンによる変形を考慮した計量 (652) においても存在するから、 ξ は r が小さいところでもやはり同じスピノル表現に属するはずである。つまり、 ξ の角度依存性は平坦な時空上の定数スピノルと同じになるはずである。このことから、平坦な時空上の定数スピノル ξ_0 を用いて ξ は次のように与えられる。

$$\xi = s(r)\xi_0. \quad (657)$$

$s(r)$ は r にのみ依存する関数である。このことから ξ は次の式を満足する。

$$\partial_i \xi = D_a^{(\omega_0)} \xi = 0, \quad \partial_r \xi = \frac{s'}{s} \xi. \quad (658)$$

$D_a^{(\omega_0)} \xi$ は平坦な時空上で定義される θ^a 方向の共変微分であり、次の式によって定義される。

$$D_a^{(\omega_0)} \xi = \partial_a \xi + \frac{1}{4} \omega_{a-\hat{b}\hat{c}}^0 \gamma^{\hat{b}\hat{c}} \xi + \frac{1}{2} \omega_{a-\hat{b}\hat{r}}^0 \gamma^{\hat{b}\hat{r}} \xi. \quad (659)$$

(656) を用いることで、曲がった背景上の ξ の共変微分は

$$D_a \xi = D_a^{(\omega_0)} \xi + \frac{rb'}{2b} \gamma_{\hat{a}}^{\hat{r}} \xi = \frac{rb'}{2b} \gamma_{\hat{a}}^{\hat{r}} \xi \quad (660)$$

が得られる。これらを用いることで、グラビティーノの超対称変換が 0 であるという条件から次の 3 つの独立な一階の微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \delta\psi_a &= \frac{r}{2} \gamma_{\hat{a}} \gamma_{\hat{r}} \left(\frac{b'}{b} - \frac{1}{6} b \gamma_{\hat{r}} K_4 \right) \xi = 0, \\ \delta\psi_i &= \frac{a}{2b} \gamma_i \gamma_{\hat{r}} \left(\frac{a'}{a} + \frac{1}{3} b \gamma_{\hat{r}} K_4 \right) \xi = 0, \\ \delta\psi_r &= \left(\frac{s'}{s} + \frac{1}{6} b \gamma_{\hat{r}} K_4 \right) \xi = 0. \end{aligned} \quad (661)$$

K_4 について

$$\gamma_{\hat{r}} K_4 = \gamma^{\hat{t}\hat{1}\hat{2}} |K_4| \quad (662)$$

であるが、変換パラメータが

$$\gamma^{\hat{t}\hat{1}\hat{2}} \xi = -\xi \quad (663)$$

を満足することを仮定すると、

$$\gamma_{\hat{r}} K_4 \xi = -\frac{Nl_p^6}{\Omega_7 r^7 b^7} \xi \quad (664)$$

が成り立ち、これを (661) に代入することで

$$-\frac{Nl_p^6}{\Omega_7 r^7 b^6} : \frac{a'}{a} : \frac{b'}{b} : \frac{s'}{s} = 1 : -\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : -\frac{1}{6}. \quad (665)$$

が得られる。この式から直ちに、

$$-\frac{Nl_p^6}{\Omega_7 r^7 b^6} = \frac{H'}{H}, \quad a = H^{-1/3}, \quad b = H^{1/6}, \quad s = H^{-1/6}. \quad (666)$$

が得られる。関数 H に対する微分方程式を解けば最終的に解 (651) が得られる。

E 3次元のスピンル

これまでに与えた M2-ブレーンの作用や BLG モデルの作用に現れたスピンルは 32 個の成分を持つ 11 次元のスピンルであった。しかし、ABJM モデルを含む 3 次元の理論を記述するには 3 次元のスピンルを用いる必要がある。そこで 3 次元時空におけるスピンルについて簡単にまとめておこう。

ミンコフスキー計量を

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +) \quad (667)$$

と選ぶ。3 次元の γ 行列は次の性質を満足する 2×2 の行列である。

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu\rho} = \mathbf{1}_2 \epsilon_{\mu\nu\rho}. \quad (668)$$

二つ目の式は完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ の定義とみなすこともできる。3 次元のローレンツ群は

$$\text{SO}(1, 2) \sim \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \text{Sp}(2, \mathbb{R}) \quad (669)$$

であり、2 成分スピンルは実表現である。従ってローレンツ群の生成子のスピンル表現 $(1/2)\gamma^{\mu\nu}$ の成分が実になるように γ 行列の表示を選ぶことができる。例えば次のように取ることができる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (670)$$

このときマヨラナススピノルを実スピノルとして定義することができる。以下では γ 行列が実である表示を用いる。 γ 行列およびスピノルに対してスピノル添え字の標準位置を次のように定めておく。

$$(\gamma^\mu)_a{}^b, \quad \psi_a \quad (671)$$

荷電共役行列は次の関係を満足する行列として定義する。

$$\epsilon^T = -\epsilon, \quad (\epsilon\gamma^\mu)^T = \epsilon\gamma^\mu \quad (672)$$

ϵ の二つのスピノル添え字の標準位置は ϵ^{ab} である。

スピノルの添え字の上げ下げを次のように定義する。

$$\psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = (\epsilon^{-1})_{ab}\psi^b. \quad (673)$$

ϵ 自身の添え字も同様のルールによって上げ下げする。

$$\epsilon_a{}^b = (\epsilon^{-1})_{ac}\epsilon^{cb} = \delta_a^b, \quad \epsilon_{ab} = (\epsilon^{-1})_{bc}\epsilon_a{}^c = (\epsilon^{-1})_{ba} \quad (674)$$

こうして定義される下付き添え字の ϵ を用いれば添え字の上げ下げルールは

$$\psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b, \quad \psi_a = \psi^b\epsilon_{ba} \quad (675)$$

となる。つまり、常に ϵ と左上と右下で添え字の縮約を取ることによって添え字の上げ下げができる。

となりあう変数のスピノル添え字を左上と右下で縮約する場合には、しばしばその添え字を省略する。つまり、

$$\chi\eta = \chi^a\eta_a = \epsilon^{ac}\chi_c\eta_a \quad (676)$$

である。

ベクトル表現に対するローレンツ群 $SO(1, 2) \sim SL(2, \mathbb{R})$ の表現は計量 $\text{diag}(-1, +1, +1)$ を不変に保つような $GL(3, \mathbb{R})$ の部分群として定義できるが、スピノル表現行列については荷電共役行列を不変に保つような $GL(2, \mathbb{R})$ の部分群として定義することもできる。 γ 行列および ϵ は実であるとする。

$$\epsilon^* = \epsilon, \quad (\gamma^\mu)^* = \gamma^\mu \quad (677)$$

γ 行列の二つのスピノル添え字の位置をそろえたものは対称行列である。

$$(\gamma^\mu)^{ab} = (\gamma^\mu)^{ba} \quad (678)$$

これを用いて、 γ 行列の積について次の式を示すことができる。

$$(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_k})^{ab} = (-)^{k-1}(\gamma^{\mu_k}\dots\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1})^{ba} \quad (679)$$

また、両側をグラスマン奇のスピンルではさんだものに対しては

$$(\psi_1 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_k} \psi_2) = (-)^k (\psi_2 \gamma^{\mu_k} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \psi_1) \quad (680)$$

が成り立ち、形式的に γ 行列を反対称行列のように取り扱えばよいことがわかる。ただし、次のような略記法を用いた。

$$\psi_1 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_k} \psi_2 = \psi_1^a (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_k})_a^b \psi_2^b \quad (681)$$

γ 行列の両側を同じスピンルではさんだ場合には、次の式が成り立つ。

$$\theta \gamma_\mu \theta = 0, \quad \theta \gamma_\mu \gamma_\nu \theta = \theta^2 \eta_{\mu\nu}, \quad \theta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \theta = \theta^2 \epsilon_{\mu\nu\rho}. \quad (682)$$

F 対称空間上の調和関数

この節では一般の対称空間上の場の調和関数展開について、本文中で必要となる事柄を中心に解説する。

F.1 局所座標

G をコンパクトリー群、 H をその部分群とする。 G と H のリー代数をそれぞれ \mathcal{G} 、 \mathcal{H} とする。 G の次元を d_G 、 H の次元を d_H とする。 \mathcal{H} は \mathcal{G} の部分線形空間であるが、その補空間を \mathcal{K} とする。 \mathcal{G} の基底を T_A ($A = 1, \dots, d_G$) とする。 \mathcal{G} の構造定数を次のように定義する。

$$[T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C. \quad (683)$$

\mathcal{H} および \mathcal{K} の基底をそれぞれ T_a ($a = 1, \dots, d_H$) および T_i ($i = 1, \dots, d_X \equiv d_G - d_H$) とする。構造定数が次の条件を満足すると仮定する。

$$f_{ia}^b = f_{ij}^k = f_{ab}^i = 0. \quad (684)$$

0 でない成分は次のものである。

$$f_{ij}^a, \quad f_{ia}^j, \quad f_{ab}^c. \quad (685)$$

このような条件が満足されるとき、次のように定義される空間 X は対称空間と呼ばれる。

$$X = H \backslash G \quad (686)$$

G は X 上のファイバー束である。 G から X への自然な写像を π とする。このファイバー束の断面を与える X から G への写像を σ とする。定義により $x \in M$ に対して

$$\pi(\sigma(x)) = x \quad (687)$$

である。

X の点 x における接空間上の局所座標を次の式によって定義する。

$$d\sigma(x) = (e - \omega)\sigma(x). \quad (688)$$

ただし、 e と ω はそれぞれ \mathcal{K} と \mathcal{H} に値を持つ differential である。この differential の成分として次のように多脚場 e_μ^i とスピン接続 ω_μ^a を定義する。

$$e = dx^\mu e_\mu^i T_i, \quad \omega = dx^\mu \omega_\mu^a T_a. \quad (689)$$

さらに ω_i^j を次のように定義しておく。

$$\omega_i^j = \omega^a f_{aj}^i. \quad (690)$$

σ の取り方は一意的ではない。 σ の選択それぞれに対して局所座標が定義されるが、それらの間の関係を見ておこう。二つの断面を σ および σ' とする。定義より、これらは次の関係によって結ばれている。

$$\sigma'(x) = h(x)\sigma(x), \quad h(x) \in H. \quad (691)$$

このとき、 σ' に対する局所座標は

$$d\sigma'(x) = (e' - \omega')\sigma'(x) \quad (692)$$

によって定義されるが、

$$e' - \omega' = (d\sigma')\sigma'^{-1} = d(h\sigma)(h\sigma)^{-1} = h(e - \omega)h^{-1} + dh h^{-1} \quad (693)$$

となり、これを \mathcal{H} 成分と \mathcal{K} 成分に分解すると、次の二つの式を得る。

$$\begin{aligned} e' &= heh^{-1}, \\ \omega' &= h\omega h^{-1} - dh h^{-1} = h(d + \omega)h^{-1}. \end{aligned} \quad (694)$$

これは多脚場とスピンの局所回転による変換である。成分に対する式を与えるために

$$hT_i h^{-1} = T_j \rho^H(h)^j_i \quad (695)$$

によって表現行列 ρ^H を定義すれば、変換則を

$$\begin{aligned} e_\mu^i &= \rho^H(h)^i_j e_\mu^j, \\ \omega_\mu^a &= \rho^H(h)^i_k \omega_\mu^k \rho^H(h^{-1})^l_j + \rho^H(h)^i_k \partial_\mu \rho^H(h^{-1})^k_j. \end{aligned} \quad (696)$$

と与えることができる。

(695) によって与えられる H の表現を R^H と書く。対応するリー代数 \mathcal{H} の表現にも同じく R^H を用いることにしよう。 \mathcal{H} の生成元 T_a の R^H 表現における表現行列は構造定数を用いて次のように与えられる。

$$\rho^H(T_a)^i_j = f_{aj}^i \quad (697)$$

曲率 R と捩率 T は

$$R = d\omega + \omega^2, \quad T = de + e\omega + \omega e. \quad (698)$$

によって定義される。これらを (688) から簡単に計算することができる。まず (688) の両辺を微分すると、

$$0 = d(e - \omega) - (e - \omega)^2 = T - R - e^2. \quad (699)$$

これを \mathcal{K} 成分と \mathcal{H} 成分に分けると、二つの式が得られる。

$$T = 0, \quad R = -e^2. \quad (700)$$

成分で表わすと、

$$\begin{aligned} de^i + \omega^i_j e^j &= 0, \\ d\omega^i_j + \omega^i_k \omega^k_j + \frac{1}{2} e^k e^l f_{kl}^a f_{aj}^i &= 0. \end{aligned} \quad (701)$$

この第 2 式は曲率テンソルが次のように与えられることを意味する。

$$R_{ij}^a = -f_{ij}^a, \quad R_{ij}^k{}_l = -f_{ij}^a f_{al}^k \quad (702)$$

具体例： S^d 例として、 d 次元球面

$$\mathbf{S}^d = SO(d) \backslash SO(d+1) \quad (703)$$

の場合を考えてみよう。 $SO(d+1)$ の生成子を

$$T_{[IJ]}, \quad I, J = 0, 1, \dots, d \quad (704)$$

と書くことにする。生成子の交換関係は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} [T_{[IJ]}, T_{[KL]}] &= \delta_{JK} T_{IL} - \delta_{JL} T_{IK} - \delta_{IK} T_{JL} + \delta_{IL} T_{JK} \\ &= \frac{1}{2} f_{[IJ][KL]}^{[MN]} T_{[MN]} \end{aligned} \quad (705)$$

最後の表式につけた係数 $1/2$ は添え字 $[MN]$ の縮約で同じものが二重に足されることを打ち消すための因子である。構造定数は次のように与えられる。

$$f_{[IJ][KL]}^{[MN]} = \delta_{JK} \delta_I^M \delta_L^N - \delta_{JL} \delta_I^M \delta_K^N - \delta_{IK} \delta_J^M \delta_L^N + \delta_{IL} \delta_J^M \delta_K^N - (M \leftrightarrow N) \quad (706)$$

生成子の規格化は S^d の半径に関係するが、ここで採用した規格化は半径が 1 の S^d に対応する。生成子 $T_{[IJ]}$ のうち、 I も J も 0 ではないものを \mathcal{H} の生成子として選ぶ。1 から d までの値をとる添え字として i, j を用いることにする。従って \mathcal{H} の基底は $T_{[ij]}$ であり、 \mathcal{K} の基底は $T_{[0i]}$ である。つまり、この具体例では T_A, T_a, T_i が次のように表される。

$$T_A \rightarrow T_{[IJ]}, \quad T_a \rightarrow T_{[ij]}, \quad T_i \rightarrow T_{[0i]}. \quad (707)$$

公式 (702) を用いて曲率テンソルを計算してみよう。

$$f_{[0i][0j]}^{[mn]} = -\delta_i^m \delta_j^n + \delta_i^n \delta_j^m, \quad f_{[kl][0n]}^{[0m]} = \delta_{nl} \delta_m^k - \delta_{ml} \delta_n^k \quad (708)$$

を用いれば、

$$R_{ij}{}^k{}_l = -\frac{1}{2} f_{[0i][0j]}^{[mn]} f_{[kl][0n]}^{[0m]} = \delta_i^k \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_j^k. \quad (709)$$

これは確かに半径 1 の S^d の曲率テンソルを与えている。

F.2 調和関数

X 上に多成分の場合 $f^m(x)$ を導入し、局所座標変換 (691) のもとで H の表現 R に従って次のように変換されるものとする。

$$f^m(x) = \rho^R(h)^m{}_n f^n(x) \quad (710)$$

ある断面 σ に対して f が与えられると、任意の切断に対する f が上式によって定まる。従って、 f を G 上の関数として定義することができる。これを f の H -拡張と呼び \tilde{f} で表す。ある σ に対する $f(x)$ が与えられたとき、その H -拡張 $\tilde{f}(g)$ は

$$\tilde{f}^m(\sigma(x)) = f^m(x) \quad (711)$$

および次の条件を満足するものとして一意的に定まる。

$$\tilde{f}^m(hg) = \rho^R(h)^m{}_n \tilde{f}^n(g), \quad \forall h \in H. \quad (712)$$

\tilde{f}^m が次の条件を満足する F^M の一部として定義されているとしよう。

$$F^M(g'g) = \rho^{\tilde{R}}(g')^M{}_N F^N(g), \quad \forall g' \in G. \quad (713)$$

ただし、 \tilde{R} は G の表現である。「一部として与えられる」というのは、ある定数行列 $P^m{}_M$ が存在して、

$$\tilde{f}^m(g) = P^m{}_M F^M(g) \quad (714)$$

となることを表わしている。このとき、 $F^M(g)$ を $\tilde{f}^m(g)$ の G 拡張と呼ぶ。 $\tilde{f}^m(g)$ が与えられたとき、その G 拡張は g' および添え字 m を選ぶごとに決まる無限個の G 上の関数 $\tilde{f}^m(g'g)$ の中から線形独立なものを選ぶことによって得ることができる。そのようにして得られた $F^M(g)$ が (713) を満足することは明らかである。また、 $g' = e$ の場合の $f^m(g)$ も $F^M(g)$ の中に含まれているはずであるから、 $f^m(g)$ を (714) のように与えることができることも明らかである。

(713) は $g' = h \in H$ の場合にも成り立つから、

$$\tilde{f}^m(hg) = P^m{}_M F^M(hg) = P^m{}_M \rho^{\tilde{R}}(h)^M{}_N F^N(g) \quad (715)$$

である。これと (712) を比較すれば

$$P^m_M \rho^{\tilde{R}}(h)^M_N = \rho^R(h)^m_n P^n_M \quad (716)$$

が得られる。これは、 G の表現 \tilde{R} を H の表現として分解したときに表現 R を含んでおり、その部分を取り出す行列が P であることを意味している。

(713) において、 $g = e$ と置き、 g' を g で置き換えれば

$$F^M(g) = \rho^{\tilde{R}}(g)^M_N F^N(e) \quad (717)$$

すなわち、 $F^M(g)$ は表現 \tilde{R} と、 g に依存しないベクトル $F^M(e)$ を与えればそれだけで一意的に定まる。以下では $F^M(e)$ を係数ベクトルと呼ぶ。ここで、 \tilde{R} は規約表現とは限らない。規約表現を用いて (717) を書き換えれば次のようになる。

$$\tilde{f}^m(g) = \sum_{\tilde{R}} \sum_{R \subset \tilde{R}} c_{R, \tilde{R}}^N (P_{R, \tilde{R}})^m_M \rho^{\tilde{R}}(g)^M_N \quad (718)$$

$\sum_{\tilde{R}}$ は G の全ての規約表現についての和を意味する。 $\sum_{R \subset \tilde{R}}$ は、 \tilde{R} を H の規約表現に分解したときに現れる表現のうち、場のスピン R に一致するものについての和を表わす。 $P_{R, \tilde{R}}$ は \tilde{R} の中から R の成分を抜き出す行列である。一般に G の規約表現 \tilde{R} の H への規約分解（これは分岐則と呼ばれる）の中には R を含まないものもあれば R を複数個含むものもある。前者の場合は表現 \tilde{R} は (718) の和に寄与しない。後者の場合には、 \tilde{R} に含まれる R それぞれに対して $c_{R, \tilde{R}}^N$ や $(P_{R, \tilde{R}})^m_M$ が定義され、それら全てに対して和を取らなければならない。従って、 $c_{R, \tilde{R}}^N$ の添え字 R は単に H の規約表現を指定するだけでなく、 \tilde{R} の規約分解に同じ表現が複数含まれる場合には、そのどれであるのかということまで指定するものである。

(718) は、あるスピン R の場の完全系を張る調和関数が次のように与えられることを示している。

$$Y_{R, \tilde{R}, N}^m(g) = (P_{R, \tilde{R}})^m_M \rho^{\tilde{R}}(g)^M_N \quad (719)$$

この調和関数を用いてスピン R を持つ場の一般形を改めて与えておこう。

$$\tilde{f}^m(g) = \sum_{\tilde{R}} \sum_{R \subset \tilde{R}} c_{R, \tilde{R}}^N Y_{R, \tilde{R}, N}^m(g) \quad (720)$$

具体例： $S^3 \times S^3$ の場合に、この上のスピン s の場の調和関数による展開を例として考えてみよう。 $H = SO(3) = SU(2)$ であるから、場のスピン R は一つの半整数値 s によって指定される。スピン s の場を

$$\tilde{f}^m(g), \quad m = -s, -s+1, \dots, s \quad (721)$$

とする。 m はスピンの添え字である。この場合、 $G = SO(4) = SU(2) \times SU(2)$ であるから、 G の表現 \tilde{R} は二つのスピンの組 (s_1, s_2) ($s_i \in \mathbf{Z}/2$) によって指定される。 $H = SU(2)$

は $G = SU(2) \times SU(2)$ の対角部分群であるので、表現 $\tilde{R} = (s_1, s_2)$ は群 H の表現としては、スピン s_1 表現とスピン s_2 表現のテンソル積表現となる。よく知られた角運動量の合成則

$$[s_1] \otimes [s_2] = [s_1 + s_2] \oplus [s_1 + s_2 - 1] \oplus \cdots \oplus [|s_1 - s_2|]. \quad (722)$$

(スピン s の表現を $[s]$ と表した。) より、 $\tilde{R} = (s_1, s_2)$ が $R = [s]$ を含むための条件は

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2, \quad s_1 + s_2 + s \in \mathbf{Z} \quad (723)$$

である。従って、調和関数による展開式 (720) は次のように与えることができる。

$$\tilde{f}^m(g) = \sum_{s_1, s_2} \sum_{m_1, m_2} c_{s_1, s_2}^{m_1, m_2} Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g) \quad (724)$$

ただし、 \sum_{s_1, s_2} は (723) を満足する全ての (s_1, s_2) についての和を表す。一般式 (720) の N についての和は表現 $\tilde{R} = (s_1, s_2)$ の成分についての和であるが、これは二つの量子数 m_1 と m_2 についての和として書き換えた。ただし m_i ($i = 1, 2$) は s_i に対する磁気量子数であり、次の範囲を走る。

$$m_i = -s_i, -s_i + 1, \dots, s_i. \quad (725)$$

F.3 共変微分

場 $f^m(x)$ に対する共変微分は次のように与えられる。

$$\nabla f^m(x) = df^m(x) + \rho^R(\omega(x)){}^m_n f^n(x) \quad (726)$$

右辺第 1 項を (714) および (713) を用いて G -拡張によって書き換えると、

$$df(x) = d[PF(\sigma(x))] = P\rho^{\tilde{R}}(e - \omega)F(\sigma(x)) = P\rho^{\tilde{R}}(e)F(\sigma(x)) - \rho^R(\omega)f(x) \quad (727)$$

となることを用いれば、共変微分 (726) を次のように書き換えることができる。

$$\nabla f(x) = P\rho^{\tilde{R}}(e)F(\sigma) \quad (728)$$

成分で表せば

$$\nabla_i f(x) = PT_i^{\tilde{R}}F(\sigma(x)) \quad (729)$$

ただし、 $\nabla_i = e_i^\mu \nabla_\mu$ であり、 $\rho^{\tilde{R}}(T_i)$ のことを簡単に $T_i^{\tilde{R}}$ と書いた。正確には、 P の作用する対象は G の表現になっていなければならないから、 T の添え字は \mathcal{H} のものではなく \mathcal{G} のものを用いて次のように書くべきである。

$$\nabla_i f^m(x) = P^{m,i}{}_{M,A}(T_A^{\tilde{R}})^M{}_N F^N(\sigma(x)), \quad P^{m,i}{}_{M,A} = P^m{}_M \delta_i^A. \quad (730)$$

ここで、 $P^m{}_M$ は F からスピン R 部分を抜き出す行列であり、 δ_i^A は \mathcal{G} から部分空間 \mathcal{H} を抜き出すための行列である。 $P^m{}_M \delta_i^A$ 全体で P と同様の役割を果たしている。この式は、

$f(x)$ の G -拡張が $F(g)$ であるとき、 $\nabla_i f(x)$ の G -拡張は $T_A^{\tilde{R}} F(g)$ と与えられることを意味している。以下では煩雑になるのを避けるために δ_i^A の部分は省略し、 F の添え字に作用する部分のみを P と表わすことにする。

この共変微分の座標変換を見てみよう。 $\sigma' = h\sigma$ を用いると、

$$\begin{aligned}
(\nabla_i f(x))' &= PT_i^{\tilde{R}} F(h\sigma(x)) \\
&= PT_i^{\tilde{R}} \rho^{\tilde{R}}(h) F(\sigma(x)) \\
&= \rho^R(h) P(h^{-1} T_i h)^{\tilde{R}} F(\sigma(x)) \\
&= \rho^H(h^{-1})^j_i \rho^R(h) P T_j F(\sigma(x)) \\
&= \rho^{H^*}(h)_i^j \rho^R(h) P T_j F(\sigma(x)) \\
&= \rho^{H^*}(h)_i^j \rho^R(h) \nabla_j f(x)
\end{aligned} \tag{731}$$

ただし、 ρ^H の反傾表現を ρ^{H^*} とした。すなわち、 $\rho^{H^*}(h) = (\rho^H(h^{-1}))^T$ である。これは $\nabla_i f(x)$ が $R \otimes R^{H^*}$ によって変換されることを表わしている。

R^{H^*} は ∇_i の添え字に作用しているが、共変微分を続けて作用させる場合にはこのことに注意しなければならない。 R^H と R^{H^*} の表現行列は

$$(T_a^{H^*})_i^j = f_{ia}^j, \quad (T_a^H)^j_i = -f_{ia}^j \tag{732}$$

であるが、これらの G 拡張は次のようにとればよい。

$$(T_C^{G^*})_A^B = f_{AC}^B, \quad (T_C^G)^B_A = -f_{AC}^B \tag{733}$$

これを用いて

$$\begin{aligned}
\nabla_j \nabla_i f(x) &= \nabla_j P [T_i^{\tilde{R}} F(g)] \\
&= P [T_j^{\tilde{R}} T_i^{\tilde{R}} F(g)] + P [(T_j^{G^*})_i^B T_B^{\tilde{R}} F(g)] \\
&= P [T_j^{\tilde{R}} T_i^{\tilde{R}} F(g)] + P [f_{ij}^B T_B^{\tilde{R}} F(g)] \\
&= P [T_i^{\tilde{R}} T_j^{\tilde{R}} F(g)]
\end{aligned} \tag{734}$$

従って、曲率は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
[\nabla_j, \nabla_i] f(x) &= P [[T_i^{\tilde{R}}, T_j^{\tilde{R}}] F(g)] \\
&= P [f_{ij}^a T_a^{\tilde{R}} F(g)] \\
&= f_{ij}^a T_a^{\tilde{R}} f(x)
\end{aligned} \tag{735}$$

これは (702) で与えた曲率テンソルの式を再現する。

調和関数 (719) に対してラプラシアンを作用させてみよう。式を見やすくするために添え字を省略して (719) を次のように書いておく。

$$Y_{R, \tilde{R}}(g) = P_{R, \tilde{R}} \rho^{\tilde{R}}(g) \tag{736}$$

ラプラシアンを定義するには計量が必要である。不変計量は次のように定義することができる。

$$g_{AB} \propto f_{AC}{}^D f_{BD}{}^C. \quad (737)$$

構造定数が (684) を満足するので、この計量は次の構造を持つ。

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ab} & \\ & g_{ij} \end{pmatrix} \quad (738)$$

g_{ij} の逆行列 g^{ij} を用いて、ラプラシアンを次のように定義する。

$$\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \quad (739)$$

このラプラシアンを調和関数に作用させると、

$$\begin{aligned} \Delta Y_{R, \tilde{R}}(g) &= P_{R, \tilde{R}} g^{ij} T_i^{\tilde{R}} T_j^{\tilde{R}} \rho^{\tilde{R}}(g) \\ &= P_{R, \tilde{R}} (g^{AB} T_A^{\tilde{R}} T_B^{\tilde{R}} - g^{ab} T_a^{\tilde{R}} T_b^{\tilde{R}}) \rho^{\tilde{R}}(g) \\ &= P_{R, \tilde{R}} (g^{AB} T_A^{\tilde{R}} T_B^{\tilde{R}}) \rho^{\tilde{R}}(g) - (g^{ab} T_a^R T_b^R) P_{R, \tilde{R}} \rho^{\tilde{R}}(g) \end{aligned} \quad (740)$$

ここで、 G の表現 \tilde{R} および H の表現 R に対する二次のカシミアを次のように定義する。

$$\begin{aligned} C_G(\tilde{R}) &= -g^{AB} T_A^{\tilde{R}} T_B^{\tilde{R}}, \\ C_H(R) &= -g^{ab} T_a^R T_b^R. \end{aligned} \quad (741)$$

これを用いると、ラプラシアンに対する式は

$$-\Delta Y_{R, \tilde{R}}(g) = [C_G(\tilde{R}) - C_H(R)] Y_{R, \tilde{R}}(g) \quad (742)$$

となる。

具体例： S^3 再び S^3 の例を調べてみよう。 $G = SO(4)$ の生成氏として以前の例で用いた交換関係 (705) を満足するものを採用する。

$G = SU(2) \times SU(2)$ の二組の $SU(2)$ 生成子を t_i および \tilde{t}_i としよう。 $H = SU(2)$ が G の対角部分群であるということは、生成子 $T_{[ij]}$ が次のように分解できることを意味する。

$$T_{[23]}^{(s_1, s_2)} = t_1^{(s_1)} + \tilde{t}_1^{(s_2)}, \quad T_{[31]}^{(s_1, s_2)} = t_2^{(s_1)} + \tilde{t}_2^{(s_2)}, \quad T_{[12]}^{(s_1, s_2)} = t_3^{(s_1)} + \tilde{t}_3^{(s_2)}. \quad (743)$$

残る 3 つ、すなわち \mathcal{K} の基底は次のように現される。

$$T_{[0i]}^{(s_1, s_2)} = t_i^{(s_1)} - \tilde{t}_i^{(s_2)}. \quad (744)$$

従って、 $\tilde{R} = (s_1, s_2)$ 上での G のカシミアは次のように与えられる。

$$C_G(\tilde{R}) = -\frac{1}{2} T_{[IJ]}^{(s_1, s_2)} T_{[IJ]}^{(s_1, s_2)} = -2[(t_i^{(s_1)})^2 + (\tilde{t}_i^{(s_2)})^2] = 2[s_1(s_1 + 1) + s_2(s_2 + 1)]. \quad (745)$$

一方、表現 $R = [s]$ の上での H のカシミアは

$$C_H(R) = -\frac{1}{2}T_{[ij]}^{(s)}T_{[ij]}^{(s)} = s(s+1). \quad (746)$$

従って、ラプラシアン固有値は次のように与えられる。

$$\Delta Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g) = -[2s_1(s_1+1) + 2s_2(s_2+1) - s(s+1)]Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g). \quad (747)$$

スピンの $s = 0$ であるスカラー場の場合には、 $R \subset \tilde{R}$ であるための条件 (723) より

$$(s_1, s_2) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (748)$$

でなければならない。このときラプラシアンの固有値は

$$\Delta Y_{l/2, l/2, m_1, m_2}(g) = -l(l+2)Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g). \quad (749)$$

となる。

スピンの $s = 1$ のベクトル場の場合には、条件 (723) より

$$(s_1, s_2) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 1\right), \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \left(\frac{l}{2} + 1, \frac{l}{2}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (750)$$

でなければならない。一般に、3次元のベクトル場は発散を持たないベクトル場と回転を持たないベクトル場の和として与えることができる。ベクトル場の発散はスカラー量であるから、発散を持つ部分は $\tilde{R} = (s_1, s_2)$ が恒等表現 $R = [0]$ を含むものでなければならない。このことから、(750)の中央のものが発散を持つ部分で、残りの二つが回転を持つ部分である。実際、このあとで与える回転に対する公式を用いると、(750)の中央のものの回転が0になることがわかる。これら3つのそれぞれについて、ラプラシアンの固有値は

$$\Delta = -[(l+2)^2 - 2], \quad -[l(l+2) - 2], \quad -[(l+2)^2 - 2] \quad (751)$$

となる。

ディラック演算子 $\nabla = \gamma^i \nabla_i$ についても考えてみよう。3次元の γ 行列としてパウリ行列を用いているとすれば、スピノル表現に対して、

$$T_{[ij]}^{(s)} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\gamma_k \quad (752)$$

が成り立つ。そこで、一般のスピン s を持つ場に対して次のものを定義するのが便利である。

$$\text{rot } f = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}T_{[ij]}^{(s)}\nabla_k f \quad (753)$$

スピンの $s = 1/2$ の場合にはこの演算子はディラック演算子に比例する。

$$\text{rot } f = -\frac{i}{2}\nabla f \quad (754)$$

ちなみにベクトル表現

$$(T_{[ij]}^{(1)})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (755)$$

に対しては、この演算子は

$$\text{rot } f^m = \epsilon_{mkn} \nabla_k f^n \quad (756)$$

となり、回転を与える。

(753) を (729) を用いて書き換えれば

$$\text{rot } f = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} T_{[ij]}^{(s)} PT_{[0k]}^{(s_1, s_2)} F(\sigma(x)) = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} PT_{[ij]}^{(s_1, s_2)} T_{[0k]}^{(s_1, s_2)} F(\sigma(x)) \quad (757)$$

(743) と (744) を用いれば

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} T_{[ij]}^{(s_1, s_2)} T_{[0k]}^{(s_1, s_2)} = (t_i^{(s_1)} + \tilde{t}_i^{(s_2)})(t_i^{(s_1)} - \tilde{t}_i^{(s_2)}) = s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1). \quad (758)$$

が得られるので、これを (757) に代入すれば

$$\text{rot } Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g) = -[s_1(s_1 + 1) - s_2(s_2 + 1)] Y_{s_1, s_2, m_1, m_2}^m(g) \quad (759)$$

が得られる。特に、スピンの $s = 1/2$ の場合には、 $R \subset \tilde{R}$ であるための条件 (723) より

$$(s_1, s_2) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l+1}{2}\right), \left(\frac{l+1}{2}, \frac{l}{2}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (760)$$

でなければならない。このときのディラック演算子の固有値はそれぞれ

$$\nabla = i \left(l + \frac{3}{2}\right), \quad -i \left(l + \frac{3}{2}\right) \quad (761)$$

である。

F.4 アイソメトリー

G に対する右作用

$$g \rightarrow gg', \quad g' \in G \quad (762)$$

は M の点を別の点に移す。すなわち、アイソメトリーを生成する。対応するキリングベクトル v^i は次のように与えることができる。

$$g\epsilon^A T_A = (v^i(g)T_i + v^a(g)T_a)g. \quad (763)$$

ただし、 ϵ^A はアイソメトリーの変換パラメータである。この式から、 v^A は次のように与えられることがわかる。

$$v^A(g) = \rho(g)^A_B \epsilon^B. \quad (764)$$

v^A のうち一部の成分 v^i がアイソメトリーを生成するキリングベクトルである。言い方を
変え、 v^A は v^i の G -拡張になっている。キリングベクトルを与える式を次のように書
いておこう。

$$v^i(g) = P^i_{A\rho}(g)^A_B \epsilon^B. \quad (765)$$

キリングベクトルの共変微分は

$$\nabla_j v^i(g) = P^i_C(T_j)^C_{A\rho}(g)^A_B \epsilon^B = f_{ja}^i \rho(g)^a_B \epsilon^B = f_{ja}^i v^a(g). \quad (766)$$

すなわち、 v^i を G -拡張して得られる残りの成分 v^a は v^i の共変微分を与えている。

$$-(v \overleftarrow{\nabla})^i_j = v^a (T_a)^i_j \quad (767)$$

あるいは

$$v^a = -(v \overleftarrow{\nabla})^a \quad (768)$$

一般のスピンをもつ場 f に対してリー微分は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_v f = v^i \nabla_i f - (v \overleftarrow{\nabla})^a T_a f \quad (769)$$

$$f^m = P^m_{M\rho}(g)^M_N F^N \quad (770)$$

であるとき、このリー微分は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v f^m &= v^i P^m_K(T_i)^K_{M\rho}(g)^M_N F^N - (v \overleftarrow{\nabla})^a P^m_K(T_a)^K_{M\rho}(g)^M_N F^N \\ &= v^A P^m_K(T_A)^K_{M\rho}(g)^M_N F^N \\ &= \rho(g)^A_B \epsilon^B P^m_K(T_A)^K_{M\rho}(g)^M_N F^N \\ &= \epsilon^B P^m_K \left[\rho(g)^K_P(T_B)^P_{Q\rho}(g^{-1})^Q_M \right] \rho(g)^M_N F^N \\ &= \epsilon^B P^m_K \rho(g)^K_P(T_B)^P_N F^N \end{aligned} \quad (771)$$

すなわち、 $f = P\rho F$ に対するリー微分は F に対する次の変換によって実現される。

$$\delta F^M = \epsilon^A (T_A)^M_N F^N \quad (772)$$

すなわち、アイソメトリーは係数ベクトルに対する G の作用として実現される。

参考文献

- [1] Kaluza, Theodor (1921). "Zum Unitatsproblem in der Physik". Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921: 966-972.
- [2] Klein, Oskar (1926). "Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie". Zeitschrift fur Physik a Hadrons and Nuclei 37 (12): 895-906. doi:10.1007/BF01397481.

- [3] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, “Supergravity theory in 11 dimensions,” *Phys. Lett. B* **76**, 409 (1978).
- [4] E. Witten, “String theory dynamics in various dimensions,” *Nucl. Phys. B* **443**, 85 (1995) [arXiv:hep-th/9503124].
- [5] A. Kapustin, B. Willett and I. Yaakov, “Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with *JHEP* **1003**, 089 (2010) [arXiv:0909.4559 [hep-th]].
- [6] N. Drukker, M. Marino and P. Putrov, “From weak to strong coupling in ABJM theory,” arXiv:1007.3837 [hep-th].
- [7] C. P. Herzog, I. R. Klebanov, S. S. Pufu and T. Tesileanu, “Multi-Matrix Models and Tri-Sasaki Einstein Spaces,” *Phys. Rev. D* **83**, 046001 (2011) [arXiv:1011.5487 [hep-th]].
- [8] E. Bergshoeff, M. de Roo and T. Ortin, “The eleven-dimensional five-brane,” *Phys. Lett. B* **386**, 85 (1996) [arXiv:hep-th/9606118].
- [9] N. Dragon, “Torsion And Curvature In Extended Supergravity,” *Z. Phys.* **C2**, 29-32 (1979).
- [10] N. Seiberg, “*Observations on the Moduli Space of Superconformal Field Theories*”, *Nucl. Phys.* **B303**(1988)286.
- [11] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, “Supermembranes and eleven-dimensional supergravity,” *Phys. Lett. B* **189**, 75 (1987).
- [12] E. Bergshoeff, E. Sezgin and P. K. Townsend, “Properties of the Eleven-Dimensional Super Membrane Theory,” *Annals Phys.* **185**, 330 (1988).
- [13] R. Gueven, “Black p-brane solutions of D = 11 supergravity theory,” *Phys. Lett. B* **276**, 49 (1992).
- [14] M. Cvetič and A. A. Tseytlin, “Non-extreme black holes from non-extreme intersecting M-branes,” *Nucl. Phys. B* **478**, 181 (1996) [arXiv:hep-th/9606033].
- [15] A. Strominger, “Open p-branes,” *Phys. Lett. B* **383**, 44 (1996) [arXiv:hep-th/9512059].
- [16] P. K. Townsend, “D-branes from M-branes,” *Phys. Lett. B* **373**, 68 (1996) [arXiv:hep-th/9512062].
- [17] 今村洋介, “超対称 Chern-Simons 理論と M2-ブレン,” *素粒子論研究・電子版*, Volume 1, No. 5 (2009)

- [18] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals,” JHEP **0810**, 091 (2008) [arXiv:0806.1218 [hep-th]].
- [19] J. Bagger and N. Lambert, “Modeling multiple M2’s,” Phys. Rev. D **75**, 045020 (2007) [arXiv:hep-th/0611108].
- [20] J. Bagger and N. Lambert, “Gauge Symmetry and Supersymmetry of Multiple M2-Branes,” Phys. Rev. D **77**, 065008 (2008) [arXiv:0711.0955 [hep-th]].
- [21] J. Bagger and N. Lambert, “Comments On Multiple M2-branes,” JHEP **0802**, 105 (2008) [arXiv:0712.3738 [hep-th]].
- [22] A. Gustavsson, “Algebraic structures on parallel M2-branes,” arXiv:0709.1260 [hep-th].
- [23] A. Gustavsson, “Selfdual strings and loop space Nahm equations,” JHEP **0804**, 083 (2008) [arXiv:0802.3456 [hep-th]].
- [24] A. Gustavsson and S. J. Rey, “Enhanced N=8 Supersymmetry of ABJM Theory on R^{*8} and $R^{*8}/Z(2)$,” arXiv:0906.3568 [hep-th].
- [25] O. K. Kwon, P. Oh and J. Sohn, “Notes on Supersymmetry Enhancement of ABJM Theory,” JHEP **0908**, 093 (2009) [arXiv:0906.4333 [hep-th]].
- [26] E. Cremmer, S. Ferrara, “Formulation of Eleven-Dimensional Supergravity in Superspace,” Phys. Lett. **B91**, 61 (1980).
- [27] L. Brink, P. S. Howe, “Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass-Shell in Superspace,” Phys. Lett. **B91**, 384 (1980).
- [28] D. L. Jafferis, “The Exact Superconformal R-Symmetry Extremizes Z,” [arXiv:1012.3210 [hep-th]].
- [29] N. Hama, K. Hosomichi, S. Lee, “Notes on SUSY Gauge Theories on Three-Sphere,” JHEP **1103**, 127 (2011). [arXiv:1012.3512 [hep-th]].
- [30] D. L. Jafferis, I. R. Klebanov, S. S. Pufu, B. R. Safdi, “Towards the F-Theorem: N=2 Field Theories on the Three-Sphere,” [arXiv:1103.1181 [hep-th]].
- [31] R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, “Coordinate invariance and energy expressions in general relativity,” Phys. Rev. **122**, 997 (1961).
- [32] M. Marino, “Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern-Simons-matter theories,” arXiv:1104.0783 [hep-th].

[33] 「超重力理論入門」藤井保憲著, 産業図書

[34] B. Willett and I. Yaakov, “N=2 Dualities and Z Extremization in Three Dimensions,”
arXiv:1104.0487 [hep-th].