

# 物理数学第二 第1回

2015年10月6日

## 目次

1	フーリエ変換	1
1.1	フーリエ展開からフーリエ変換へ	1
1.2	フーリエ変換の例	4

## 1 フーリエ変換

### 1.1 フーリエ展開からフーリエ変換へ

任意の関数を周期  $P = \infty$  の周期関数とみなすことでフーリエ展開してみよう。 $f(x)$  をなめらかな周期関数（周期  $P$ ）とする。そのフーリエ展開は次のように与えられる。

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i \frac{2\pi n}{P} x},$$
$$c_n = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} e^{-i \frac{2\pi n}{P} x} f(x) dx. \quad (1)$$

$P \rightarrow \infty$  の極限をとりたいので、準備としてできるだけ式中に  $P$  が現れないように書き換えよう。 $k_n$  と  $\Delta k$ 、そして関数  $F(k_n)$  を

$$k_n = \frac{2\pi n}{P}, \quad \Delta k = \frac{2\pi}{P}, \quad c_n = \Delta k F(k_n) \quad (2)$$

によって定義して (1) を書き換えると、次のようになる。

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta k F(k_n) e^{i k_n x},$$
$$F(k_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-P/2}^{P/2} e^{-i k_n x} f(x) dx \quad (3)$$

$P \rightarrow \infty$  の極限では、 $\Delta k \rightarrow 0$  となり、 $k_n$  を連続量  $k \in \mathbb{R}$  とみなすことができる。その場合、 $n$  に対する和は

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta k(\cdots) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk(\cdots) \quad (4)$$

のように積分で書き換えられる。その結果、次の式を得る。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}, \\ F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

$f(x)$  が与えられたとき (5) の二つ目の式で与えられる  $F(k)$  のことを  $f(x)$  のフーリエ変換と呼ぶ。 $\tilde{f}(k)$  を用いる場合もある。わざわざ別の文字を用いるのが面倒な場合には同じ文字を用いて  $f(k)$  とあらわし引数が  $x$  であるか  $k$  であるかによって区別することもある。) この  $F(k)$  から逆に元の関数  $f(x)$  を与える式はしばしば反転公式と呼ばれる。反転公式によって実際に元の関数  $f(x)$  が得られることについてはあとで改めて証明を与える。

二つの式は互いに似通っているが、 $2\pi$  が片方の式にだけついているという非対称性がある。これは関数  $F(k)$  の定義によるものであり、本質的ではない。例えば (5) の  $F(k)$  を  $(1/2\pi)F(k)$  で置き換えれば

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}, \\ F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \quad (6)$$

となるし、(5) の  $F(k)$  を  $(1/\sqrt{2\pi})F(k)$  で置き換えれば

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}, \\ F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

$f(x)$  が連続関数ではない場合には、フーリエ展開の場合と同様なルールに従う。すなわち、 $f(x)$  が区分的に滑らかで  $x \rightarrow \pm\infty$  で十分速く 0 になる関数であったとき、

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (8)$$

によって  $F(k)$  を定義し、その  $F(k)$  から

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx}, \quad (9)$$

を定義すると、 $\bar{f}(x)$  ともとの関数  $f(x)$  とは次の関係にある。

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \quad (10)$$

すなわち、不連続点においてはその両側の値の平均値が再現される。

ここでは特に断らない限り  $f(x)$  は実関数であると仮定しているが、その場合でも  $F(k)$  は実関数であるとは限らない。 $f(x)$  が実であるという条件に対応する式は

$$F(k)^* = F(-k) \quad (11)$$

である。

$f(x)$  が偶関数または奇関数の場合、フーリエ展開のときと同様に、cosine 関数、sine 関数を用いて変換することができる。

$f(x)$  が偶関数であれば

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [e^{-ikx} f(x) + e^{ikx} f(-x)] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) f(x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

のように、cosine 関数を用いて変換することができる。これは明らかに偶関数である。このとき逆変換の式は

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \cos(kx) F(k) dk \quad (13)$$

となる。係数が異なっているが、積分範囲を  $(-\infty, \infty)$  に戻せば

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx f(x) dx, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx F(k) dk \end{aligned} \quad (14)$$

となり、一般の式の場合と係数は同じになる。 $f(x)$  が実関数であっても一般には  $F(k)$  は実関数ではないが、 $f(x)$  が実関数かつ偶関数であれば  $F(k)^* = F(-k)$  と  $F(-k) = F(k)$  が同時に成り立つので  $F(k)$  は実関数である。このことは (14) に虚数単位  $i$  が一切現れないことから確認できる。

同様に  $f(x)$  が奇関数の場合は  $F(k)$  も奇関数であり、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} iF(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx f(x) dx, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin kxi F(k) dk. \end{aligned} \quad (15)$$

虚数単位  $i$  が現れるが、それがいやであれば  $iF(k)$  を改めて  $F(k)$  と置けばよい。  
 $(f(x)$  が実関数でありかつ奇関数である場合には、 $F(k)^* = F(-k)$  と  $F(-k) = -F(k)$  が成り立つから、 $F(k)$  は純虚であり、 $iF(k)$  は必ず実である。)

## 1.2 フーリエ変換の例

フーリエ変換の例を幾つか例を挙げておこう。

具体的な計算をする前に収束性について確認しておく。フーリエ変換の式に現れる

$$\int f(x) \cos kx dx, \quad \int f(x) \sin kx dx, \quad \int f(x) e^{ikx} dx \quad (16)$$

のような積分は、フーリエ積分と呼ばれる。 $f(x)$  が絶対積分可能、すなわち  $\int |f(x)| dx < \infty$  であればフーリエ積分は収束する。証明は簡単である。例えば  $\cos$  の場合には、被積分関数に対して

$$|f(x) \cos kx| = |f(x)| |\cos kx| \leq |f(x)| \quad (17)$$

が成り立つ。これを積分すればよい。

例その1  $f(x)$  が次のように与えられる場合を考える。

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a}} \quad (18)$$

このとき

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2a}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-\frac{1}{2a}(x+ika)^2} e^{-\frac{a}{2}k^2} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$\int dx e^{-\frac{x^2}{2a}} = \sqrt{2\pi a} \quad (20)$$

を用いると

$$F(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}k^2} \quad (21)$$

が得られる。

逆変換の計算も同様であり、 $F(k)$  からもとの関数  $f(x)$  が得られることが確かめられる。

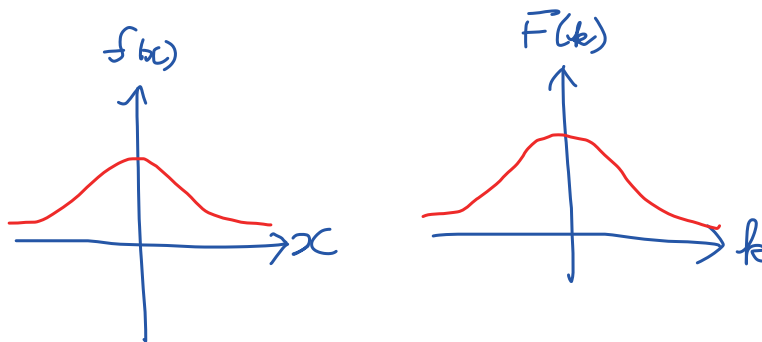


図 1:  $f(x)$  とそのフーリエ変換  $F(k)$

例その2  $f(x)$  が

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (22)$$

と与えられる場合には

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-a|x|} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\infty} e^{-ikx - ax} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ikx + ax} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{a + ik} + \frac{1}{a - ik} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

逆変換の式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + k^2} e^{ikx} dk. \quad (24)$$

は留数定理を用いて確認できる。各自やってみること。

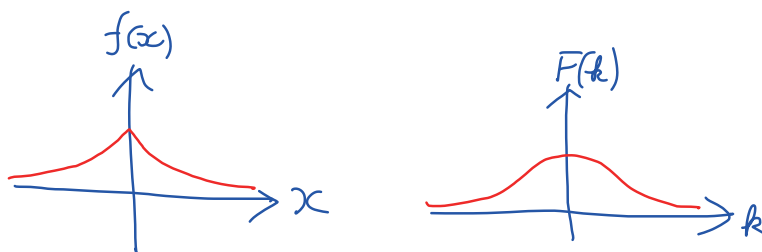


図 2:  $f(x)$  とそのフーリエ変換  $F(k)$

例その3 次のように定義される関数を考える。

$$f(x) = \beta \quad (|x| < \alpha), \quad f(x) = 0 \quad (|x| > \alpha). \quad (25)$$

このとき

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos kx dx \\ &= \frac{\beta}{\pi k} \sin k\alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

逆変換の式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\beta}{\pi k} \sin(k\alpha) e^{ikx} dk \quad (27)$$

が  $|x| \neq \alpha$  に対して成り立つことも留数定理を用いて簡単に確認できる。各自やってみること。また、不連続点  $|x| = \alpha$  においてはどうか？

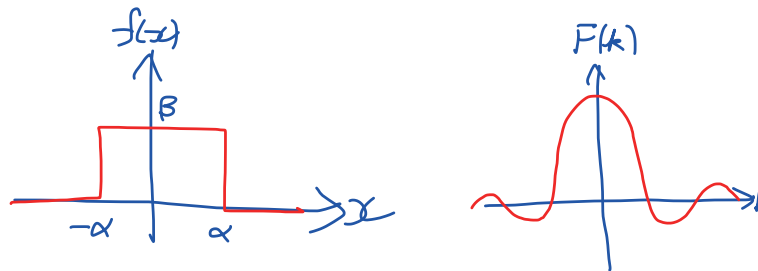


図 3:  $f(x)$  とそのフーリエ変換  $F(k)$

# 物理数学第二 第2回

2015年10月13日

## 目次

1	フーリエ変換	1
1.3	フーリエ逆変換	1
1.4	ディラックの $\delta$ 関数	5

## 1 フーリエ変換

### 1.3 フーリエ逆変換

関数  $f(x)$  が与えられたとき、そのフーリエ変換  $F(k)$  は次のように与えられる。

$$F(k) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (1)$$

この式によって定義された  $F(k)$  を用いて、次の関数  $\bar{f}(x)$  を定義する。

$$\bar{f}(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (2)$$

いくつかの例で  $f(x)$  と  $\bar{f}(x)$  が一致することは確認した。 $f(x)$  が（区分的になめらかではあるが）不連続な関数である場合には、

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (3)$$

が成り立つ。

ここでは  $f(x)$  が次の条件を満足すると仮定し、 $\bar{f}(x) = f(x)$  であることを証明する。

- $f(x)$  は滑らかな関数である。すなわち、 $f'(x)$  が存在し、しかも  $f'(x)$  が連続である。

- $f(x)$  は絶対積分可能である。すなわち、積分  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  が有限の値に収束する。

以前に述べたように、このときフーリエ積分は収束し、 $F(k)$  を (1) によって定義することができる。このとき、 $f(x) = \bar{f}(x)$  であることを証明したい。

**証明** まず、 $F(k)$  から  $\bar{f}(x)$  を与える広義積分の定義を明確にしておこう。広義積分は次のように上限と下限を同時に動かして極限を取って定義するとする。

$$\bar{f}(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(k) e^{ikx} dk \quad (4)$$

$F(k)$  の定義 (1) を代入すると、

$$\bar{f}(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) dy \right) e^{ikx} dk \quad (5)$$

$y$  積分は一様絶対収束であるから、 $k$  積分と  $y$  積分は入れ替え可能である。

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ik(x-y)} dk \right) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) D_R(x-y) dy \end{aligned} \quad (6)$$

ただし  $D_R(z)$  を次のように定義した。

$$D_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ikz} dk = \frac{\sin Rz}{\pi z} \quad (7)$$

式を見やすくするために、 $x = 0$  の場合を考える。(そうでない場合には、適当に  $x$  軸の原点をずらせばよい。) 示すべきことは

$$f(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) D_R(y) dy \quad (8)$$

つまり、「任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある  $R_0$  が存在し、 $R > R_0$  なら常に

$$I \equiv \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) D_R(y) dy - f(0) \right| < 5\varepsilon \quad (9)$$

が成り立つ。」ということである。

これを示すために、(9) を次のように 5 つの部分に分ける。(図 1)



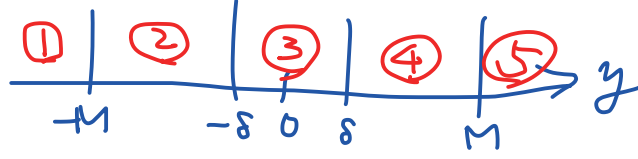


図 1:  $y$  の積分範囲を 5 つに分割

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left| \int_{-\infty}^{-M} f(y) D_R(y) dy \right|, \\
 I_2 &= \left| \int_{-M}^{-\delta} f(y) D_R(y) dy \right|, \\
 I_3 &= \left| \int_{-\delta}^{\delta} f(y) D_R(y) dy - f(0) \right|, \\
 I_4 &= \left| \int_{\delta}^M f(y) D_R(y) dy \right|, \\
 I_5 &= \left| \int_M^{\infty} f(y) D_R(y) dy \right|.
 \end{aligned} \tag{10}$$

以下では、 $R_0$  を十分大きくとった場合に  $M$  と  $\delta$  をうまく選べばこれらが全て  $I_n < \varepsilon$  を満足することを示す。そうすれば

$$I \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 < 5\varepsilon \tag{11}$$

であるから (9) が示されたことになる。

- $I_1, I_5 < \varepsilon$  について

$f(x)$  が絶対積分可能であり、 $D_R(x)$  が有界であることから  $f(x)D_R(x)$  もやはり絶対積分可能。このことは、 $M$  を十分大きく選ぶことで  $I_1 < \varepsilon$  および  $I_5 < \varepsilon$  が成り立つようにできることを意味する。

- $I_3 < \varepsilon$  について

$I_3$  は  $[-\delta, \delta]$  における積分と  $f(0)$  の差であるが、それが小さいことを示すために、補助的な量を間に一つ挟み、それぞれの差が小さいことを示す。

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(y) D_R(y) dy \xrightarrow{A} \int_{-\delta}^{\delta} f(0) D_R(y) dy \xrightarrow{B} f(0) \tag{12}$$

$I_3$  はこの両端にあるものの差なので、 $I_3 < \varepsilon$  を示すには、 $A$  の矢印の両側の差と  $B$  の矢印の両側の差が  $\varepsilon/2$  よりも小さくできることを示せばよい。

まず、 $A$  の両側の差は

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(y) - f(0)) D_R(y) dy \right| \tag{13}$$

であるが、 $f(x)$  が滑らかな関数であることから区間  $[-\delta, \delta]$  において  $|f'(x)|$  の最大値  $a$  が存在する。するとその区間において  $|f(x) - f(0)| \leq a|x|$  が成り立つ。これを用いれば

$$\begin{aligned} (13) &\leq \int_{-\delta}^{\delta} a|y||D_R(y)|dy \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{a}{\pi} |\sin Ry| dy \\ &< \frac{2\delta a}{\pi} \end{aligned} \quad (14)$$

よって、 $\frac{2\delta a}{\pi} < \varepsilon/2$  が満足されるように  $\delta$  を十分小さく選んでおけば  $A$  の両側の差は  $\varepsilon/2$  未満になる。

次に  $B$  の両側の差であるが、これは

$$f(0) \left| \int_{-\delta}^{\delta} D_R(y) dy - 1 \right| \quad (15)$$

と表せる。この中に現れる積分は  $y = t/R$  という変数変換によって

$$\int_{-R\delta}^{R\delta} \frac{\sin t}{\pi t} dt \quad (16)$$

と書き換えられるが、これは  $R\delta \rightarrow \infty$  の極限で 1 になる。すなわち、(15) の絶対値の中身は  $R$  を十分大きく取ることでも小さくすることができる。言い換えると、 $R > R_1$  の場合には常に

$$(15) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (17)$$

となるような値  $R_1$  が存在する。

こうして、 $A$  の両側の差と  $B$  の両側の差が  $\varepsilon/2$  未満にできることがわかった。そのとき  $I_3 < \varepsilon$  が成り立つ。

- $I_2, I_4 < \varepsilon$  について

これは、リーマンの補助定理と呼ばれる次の定理を用いる。

「閉区間  $[a, b]$  で区分的に連続な関数  $g(x)$  に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin Nx dx = 0 \quad (18)$$

が成り立つ。」

$I_2$  と  $I_4$  に現れる被積分関数は (18) に現れる関数と同じ形をしている。従ってこの定理を適用することができる。その結果、 $R \rightarrow \infty$  の極限では  $I_2$  と  $I_4$  は 0 に収束することがわかる。つまり、 $R > R_2$  であれば  $I_2, I_4 < \varepsilon$  となるような  $R_2$  が存在する。

以上より、 $R_0 = \max(R_1, R_2)$  ととれば、 $R > R_0$  に対して  $I_n < \varepsilon$  が成り立ち、(11) が示された。

以上で証明は終了である。

ここでは、滑らかな関数の場合を考えた。この条件をもう少し緩めることもできる。例えば、区分的に滑らかで絶対積分可能な関数については、

$$f(x) \rightarrow F(k) \rightarrow \bar{f}(x) \quad (19)$$

のように、フーリエ変換と逆変換を行った結果について次の関係式が成り立つことは以前に述べた。

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]. \quad (20)$$

しかし、物理への応用を考えた場合、これでも条件は強すぎる。実用上、フーリエ積分が収束しないような場合まで考える必要がでてくる。そのようなフーリエ変換を扱うには「超関数」の概念を導入する必要がある。

## 1.4 ディラックの $\delta$ 関数

ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  は次の関係式を満足するものとして定義される。

$$\int \delta(x)f(x)dx = f(0). \quad (21)$$

ただし、 $f(x)$  は任意の（たちのよい）関数である。

この条件を満足する  $\delta(x)$  は「関数」ではありえない。なぜなら、(21) を満足するためには左辺の積分が  $x \neq 0$  における  $f(x)$  に依存してはならないから  $x \neq 0$  においては  $\delta(x) = 0$  でなければならず、 $\delta(0)$  が何であろうと、有限の値をとる限り (21) の積分は 0 になってしまうからである。実は  $\delta(x)$  は超関数 (distribution) と呼ばれるものの一つである。（しかし超関数は関数と同じような扱いができるため、厳密にこの区別をせずに超関数を関数と呼ぶこともある。 $\delta(x)$  のことも以下では習慣に従いデルタ「関数」と呼ぶ。）

関数は、「ある値を入れたときに、それに応じて何らかの値を与えるもの」として定義されるが、超関数においてそのような定義を用いることはできない。超関数は (21) のような式を通して「重み関数」として定義されるものである。つまり、超関数  $D(x)$  は、たちのよい任意の関数  $f(x)$  に対して

$$F[f] = \int D(x)f(x)dx \quad (22)$$

を与えることによって定義される。ただし、 $F[f]$  は関数  $f(x)$  を与えたときに一つ値が定まる汎関数である。超関数は常に積分を伴って現れるため、このように定義しておけば十分なのである。

デルタ関数の定義は  $F[f] = f(0)$  と取ることに対応する。

デルタ関数は次の性質を満足する。

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0) \quad (23)$$

$$\delta(x)g(x) = \delta(x)g(0), \quad (24)$$

これらは超関数の間の関係であり、任意の  $f(x)$  について次の式が成り立つことを意味する。

$$\int \delta(ax)f(x)dx = \int \frac{1}{|a|} \delta(x)f(x)dx, \quad (25)$$

$$\int \delta(x)g(x)f(x)dx = \int \delta(x)g(0)f(x)dx. \quad (26)$$

一つ目の式は変数変換  $ax \rightarrow x$  を行うことで、二つ目の式はデルタ関数の定義 (21) を用いることで証明できる。

(21) の式は、次の形で現れることが多い。

$$f(x) = \int \delta(x-y)f(y)dy. \quad (27)$$

前節で証明した反転公式について見直しておこう。 $F(k)$  から逆に  $f(x)$  を得ることができることは、たちの良い（なめらか、絶対積分可能などの条件を満足する）関数  $f(x)$  に対して次の関係式を示すことと同じであった。

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int D_R(x-y)f(y)dy \quad (28)$$

ただし  $D_R(z)$  は次の関数である。

$$D_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ikz} dk = \frac{\sin Rz}{\pi z} \quad (29)$$

(27) と比較すれば、(28) は超関数として次の関係が成り立つことを主張している。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} D_R(x) = \delta(x) \quad (30)$$

(28) から (30) を得る際に、 $R \rightarrow \infty$  の極限と  $y$  積分の順序を交換したわけではないことに注意しよう。(30) の両辺を超関数とみなすと、それらは重み関数として定義されているわけであるから、(30) が意味していることは、両辺の関数としての値が等しいということではなく、任意のたちのよい  $f(x)$  に対して次の関係が成り立つということをいっているのである。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int D_R(x)f(x)dx = \int \delta(x)f(x)dx \quad (31)$$

(物理における実用上は「超関数を導入することで極限操作と積分を入れ替えることができる。」と理解しておいても(たぶん)問題はない。)

(30) の左辺に (29) を代入することで次の関係式を得ることができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dk = \delta(x) \quad (32)$$

これは、フーリエ変換を用いた計算で頻繁に用いられる重要な公式である。例えば、(32) を用いてデルタ関数のフーリエ変換が次のように与えられることを示すことができる。

$$f(x) = \delta(x - a) \quad \rightarrow \quad F(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-ika}. \quad (33)$$

(30) あるいは (31) のようにデルタ関数を定義する場合に、(29) に与えた関数を用いる必要はなく、積分値  $\int F_R(x) dx = 1$  を保ちながら幅が狭くなっていくような関数であれば他のものでもよい。例えば、 $D_R(x)$  の代わりに

$$F_R(x) = 0 \quad (|x| > \frac{1}{2R}), \quad F_R(x) = R \quad (|x| < \frac{1}{2R}) \quad (34)$$

のような関数を用いて  $\delta(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} F_R(x)$  と定義してもよい。

# 物理数学第二 第3回

2015年10月20日

## 目次

1	フーリエ変換	1
1.5	超関数を用いることで可能となるフーリエ変換	1
1.6	微分方程式への応用	5
1.7	フーリエ変換の残り	8

## 1 フーリエ変換

### 1.5 超関数を用いることで可能となるフーリエ変換

超関数（主にデルタ関数）を用いることで可能となるフーリエ変換の例をいくつか与えておこう。

**$\delta$  関数**  $\delta$  関数自身のフーリエ変換は定数になる。

$$f(x) = \delta(x) \quad \leftrightarrow \quad F(k) = \frac{1}{2\pi}. \quad (1)$$

逆に、 $f(x)$  が定数であれば、そのフーリエ変換  $\delta(k)$  はデルタ関数で表される。

$$f(x) = 1 \quad \leftrightarrow \quad F(k) = \delta(k). \quad (2)$$

**周期関数**  $f(x)$  が周期関数である場合、フーリエ積分  $\int e^{-ikx} f(x) dx$  は収束しない。しかしながらデルタ関数を用いることでフーリエ変換を与えることができる。

$f(x)$  を、次のようなフーリエ級数として表される周期  $P$  の関数であるとしよう。

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x}, \quad k_n \equiv \frac{2\pi n}{P}. \quad (3)$$

これをフーリエ変換すると次のようになる。

$$F(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(k - k_n). \quad (4)$$

**多項式**  $f(x)$  が多項式である場合には、フーリエ積分  $\int e^{-ikx} f(x) dx$  は収束しない。しかしながらデルタ関数を用いることでそのフーリエ変換を与えることができる。まず、次の関係式から出発しよう。

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} dx \quad (5)$$

この式の両辺に  $id/dk$  を作用させると

$$i\delta'(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} x dx \quad (6)$$

( $\delta'(k)$  は  $\delta(k)$  の微分を表す。) が得られる。この式は  $f(x) = x$  のフーリエ変換が  $F(k) = i\delta'(k)$  によって与えられることを意味している。さらに微分を繰り返せば、 $f(x) = x^n$  のフーリエ変換が次のように与えられることがわかる。

$$f(x) = x^n \quad \leftrightarrow \quad F(k) = \left(i \frac{d}{dk}\right)^n \delta(k) \quad (7)$$

さらに、この線形結合を取ることで、一般の多項式のフーリエ変換を次のように与えることができる。

$$f(x) = \sum_k c_k x^k \quad \leftrightarrow \quad F(k) = f\left(i \frac{d}{dk}\right) \delta(k). \quad (8)$$

ここで、 $\delta'(x)$  について説明しておこう。 $\delta(x)$  は関数ではないから、その微分も通常関数の微分のように定義することはできない。 $\delta'(x)$  はたちの良い任意の関数  $f(x)$  に対して次の関係式を満足する超関数として定義される。

$$\int \delta'(x) f(x) dx = - \int \delta(x) f'(x) dx \quad (9)$$

これは  $\delta(x)$  を普通関数で置き換えれば部分積分の式に他ならない。デルタ関数の定義より、右辺はもちろん  $f'(0)$  である。

**ステップ関数** ステップ関数  $\theta(x)$  を次のように定義する。

$$\theta(x) = 0 \quad (x < 0), \quad \theta(x) = 1 \quad (x > 0). \quad (10)$$

この関数についてもフーリエ積分はやはり収束しないが、超関数を用いることでフーリエ変換を与えることができる。

少し詳しく説明しよう。 $f(x) = \theta(x)$  として  $F(k)$  をそのフーリエ変換とする。これは次の式によって定義される。

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx} dx \quad (11)$$

この式の右辺の積分はもちろん通常の意味では収束しない。そこで、右辺の  $F(k)$  および左辺の被積分関数  $e^{-ikx}$  をどちらも超関数として解釈してみよう。すると、上の式は任意のたちの良い関数  $g(k)$  に対して次の式が成り立つことを意味する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k)F(k)dk = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ikx}dk \right) dx \quad (12)$$

$g(k)$  がたちのよい関数であり、 $k \rightarrow \pm\infty$  において十分速く 0 になると仮定すれば、右辺の  $k$  積分の積分路を複素平面上で実軸よりも少しだけ下にずらすことができる。この新しい積分路を  $C$  で表そう。 $C$  上の点では  $\text{Im } k < 0$  であるから各点において  $x$  積分を先に行うことができる。その結果、次の式を得る。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k)F(k)dk = \int_C g(k) \frac{1}{2\pi ik} dk \quad (13)$$

もし右辺の積分路が左辺と同じ実軸上であれば両辺の比較から  $F(k) = 1/(2\pi ik)$  が得られる。しかし右辺の  $C$  は実軸からずれているので、その影響を取り入れる必要がある。

もし右辺の被積分関数が正則関数であれば  $C$  は連続的に実軸に持っていくことができるので、何の問題もない。実際、 $g(k)$  はたちのよい関数であると仮定しているので、 $k \neq 0$  に関しては  $C$  を実軸に移動することができる。しかし、被積分関数は  $k = 0$  に極を持っているため、この点については、そのような操作ができない。

そこで、 $C$  を次の二つの部分からなる経路に変形する。(図 1)

$C_1$  : 実軸上で、原点の近傍  $|k| < \varepsilon$  を除く部分

$C_2$  :  $k = \pm\varepsilon$  を下半平面を回ってつなぐ半径  $\varepsilon$  の半円 (14)

$C_1$  上の積分については、

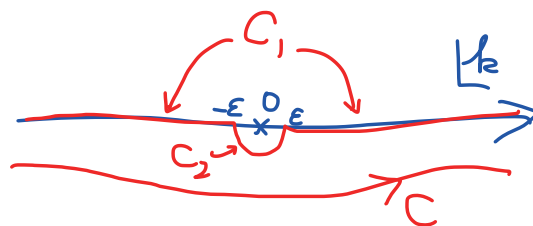


図 1: 積分経路  $C, C_1, C_2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{1}{2\pi ik} g(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left( P \frac{1}{2\pi ik} \right) g(k) dk \quad (15)$$

によって超関数  $P(1/(2\pi ik))$  を定義する。これは「コーシーの主値」(Cauchy principal value) である。



一方、 $C_2$  上の積分は、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限においては原点周りを一周する積分（留数定理で計算できる。）の半分であるから次のようになる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{1}{2\pi i k} g(k) dk = \frac{1}{2} \oint \frac{1}{2\pi i k} g(k) dk = \frac{1}{2} g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(k) g(k) dk \quad (16)$$

これらを組み合わせれば、次の式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) F(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left( P \frac{1}{2\pi i k} + \frac{1}{2} \delta(k) \right) g(k) dk \quad (17)$$

従って、両辺を比較することで  $F(k)$  が次のように定まる。

$$f(x) = \theta(x) \quad \leftrightarrow \quad F(k) = P \frac{1}{2\pi i k} + \frac{1}{2} \delta(k) \quad (18)$$

あるいは  $F(k)$  は次のように表すこともできる。

$$F(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i (k - i\epsilon)}. \quad (19)$$

なぜこのように書けるかは、上の積分路をずらす議論から明らかであろう。

## 1.6 微分方程式への応用

フーリエ変換の基本的な用法は、関数  $f(x)$  に対する難しい操作を  $F(k)$  に対する簡単な操作に書き換えることである。特に、 $f(x)$  に対する微分、積分は  $F(k)$  に対する代数的な操作に帰着される。このことを用いて微分方程式を解くことができる。

まず、ある関数  $f(x)$  と、その導関数  $g(x) = f'(x)$  があつたときに、それらのフーリエ変換  $F(k)$  と  $G(k)$  がどのように関係しているかを見ておこう。 $f(x)$  のフーリエ変換の式

$$f(x) = \int dk F(k) e^{ikx} \quad (20)$$

の両辺を  $x$  で微分すれば

$$g(x) = f'(x) = \int dk ik F(k) e^{ikx} \quad (21)$$

従って、

$$G(k) = ikF(k) \quad (22)$$

が得られる。つまり、関数の微分を行うことは、フーリエ変換を  $ik$  という因子を掛けることに対応する。

$$g(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \leftrightarrow \quad G(k) = ikF(k). \quad (23)$$

次に積分を考えてみよう。先ほどとは逆に、 $g(x) = f'(x)$  が与えられたときに、 $f(x)$  を決めるという問題を考えてみよう。積分定数の自由度があるためにこの問題の解は唯一ではなく、 $f(x)$  が一つ与えられると、それに定数を加えたものもやはり解である。このことがフーリエ変換をしたときにどのように現れるか見てみよう。解くべき式は

$$ikF(k) = G(k) \quad (24)$$

であり、 $G(k)$  が与えられたときに  $F(k)$  を決めることを考える。 $k \neq 0$  においては  $F(k) = G(k)/(ik)$  とすればよいが、 $k = 0$  においてどのように取り扱うかを決める必要がある。一般解は次のように与えられる。

$$F(k) = P \frac{1}{ik} G(k) + c \delta(k) \quad (25)$$

まず、右辺第1項は、 $k = 0$  においてはコーシーの主値をとった場合の解を与えている。しかし、そのようにとる必然性はなく、第2項のように  $k = 0$  においてのみ0でないような項を加えてもよい。両辺をフーリエ変換してみると、

$$f(x) = f_P(x) + c \quad (26)$$

(右辺第1項のフーリエ変換を  $f_P(x)$  と表した。) となり、たしかに積分定数の任意性が表れていることがわかる。

ここで考えた積分の操作は、微分方程式  $f'(x) = g(x)$  を解くことと同義である。同様の操作により、より一般の線形微分方程式を解くことができる。

次の非斉次  $n$  階線形常微分方程式を考えよう。

$$\left[ a_n \left( \frac{d}{dx} \right)^n + a_{n-1} \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left( \frac{d}{dx} \right) + a_0 \right] f(x) = g(x). \quad (27)$$

多項式  $A(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$  を定義しておくと、上記の微分方程式を形式的に

$$A \left( \frac{d}{dx} \right) f(x) = g(x) \quad (28)$$

と簡潔に表すことができて便利である。以前に述べたように、 $f(x)$  に対する微分の操作は、そのフーリエ変換  $F(k)$  に対して  $ik$  という因子を掛ける操作に対応するから、フーリエ変換によってこの微分方程式は次のように書き換えられる。

$$A(ik)F(k) = G(k). \quad (29)$$

実数  $k$  に対して  $A(ik)$  が 0 になることがなければ  $F(k) = G(k)/A(ik)$  が解である。もし  $k = k_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) において  $A(ik) = 0$  となる場合には解は次のように与えられる。

$$F(k) = P \frac{G(k)}{A(k)} + \sum_{i=1}^m c_i \delta(k - k_i). \quad (30)$$

ただし  $k_i$  の中に重解はないものと仮定した。これを (29) に代入すれば第二項のデルタ関数の項は  $A(ik)$  を掛けたときに 0 になることが分かるであろう。

この解からフーリエ変換によって  $f(x)$  を求めると、次のようになる。

$$f(x) = f_P(x) + \sum_{i=1}^m c_i e^{ik_i x} \quad (31)$$

例

次の微分方程式を解くことを考えよう。

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \nu^2 x(t) = k. \quad (32)$$

ただし  $\nu \neq 0$  とする。これは一定の外力  $k$  およびばねの張力  $-\nu^2 x(t)$  が働く質点の運動方程式である。フーリエ変換しよう。

$$x(t) \rightarrow X(\omega), \quad k \rightarrow k\delta(\omega). \quad (33)$$

その結果 (32) は次のように書き換えられる。

$$(-\omega^2 + \nu^2)X(\omega) = k\delta(\omega) \quad (34)$$

一般公式 (30) に従えば、この方程式の解はこの方程式の解は

$$X(\omega) = P \frac{k\delta(\omega)}{-\omega^2 + \nu^2} + c_1\delta(\omega - \nu) + c_2\delta(\omega + \nu). \quad (35)$$

右辺第1項の分母は  $\omega = \pm\nu$  において 0 になるが、そのとき分子は 0 なので、コーシーの主値をとる必要はない。さらに、 $\delta(\omega)f(\omega) = \delta(\omega)f(0)$  なので次のように書くことができる。

$$X(\omega) = \frac{k\delta(\omega)}{\nu^2} + c_1\delta(\omega - \nu) + c_2\delta(\omega + \nu). \quad (36)$$

フーリエ変換すれば、 $f(x)$  が次のように得られる。

$$x(t) = \frac{k}{\nu^2} + c_1 e^{i\nu t} + c_2 e^{-i\nu t} \quad (37)$$

この解が実数であるためには、積分定数  $c_1$  と  $c_2$  が互いに複素共役でなければならない。 $c_1 = c_2^* = (a/2)e^{i\theta}$  とおけば、

$$x(t) = \frac{k}{\nu^2} + a \cos(\nu t + \theta) \quad (38)$$

となり、平衡点  $x = k/\nu^2$  の周りで振動する解が得られる。

連立常微分方程式の例として電気回路について考えてみよう。

起電力、抵抗、コンデンサー、コイルからなる回路を考え、それぞれの起電力の電圧が時間の関数として与えられたときにそれぞれの部分に流れる電流を決める問題を考えてみよう。

電気回路は一般に頂点を辺で結んだグラフとして表される。頂点を  $i = 1, 2, \dots, v$  でラベルし、頂点  $i$  と  $j$  をつなぐ辺を  $ij$  とあらわすことにする。辺の数を  $e$  とする。

それぞれの頂点の電位を  $E_i$ 、それぞれの辺を流れる電流を  $I_{ij}$  とする。それぞれの辺  $ij$  にある部品に関して、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{起電力} : E_i(t) - E_j(t) &= V(t), \\ \text{抵抗} : E_i(t) - E_j(t) - R_{ij}I_{ij}(t) &= 0, \\ \text{コンデンサー} : C_{ij}(\dot{E}_i(t) - \dot{E}_j(t)) - I_{ij}(t) &= 0, \\ \text{コイル} : E_i(t) - E_j(t) - L_{ij}\dot{I}_{ij}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

また、頂点ごとに次の式（キルヒホッフの第一法則）が成り立つ。

$$\sum_j I_{ij}(t) = 0. \quad (40)$$

ただし、和は  $i$  に隣り合う頂点について取る。

これらは全体で連立微分方程式を与えるが、フーリエ変換を取ると、次の代数的な連立方程式になる。

$$\begin{aligned}
 \text{起電力} : E_i(\omega) - E_j(\omega) &= V(\omega), \\
 \text{抵抗} : E_i(\omega) - E_j(\omega) - R_{ij}I_{ij}(\omega) &= 0, \\
 \text{コンデンサー} : i\omega C_{ij}(E_i(\omega) - E_j(\omega)) - I_{ij}(\omega) &= 0, \\
 \text{コイル} : E_i(\omega) - E_j(\omega) - i\omega L_{ij}I_{ij}(\omega) &= 0.
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\sum_j I_{ij}(\omega) = 0. \tag{42}$$

独立な変数と方程式の数を数えてみよう。変数は頂点ごとに  $E_i$ 、辺ごとに  $I_{ij}$  があるから、 $v + e$  個である。ただし、電位  $E_i$  のうちの一つは自由に選ぶことができる。(例えば、どれか一つの頂点を接地することでその頂点の電位は 0 になる。) よってこの分を一つ引くと変数の数は  $N := v + e - 1$  個である。方程式の数は、辺ごとに (41) のうちの一つがあり、頂点ごとに (42) の式があるから、 $v + e$  個の式がある。しかし、 $v$  個の式 (42) を全て加えると恒等的に 0 になる。従ってその分を引くと、変数と同じ  $N := v + e - 1$  個の式があることになる。これらの式はまとめて次のような行列として表すことができる。

$$M(\omega)A(\omega) = B(\omega) \tag{43}$$

ただし  $A(\omega)$  は  $E_i$  と  $I_{ij}$  のうち独立なものを全て縦に並べた  $N$  成分ベクトル、 $M(\omega)$  は  $R_{ij}$ 、 $\omega C_{ij}$ 、 $\omega L_{ij}$  などを成分に含む  $N \times N$  の正方行列、 $B(\omega)$  は (41) のうち起電力の式から現れる  $V_{ij}$  を並べたものであり、起電力とは関係のない式に対応する成分は 0 である。

$M(\omega)$  は正方行列であるから、もしその行列式が 0 でなければ、 $A(\omega)$  は一意的に  $A(\omega) = M(\omega)^{-1}B(\omega)$  によって与えられる。

$\det M(\omega) = 0$  の場合には、 $B(\omega) = 0$  (起電力が 0) であっても  $A(\omega) \neq 0$  ということが起こりえる。これは共振が起こっていることを意味する。

## 1.7 フーリエ変換の残り

パーシバルの等式 物理において、次の積分がしばしば現れる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \tag{44}$$

(例えば、電気回路における消費電力など。)  $f(x)$  がフーリエ変換によって

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk \tag{45}$$

と与えられていたとしよう。このとき  $F(k)$  を用いて  $I$  をあらわすことを考えよう。

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(k')e^{ik'x}dk' \right)^* dx \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' F(k)F(k')^* \delta(k - k') \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk
 \end{aligned} \tag{46}$$

このように、フーリエ変換を行った後でも同じ形の積分で表される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \tag{47}$$

これがパーシバルの等式である。  $2\pi$  が片方にだけ現れているが、これはフーリエ変換の式が  $f(x)$  と  $F(k)$  について対称でないことによる。

もし

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk, \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \tag{48}$$

のように対称な定義を用いれば、パーシバルの等式もより対称な形

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \tag{49}$$

をとる。

この関係式は、フーリエ変換が関数のノルムを変えないことを意味している。従ってフーリエ変換を一種のユニタリー変換としてとらえることができる。

**たたみこみ** ある回路に信号を入力すると、何らかの線形変換が施されて出力から出てくるような状況を考えよう。

$t = 0$  にパルス状の信号  $\delta(t)$  を入力したときに出力が  $g(t)$  であったとする。回路が時間的に変化しなければ、別の時刻  $t = t_0$  におけるパルス  $\delta(t - t_0)$  を入力すれば、 $t_0$  だけずれた出力信号  $g(t - t_0)$  が現れるであろう。

もし一般の信号  $f(t)$  を入力したとすれば、この信号はパルスの重ねあわせとして

$$f(t) = \int f(t_0)\delta(t - t_0)dt_0 \tag{50}$$

とあらわされる。ということは、回路の線形性より出力の信号は

$$h(t) = \int f(t_0)g(t - t_0)dt_0 \tag{51}$$

となるはずである。この右辺の積分によって定義される関数のことを  $f$  と  $g$  の畳み込みと呼び

$$h = f * g \quad (52)$$

とあらわす。 $f * g = g * f$  が成り立つことは簡単に確認できる。

これをフーリエ変換してみると、

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int dt e^{-i\omega t} h(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dt e^{-i\omega t} \int dt_0 f(t_0) g(t - t_0) \end{aligned} \quad (53)$$

$t = t' + t_0$  によって変数変換すると、

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int dt_0 dt' e^{-i\omega t_0} e^{-i\omega t'} \int dt_0 f(t_0) g(t') \\ &= 2\pi F(\omega) G(\omega) \end{aligned} \quad (54)$$

つまり、畳み込みはフーリエ変換によって単純な積に変換される。

**高次元のフーリエ変換** 多変数の関数  $f(x_1, \dots, x_n)$  があつたとき、各変数に対して独立にフーリエ変換を行うことができる。全ての変数に対してフーリエ変換を行ったとすると、

$$f(\mathbf{x}) = \int d^n \mathbf{k} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}). \quad (55)$$

ただし、ベクトル表記  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n$  などを用いた。

# 物理数学第二 第4回

2015年10月27日

## 目次

2	ガンマ関数	1
2.1	階乗の一般化 . . . . .	1
2.2	ガンマ関数の基本的性質 . . . . .	4

## 2 ガンマ関数

### 2.1 階乗の一般化

自然数  $n$  に対して階乗は次のように定義される。

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \quad (1)$$

これをより広範囲の  $n$  に一般化したい。 $n = 0$  に対しては

$$0! = 1 \quad (2)$$

と定義される。これは  $n! = n \cdot (n-1)!$  という階乗の性質を保つように決めたものである。そこで、一般の複素数  $x$  に対しても次の性質を満たす関数  $\Pi(x)$  を構成することを考えよう。

$$\Pi(0) = 1, \quad (3)$$

$$\Pi(x) = x\Pi(x-1). \quad (4)$$

この二つを組み合わせれば  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対しては階乗に一致することが示される。



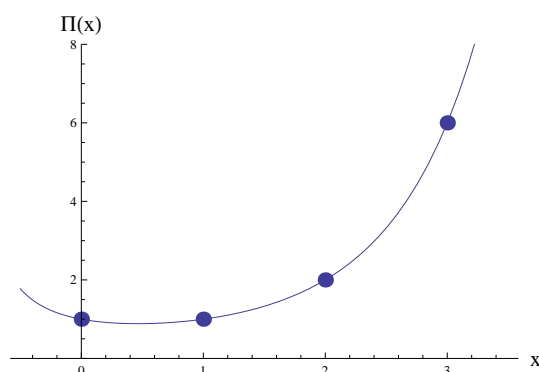


図 1: 階乗を一般化した、このような関数を定義したい。

案1  $x$  が正の実数である場合には、 $x, x-1, x-2, \dots$  のうち正であるものを全てかけたものを  $\Pi(x)$  としてみよう。すなわち  $n \geq x > n-1$  に対して

$$\Pi(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1) \quad (5)$$

この定義は  $-1 < x \leq 0$  のときに

$$\Pi(x) = 1 \quad (-1 < x \leq 0) \quad (6)$$

とおき、それ以外の領域に対しては (4) を用いて決めるのと同じである。

このように定義した  $\Pi(x)$  は (4) と (4) をどちらも満足するが、 $x \in \mathbb{Z}$  において不連続になるという点であまりよい関数ではない。そこで他の定義を探そう。

案2 案1の関数が不連続になったのは、(5) の積を途中で打ち切っているからである。そこで、次の無限積によって関数を定義することを考えてみよう。

$$\Pi(x) = x(x-1)(x-2) \cdots \quad (7)$$

これは形式的に (4) の性質を満足する。しかしまだ不満がある。

- 発散する。
- 積の途中から負数の積になるので、符号さえも定まらない。

これらの不満点のうち、二つ目については、減少していく数列の積ではなく増加していく数列の積として次のように定義することで改善することができる。

案2'

$$\Pi(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3) \cdots} \quad (8)$$

こう定義しておけば、たとえ  $x$  が負数であっても積の途中から全て正数の積になるので、符号は定まる。これも形式的に (4) の性質を満足する。しかし分母はやはり発散するため、この点を改善する必要がある。

案3 (8) の分母の発散を打ち消すように、分子にも発散する定数因子を導入してみよう。まずは次のものを試してみる。

$$\Pi(x) = \frac{1}{x+1} \frac{2}{x+2} \frac{3}{x+3} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x+n} \quad (9)$$

今度は積を取る因子は限りなく 1 に近づいていくから、発散は (8) よりかなり改善されている。しかし残念ながらまだ収束しない。このことを見るには、(9) の両辺の対数を取ってみるのがよい。

$$\begin{aligned} \log \Pi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{x+n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x^3}{3n^3} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$n$  に対する無限和を取ると、二行目の括弧の中で、第 2 項からあとは収束するが、第 1 項は発散する。

案4 (10) の中で、最初の項から現れる発散を取り除こう、

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \right) = \gamma \quad (11)$$

( $\gamma$  はオイラー・マスケロニ定数) が成り立つから、(10) に現れる発散は

$$- \sum_{n=1}^N \frac{x}{n} \sim -x \log N \quad (12)$$

程度である。そこで、これを引いた次の定義を採用してみよう。

$$\log \Pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \log \frac{n}{x+n} + x \log N \right) \quad (13)$$

これは収束する。 $\log$  を取り外すと、

$$\Pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N}{(x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+N)} N^x \quad (14)$$

この右辺の極限は収束する。また、(3) および (4) 性質を満足することが簡単に確かめられる。これが、欲しかった関数である。

一意性について (3) と (4) の条件だけでは、関数を一意的に決めることができないことは「案 1」で与えた関数の存在からも明らかである。また、ある関数  $f(x)$  が (3) と (4) を満足すれば、これに周期 1 の任意の周期関数を掛けたものもやはり同じ条件を満足する。つまり、整数値  $x = n$  での値が指定されても、その間では上下に揺らぐ自由度があり、条件 (3) と (4) を満たす関数は無限個存在するのである。 $\log n!$  のグラフ (図 2) を見てみると、下に凸であり、 $n$  が大きいところではほぼ直線になっているように見える。そこで、 $\log \Pi(x)$  が  $x > 0$  において下に凸である、という条件を課せば、上で述べたような揺らぎを禁止することができる。その結果、関数が一意的に定まり、(14) はその一意的な関数を与えることが知られている。(ボーア・モレルップの定理)

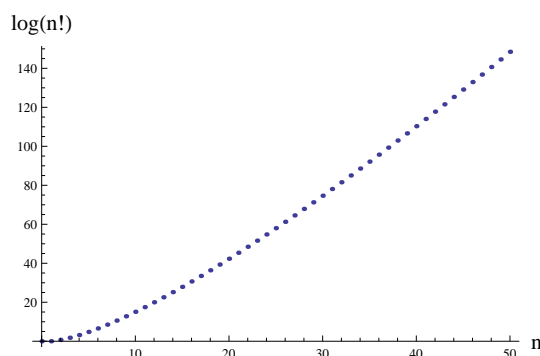


図 2:  $n = 0 \sim 50$  に対する  $\log n!$  のグラフ。

以下では  $\Pi(x)$  のことを単に  $x!$  とあらわすことにしよう。 $\Pi(x)$  よりも次のガンマ関数のほうが良く用いられる。

$$\Gamma(x) = \Pi(x-1). \quad (15)$$

これは次のように無限積を用いて定義される。(オイラーの無限積公式)

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^x}{x(x+1) \cdots (x+N)} \quad (16)$$

(11) を用いれば、次の公式を得ることができる。

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}. \quad (17)$$

これはワイエルシュトラスの無限積公式と呼ばれる。

## 2.2 ガンマ関数の基本的性質

- $x = 0, 1, 2, \dots$  において

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

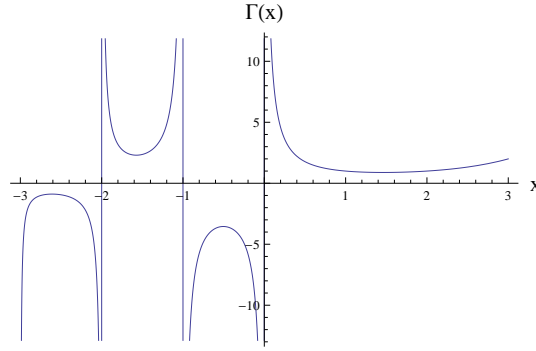


図 3:  $\Gamma(x)$  のグラフ

- (4) より  $\Gamma(x)$  は次の関係式を満足する。

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (19)$$

- $x = 0, -1, -2, \dots$  に極がある。これは無限積 (16) の分母に 0 が現れることからわかる。それ以外の点では正則。
- $\Gamma(x)$  は 0 点をもたない。従って  $1/\Gamma(x)$  はいたるところ正則である。
- 次の公式が成り立つ。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (20)$$

公式 (20) に関して以下に証明の概略を与えるが、その前に (19) を用いれば左辺が右辺と同じく  $z$  が 1 増加するごとに符号が反転し、 $z$  が 2 増加すると元に戻る周期 2 の周期関数であることが確かめられることをコメントしておこう。

公式 (20) の証明の概略を以下に与えておく。オイラーの無限積公式 (16) は次のように書くことができる。

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{N})} \quad (21)$$

これと  $x$  を  $-x$  で置き換えたものを掛けると、

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{1}{x^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2^2}) \cdots (1-\frac{x^2}{N^2})} \quad (22)$$

が得られる。右辺分母に現れる無限積に対して公式、

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (23)$$

(これは、ワイエルシュトラスの因数定理を用いて示すことができる。) を用いれば

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x} \quad (24)$$

が示される。これを (19) を用いて書き換えると、公式 (20) が得られる。

# 物理数学第二 第5回

2015年11月10日

## 目次

2	ガンマ関数	1
2.3	積分表示	1
2.4	スターリングの公式	2
2.5	ポリガンマ関数	3
2.6	ベータ関数	4
2.7	$n$ 次元球面の体積	6

## 2 ガンマ関数

### 2.3 積分表示

前回  $\Gamma(x)$  を次の無限積（オイラーの無限積公式）によって定義した。

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^x}{x(x+1) \cdots (x+N)}. \quad (1)$$

この  $\Gamma(x)$  は次の積分表示によって与えることもできる。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\operatorname{Re} x > 0) \quad (2)$$

$x$  が正の整数  $n$  であれば、部分積分を繰り返すことで積分を行うことができ、 $(n-1)! = \Gamma(n)$  になることを確認することができる。一般の  $x$  に対しては以下のように証明できる。

まず、次の積分を考えよう。

$$F(x, N) = \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{x-1} dt \quad (3)$$

右辺の積分は  $(1 - \frac{t}{N})$  のべきを減らすように部分積分を繰り返すことで積分を行うことができ、次の結果を得る。

$$F(x, N) = \frac{N!N^x}{x(x+1)\cdots(x+N)}. \quad (4)$$

これはオイラーの無限積公式 (1) に現れる因子であり、 $\lim_{N \rightarrow \infty} F(x, N) = \Gamma(x)$  であることが分かる。一方  $N \rightarrow \infty$  の極限を取れば、 $(1 - \frac{t}{N})^N \rightarrow e^{-t}$  であるから、(2) の右辺の積分を得る。こうして (2) の関係式が示された。

(2) の積分は  $\operatorname{Re} x > 0$  のときにしか収束しないので、それ以外の領域での  $\Gamma(x)$  を得るにはそこから解析接続するか、関係式  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  を用いればよい。

## 2.4 スターリングの公式

統計力学などでは、 $n!$  の  $n$  が大きいところ（例えばアボガドロ数程度）での振る舞いを知ることが必要になる。積分表示 (2) を用いることでそれを簡単に得ることができる。(2) を  $x! = \Pi(x)$  に対して適用すると、次の積分が得られる。

$$x! = \int e^{-t} t^x dt. \quad (5)$$

この被積分関数は  $t = x$  において最大値をとる関数である。(図 1) 非常におおま

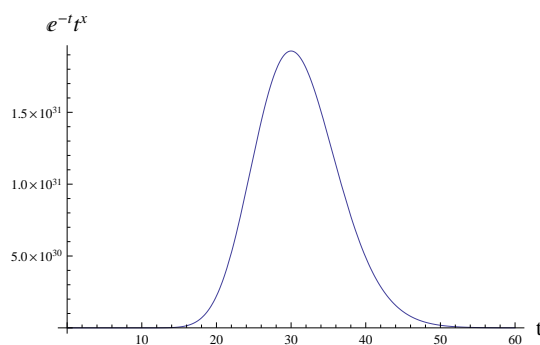


図 1:  $e^{-t} t^x$  のグラフ ( $x = 30$  の場合)

かには、積分の値は  $t = x$  における山の高さ、その山の幅の積によって与えることができる。山の高さは  $e^{-x} x^x = (x/e)^x$  であるが、 $x$  が大きいときにはこれは非常に大きい数である。すると、山の幅がどれくらいであるかということはあまり重要ではなくなり、近似的には

$$x! \sim x^x e^{-x} \quad (6)$$

と置くことができる。(統計力学への応用では普通これで十分である。)

よりよい近似を得るために、 $t = x$  の周りでの被積分関数の振る舞いを見てみよう。 $t = x + u$  とおいて  $u$  で展開してみると、

$$\log(e^t t^x) = -x + x \log x - \frac{u^2}{2x} + \frac{u^3}{2x^2} + \cdots \quad (7)$$

$u$  の二次までを取り、それよりも高次の項を無視すると、

$$e^t t^x \sim x^x e^{-x} e^{-\frac{u^2}{2x}} \quad (8)$$

となる。被積分関数をこの近似式で置き換えて積分すると、

$$x! \sim x^x e^{-x} \int e^{-\frac{u^2}{2x}} du = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad (9)$$

が得られる。(7) の高次の項まで取り入れた計算を行えば、

$$x! = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \cdots \right) \quad (10)$$

が得られる。(注意：これは漸近級数であるので、無限に和を取ると発散する。)

ここで行ったように、積分を被積分関数の最大値の周りでの寄与で近似する方法は「鞍点法」と呼ばれる。この方法は特殊関数の漸近形を得るために今後何度も用いられる。

## 2.5 ポリガンマ関数

ディガンマ関数  $\psi(x)$  は次のように定義される。

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) \quad (11)$$

ディガンマ関数をさらに微分することでポリガンマ関数  $\psi^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) が定義される。

$$\psi^{(k)}(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^k \psi(x) = \left( \frac{d}{dx} \right)^{k+1} \log \Gamma(x). \quad (12)$$

これらを級数展開すれば、これらの関数の有用性の一端をみることができる。

まず、オイラーの無限積公式より

$$\log \Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N! + x \log N - \sum_{n=0}^N \log(x+n) \right) \quad (13)$$

これを微分すれば、ディガンマ関数を与える次の式が得られる。

$$\psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \log N - \sum_{n=0}^N \frac{1}{x+n} \right) \quad (14)$$

さらに微分をすると、ポリガンマ関数の展開式が得られる。

$$\psi^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} k! \sum_{n=0}^N \frac{1}{(x+n)^{k+1}}. \quad (15)$$

これらの関数は、 $n$  の有利関数  $R(n) = P(n)/Q(n)$  の無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(n) \quad (16)$$

を計算するのに用いることができる。この無限和が収束するためには、 $P(n)$  の次数は  $Q(n)$  の次数よりも 2 以上小さくしなければならないが、そのとき  $R(n)$  は次のように部分分数展開することができる。

$$R(n) = \sum_m \frac{a_{1,m}}{z + z_{1,n}} + \sum_m \frac{a_{2,m}}{(z + z_{2,n})^2} \cdots + \sum_m \frac{a_{k,m}}{(z + z_{k,n})^k}, \quad \sum_m a_{1,m} = 0. \quad (17)$$

このとき、上記の無限和はポリガンマ関数を用いて次のように与えられる。

$$R(n) = - \sum_m a_{1,m} \psi(z_{1,n}) + \sum_m a_{2,m} \psi^{(1)}(z_{2,n}) \cdots + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_m a_{k,m} \psi^{(k-1)}(z_{k,n}). \quad (18)$$

## 2.6 ベータ関数

階乗は次の組み合わせでしばしば現れる。

$${}_m C_n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (19)$$

これに類似した関数として、ベータ関数がある。

$$B(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (20)$$

この関数はしばしば積分を行ったときに現れる。例えば次の式が成り立つ。

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(m+1, n+1) = \frac{1}{2} \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad (21)$$

これは以下のように示すことができる。

$m!n!$  から出発し、階乗の積分表示を用いて書き換えてみよう。

$$m!n! = \int_0^\infty e^{-u} u^m du \times \int_0^\infty e^{-v} v^n dv \quad (22)$$



$u = x^2$ 、 $v = y^2$  とおくと、

$$= 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1} dx \times \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2n+1} dy \quad (23)$$

$x = r \cos \theta$ 、 $r \sin \theta$  とおいて、 $x$ - $y$  平面上の積分を極座標を用いて書き換えれば

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{2m+2n+3} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta \quad (24)$$

$r^2 = t$  とおいて  $t$  積分を階乗の積分表示を用いて書き換えれば

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty dt e^{-t} r^{m+n+1} dt \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta \\ &= 2(m+n+1)! \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta \end{aligned} \quad (25)$$

こうして、(21) が得られた。

積分公式 (21) をいくつか別の形に書き換えておこう。変数  $t$  を  $t = \cos^2 \theta$ 、 $1 - t = \sin^2 \theta$  によって導入し、 $\theta$  積分を  $t$  積分で書き換えれば、次の式が得られる。

$$\int_0^1 t^m (1-t)^n dt = B(m+1, n+1) \quad (26)$$

さらに適当に変数変換すれば

$$\int_\alpha^\beta (\beta - x)^m (x - \alpha)^n dx = (\beta - \alpha)^{m+n+1} B(m+1, n+1) \quad (27)$$

が得られる。(26) において  $t = u/(1+u)$  と置くと、

$$\int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}} du = B(m+1, n+1) \quad (28)$$

が得られる。

この積分公式は、以前に与えたガンマ関数の公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (29)$$

の別証明を与えるのに用いることができる。(28) において  $m = a$ 、 $n = -a$ 、 $-1 < a < 1$  とすると、次の式を得る。

$$I = \int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^2} du = B(1+a, 1-a) = \Gamma(1+a)\Gamma(1-a). \quad (30)$$

この積分は、留数定理を用いて計算することができる。 $0 < |a| < 1$  の場合を考える。このとき、被積分関数は  $u = 0$  に分岐点があり、 $u = -1$  に二位の極がある。分岐

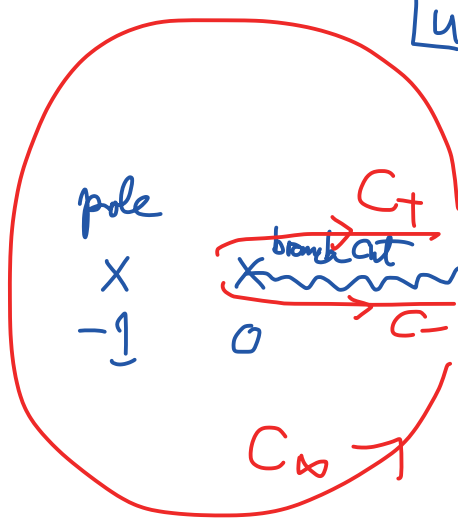


図 2:  $u$  平面の様子

截線を実軸の正の側に配置しよう。 $I$  の積分が、分岐截線の上側を通る経路 ( $C_+$ ) に沿った積分によって 与えられるとすれば、分岐截線の下側の経路 ( $C_-$ ) に沿った積分は  $e^{2\pi ia} I$  と与えられる。従って、 $C_-$  と  $C_+$  を組み合わせた経路の上の積分は

$$\int_{C_+ - C_-} \frac{u^a}{(1+u)^2} du = (1 - e^{2\pi ia}) I. \quad (31)$$

となる。さらに、無限円を回る円周  $C_\infty$  上の積分は 0 になる。従って、閉じた経路  $C_+ - C_- + C_\infty$  での積分として (31) を与えることができる。この経路の中には  $u = -1$  に極があるだけであるから、留数定理を用いることで

$$(1 - e^{2\pi ia}) I = 2\pi i \operatorname{Res}_{u=-1} \frac{u^a}{(1+u)^2} = 2\pi i a e^{\pi ia} \quad (32)$$

が得られる。これより直ちに

$$I = \frac{\pi a}{\sin \pi a} \quad (33)$$

が得られる。これより (29) が得られる。

## 2.7 $n$ 次元球面の体積

半径 1 の  $n$  次元球面の体積はガンマ関数を用いて表すことができる。

$n$  次元球面というのは  $\mathbb{R}^{n+1}$  の原点から等距離の点からなる部分集合のことである。半径が  $r$  の  $n$  次元球面の体積を  $\Omega_n(r)$  と置こう。 $n = 1$  および  $n = 2$  の場合はもちろん次のように与えられる。

$$\Omega_1(r) = 2\pi r, \quad \Omega_2(r) = 4\pi r^2. \quad (34)$$

一般に、半径  $r$  の  $n$  次元球面の体積は、半径 1 の  $n$  次元球面の体積  $\Omega_n \equiv \Omega_n(1)$  を用いて次のように与えられる。

$$\Omega_n(r) = \Omega_n r^n. \quad (35)$$

$\Omega_n$  は以下のような方法で計算することができる。

まず、 $\mathbb{R}^{n+1}$  上の直交座標を  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  として次の  $n+1$  次元積分を考えよう。

$$I = \int d^{n+1}x e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2}. \quad (36)$$

この積分を二つの方法で計算する。

一つ目の方法は、直交座標を用いて  $x_1$  から  $x_{n+1}$  までの積分を実行するものである。(36) は次のように  $n+1$  個の同じ積分に分解することができて、簡単に計算ができる。

$$I = \int e^{-x_1^2} dx_1 \times \int e^{-x_2^2} dx_2 \times \dots \times \int e^{-x_{n+1}^2} dx_{n+1} = \left( \int e^{-x^2} dx \right)^{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}. \quad (37)$$

もう一つの方法は、極座標を用いるものである。被積分関数は  $r = (x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)^{1/2}$  のみの関数であるから、角度方向の積分は  $n$  次元球面の体積を与える。 $r$  方向の積分を実行するとガンマ関数が現れる。

$$I = \int_0^\infty \Omega_n(r) e^{-r^2} dr = \frac{\Omega_n}{2} \int t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (38)$$

途中で  $r^2 = t$  による変数変換を行った。

(37) と (38) を比較することで次の結果を得る。

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (39)$$

# 物理数学第二 第6回

2015年11月17日

## 目次

<b>3</b>	<b>ルジャンドル関数</b>	<b>3</b>
3.1	母関数による導入 . . . . .	3
3.2	漸化式 . . . . .	6
3.3	ロドリゲスの公式 . . . . .	7

## 今日のまとめ

- ルジャンドル多項式は次の母関数によって定義される。

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - tx + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x). \quad (1)$$

- $P_n(x)$  は  $x$  の  $n$  次多項式である。
- 偶奇性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (2)$$

- $\pm 1, 0$  での値

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}. \quad (3)$$

- $P_n(\cos \theta)$  は次のように展開できる。

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^n a_n \cos n\theta, \quad (a_n > 0). \quad (4)$$

- ボネの漸化式

$$nP_{n-1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = 0. \quad (5)$$

- ルジャンドルの微分方程式

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n = 0. \quad (6)$$

- ロドリゲスの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n. \quad (7)$$

- $n = 0, 1, 2, 3$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x. \quad (8)$$

## 3 ルジャンドル関数

### 3.1 母関数による導入

ルジャンドル関数は、3次元空間の波動を極座標で扱う際にしばしば現れる。極座標を次のように定義する。

$$(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \quad (9)$$

ラプラス方程式

$$\Delta \Phi(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

の解（方程式を満足しない特異点があってもよい）で、 $z$  軸まわりの回転対称性を持つものに注目しよう。角度座標  $\theta$  のかわりに  $\zeta \equiv \cos \theta$  を用いることにしよう。すると、 $\Phi$  は  $r$  と  $\zeta$  の関数である。もし原点付近で  $\phi(r, \zeta)$  が特異性を持たなければ、次のように  $r = 0$  のまわりで展開することができる。

$$\Phi(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Phi_n(\zeta). \quad (11)$$

次元解析より、極座標で表したラプラス演算子は  $r$  の次数を常に 2 だけ下げるから、 $\Delta$  は  $r$  のべきが異なる項を混ぜることではない。従って (11) の右辺は  $n$  ごとに全てラプラス方程式の解になっているはずである。このため、ラプラス方程式の解  $\phi(r, \zeta)$  が一つ得られれば、それを展開することで無限個の解  $r^n \Phi_n(\zeta)$  が得られ、さらにはそれらの線形結合を取ることで一般の解

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \Phi_n(\zeta) \quad (12)$$

を得ることができるのである。

(注意： $\Phi(r, \zeta)$  の選び方によっては (11) の右辺に全ての  $r$  のべきが現れないことがある。そのような場合は一部の解を得ることができなくなるので、 $\Phi(r, \zeta)$  としては  $r$  の全てのべきを含むものが望ましい。)

$\Phi(r, \zeta)$  は展開によって無限個の関数  $\Phi_n(\zeta)$  を生み出す。このような関数は母関数と呼ばれる。これから何度も見るように、母関数を用いる方法は特殊関数を調べるのに大変便利である。

ここでは母関数として次のものを採用しよう。

$$G(r, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\zeta + 1}}. \quad (13)$$

これは  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  にある電荷がつくるクーロンポテンシャルであり、電荷のある点を除いてはラプラス方程式を満足する。

この関数は原点に特異性を持たないから  $r = 0$  のまわりで次のように展開することができる。

$$G(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \Phi_n(\zeta) \quad (r < 1). \quad (14)$$

また、 $r \rightarrow \infty$  においてこの関数は 0 になるから  $r = \infty$  まわりで次のように展開することもできる。

$$G(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \Psi_n(\zeta) \quad (r > 1). \quad (15)$$

実は  $\Phi_n(\zeta)$  と  $\Psi_n(\zeta)$  は同じものである。このことは、 $G(r, \zeta)$  が

$$G(r, \zeta) = \frac{1}{r} G\left(\frac{1}{r}, \zeta\right) \quad (16)$$

を満足することからわかる。 $r < 1$  のときに (14) によって  $G(r, \zeta)$  が展開されるとすれば、 $r > 1$  の場合には  $1/r < 1$  であるから (16) の右辺の  $G(1/r, \zeta)$  もやはり (14) によって展開することができる。その展開の結果得られるのは (15) において  $\Psi_n(\zeta) = \Phi_n(\zeta)$  と置いたものであることから  $\Psi_n(\zeta) = \Phi_n(\zeta)$  が結論される。

この共通の関数は通常  $P_n(\zeta)$  を用いてあらわされる。すなわち

$$G(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\zeta). \quad (17)$$

によって  $P_n(\zeta)$  が定義される。実は  $P_n(\zeta)$  は  $\zeta$  の  $n$  次の多項式であり、ルジャンドル多項式と呼ばれる。実際に  $r$  で展開してみると、はじめのいくつかは次のように与えられることがわかる。

$$P_0(\zeta) = 1, \quad P_1(\zeta) = \zeta, \quad P_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}, \quad \dots \quad (18)$$

$P_n(\zeta)$  が  $\zeta$  の  $n$  次の多項式であることは次のように分かる。まず、母関数  $G(r, \zeta)$  の定義式 (13) より、 $G(r, \zeta)$  は  $r^2 - r\zeta$  の関数であり、次のようにテイラー展開できる。

$$G(r, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (2r\zeta - r^2)^k. \quad (19)$$

$\gamma_k$  は  $1/\sqrt{1-x}$  をテイラー展開したときの係数であり、次のように与えられる。

$$\gamma_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad (20)$$

(19) の中から  $r^n$  に比例する項を抜き出したとき、その係数が  $P_n(\zeta)$  であるが、そのような項は  $k \leq n$  の項のみに含まれる。従って、 $\zeta$  についてのべきは高々  $n$  である。 $r^n$  を含む項の中で、 $\zeta^n$  を含む項は  $\gamma_n(2r\zeta)^n$  であり、0 でないから、 $P_n(\zeta)$  は  $n$  次の多項式である。

$$P_n(\zeta) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (2\zeta)^n + \cdots \quad (21)$$

母関数を用いることで導出できる  $P_n(x)$  の性質をいくつか与えておこう。

**偶奇性**  $G(r, \zeta) = G(-r, -\zeta)$  の両辺を展開することにより次の式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-r)^n P_n(-\zeta). \quad (22)$$

$r$  の次数ごとに比較することにより、次の式を得る。

$$P_n(-\zeta) = (-1)^n P_n(\zeta). \quad (23)$$

つまり、 $n$  が偶数のとき  $P_n(\zeta)$  は偶関数、 $n$  が奇数のとき  $P_n(\zeta)$  は奇関数である。

**$\zeta = 0$  での値**  $n = 2m + 1$  のとき  $P_{2m+1}(\zeta)$  は奇関数であるから  $P_{2m+1}(0) = 0$  である。 $n = 2m$  に対して  $P_{2m}(0)$  の値は  $\zeta = 0$  での母関数

$$G(r, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}. \quad (24)$$

の両辺を展開し、 $r^{2m}$  の係数を比較することで次のように得られる。

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \gamma_m = (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}. \quad (25)$$

**$\zeta = \pm 1$  での値**  $\zeta = \pm 1$  のときには、母関数が

$$G(r, \pm 1) = \frac{1}{1 \mp r} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n r^n \quad (26)$$

となる。(ただし  $|r| < 1$  を仮定した。) 従って、次の式を得る。

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (27)$$



最大値

$$\begin{aligned} G(r, \cos \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r \cos \theta + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - re^{i\theta}}} \frac{1}{\sqrt{1 - re^{-i\theta}}} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k e^{ik\theta} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k r^k e^{-ik\theta} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

この中から  $r^n$  の係数を取り出したとしよう。 $e^{im\theta}$  と  $e^{-im\theta}$  は必ず対称に現れるから、それらをまとめて  $\cos(m\theta)$  によって表せば次のような形になるはずである。

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^n a_m \cos(m\theta) \quad (29)$$

しかも、 $\gamma_k$  は (20) に与えられているように全て正の実数であるから、(29) に現れる係数  $a_m$  もやはり全て正である。従って、 $\theta = 0$  のとき  $P_n(\theta)$  は最大値を取る。

$$P_n(\cos \theta) \leq 1. \quad (30)$$

## 3.2 漸化式

母関数

$$G(r, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\zeta r + 1}} \quad (31)$$

を  $r$  で微分してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial r} G(r, \zeta) = \frac{-r + \zeta}{\sqrt{(r^2 - 2\zeta r + 1)^3}} = \frac{-r + \zeta}{r^2 - 2\zeta r + 1} G(r, \zeta). \quad (32)$$

従って、次の関係式が成り立つ。

$$(r^2 - 2\zeta r + 1) \frac{\partial G}{\partial r} + (r - \zeta) G = 0. \quad (33)$$

ここに展開式 (17) を代入し、 $r^n$  の係数を取り出せば、次の関係式を得る。

$$nP_{n-1}(\zeta) - (2n+1)\zeta P_n(\zeta) + (n+1)P_{n+1}(\zeta) = 0. \quad (34)$$

これは  $P_n(\zeta)$  に対する 3 項の漸化式であり、これを用いれば  $P_0(\zeta) = 1$  と  $P_1(\zeta) = \zeta$  から出発して任意の  $P_n(\zeta)$  を得ることができる。

また別の関係式を得るために、母関数を  $\zeta$  で微分してみよう。

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - 2\zeta r + 1)^3}} = \frac{r}{r^2 - 2\zeta r + 1} G. \quad (35)$$

すなわち次の式が成り立つ。

$$(r^2 - 2\zeta r + 1) \frac{\partial G}{\partial \zeta} = rG. \quad (36)$$

ここに展開式を代入して  $r^{n+1}$  の係数を抜き出せば、

$$P'_{n-1} - 2\zeta P'_n + P'_{n+1} = P_n. \quad (37)$$

今度は微分方程式が得られた。

(34) と (37) を組み合わせることで  $P_n$  のみを含む次の微分方程式を得ることができる。

$$(1 - \zeta^2)P''_n - 2\zeta P'_n + n(n+1)P_n = 0. \quad (38)$$

これはルジャンドルの微分方程式と呼ばれるものである。 $P_n(\zeta)$  がルジャンドル多項式と呼ばれるのは、この微分方程式を満たすことが理由である。

母関数はもともとラプラス方程式の解になるように選んだ。このラプラス方程式に対応するのがルジャンドルの微分方程式である。ラプラス方程式を極座標で書けば

$$\left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] \phi = 0 \quad (39)$$

となるが、ここに母関数の展開に現れる関数  $\phi = r^n P_n(\cos \theta)$  を代入すれば、ルジャンドルの微分方程式 (38) が得られる。

### 3.3 ロドリゲスの公式

これまでに漸化式や微分方程式など、間接的に  $P_n(x)$  を与える関係式を与えてきたが、より直接的に  $P_n(x)$  を与える式を得るには母関数を実際にテイラー展開すればよい。まずは一旦  $1/\sqrt{1-x}$  のテイラー展開を用いて、その結果現れる  $x^k = (2rz - r^2)^k$  に対して二項定理を用いれば、次のようになる。

$$G(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (2rz - r^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \sum_{\ell=0}^k {}_k C_{\ell} (2rz)^{k-\ell} (-r^2)^{\ell}. \quad (40)$$

$\gamma_k$  の具体形 (20) および  ${}_k C_{\ell}$  の具体形を用いれば

$$\begin{aligned} G(r, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} (2rz)^{k-\ell} (-r^2)^{\ell} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^{\ell} (2k)!}{2^{k+\ell} k! \ell! (k-\ell)!} z^{k-\ell} r^{k+\ell}. \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 $k$  と  $\ell$  について和を取っているが、その範囲は次の条件によって与えられる。

$$k \geq 0, \quad \ell \geq 0, \quad k - \ell \geq 0. \quad (42)$$

これらはちょうど、分母にある階乗が有限値になる範囲である。実は、負数の階乗は無限大であり、その逆数が 0 となることを用いれば、これらの範囲を外れても自動的に寄与は 0 になるために、この範囲を無視することができる。つまり、次のように書ける。

$$G(r, z) = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2k)!}{2^{k+\ell} k! \ell! (k-\ell)!} z^{k-\ell} r^{k+\ell}. \quad (43)$$

$r^n$  の項を取り出したいので、 $k + \ell = n$  と置く。 $k$  に  $n - \ell$  を代入すれば

$$G(r, z) = \sum_{n, \ell=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2n - 2\ell)!}{2^n (n - \ell)! \ell! (n - 2\ell)!} z^{n-2\ell} r^n. \quad (44)$$

ここから  $r^n$  の係数を抜き出すことで  $P_n(z)$  が次のように得られる。

$$P_n(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2n - 2\ell)!}{2^n (n - \ell)! \ell! (n - 2\ell)!} z^{n-2\ell}. \quad (45)$$

ここで、

$$\frac{(2n - 2\ell)!}{(n - 2\ell)!} z^{n-2\ell} = \left( \frac{d}{dz} \right)^n z^{2n-2\ell} \quad (46)$$

であることを用いれば

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2^n (n - \ell)! \ell!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n z^{2(n-\ell)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{n!}{(n - \ell)! \ell!} (-1)^\ell z^{2(n-\ell)} \end{aligned} \quad (47)$$

さらに、和を二項定理を用いてまとめると、次の単純な形にまとまる。

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n (z^2 - 1)^n. \quad (48)$$

これがルジャンドル多項式に対するロドリゲスの公式である。

# 物理数学第二 第7回

2015年11月24日

## 目次

<b>3</b>	<b>ルジャンドル関数</b>	<b>3</b>
3.4	直交性 . . . . .	3
3.5	ルジャンドル陪関数 . . . . .	5
3.6	球面調和関数 . . . . .	8

## 今日のまとめ

- 直交性

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_{\bar{n}}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n\bar{n}}. \quad (1)$$

- ルジャンドル陪関数

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^m P_n(x). \quad (2)$$

- ルジャンドル陪方程式

$$\left[ \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} + n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_n^m(x) = 0. \quad (3)$$

- ロドリゲスの公式

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} (x^2-1)^n. \quad (4)$$

- $m$  と  $-m$

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (5)$$

- パリティ、 $x = \pm 1$

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x), \quad P_n^m(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0) \quad (6)$$

- 直交性

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{\bar{n}}^{\bar{m}}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n\bar{n}}. \quad (7)$$

- 球面調和関数

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\theta} P_{\ell}^m(\cos \theta), \quad \int Y_{\ell m} Y_{\bar{\ell} \bar{m}} d\Omega = \delta_{\ell\bar{\ell}} \delta_{m\bar{m}}. \quad (8)$$

- 

$$\Delta_{S^2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m} \quad (9)$$

### 3 ルジャンドル関数

#### 3.4 直交性

ルジャンドル関数  $P_n(x)$  は  $\Phi = r^n P_n(\cos \theta)$  がラプラス方程式  $\Delta \Phi = 0$  の解であると要求することによって定義することができた。これは、 $P_n(\cos \theta)$  が  $S^2$  (球面) 上のラプラシアン固有関数であり、次の方程式が成り立つと要請することと同じである。

$$\Delta_{S^2} P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta). \quad (10)$$

これは、 $S^1$  (円周) 上のラプラシアン  $\partial/\partial\theta^2$  の固有関数として  $e^{in\theta}$  が得られることに類似している。

$e^{in\theta}$  は  $S^1$  上の関数を展開 (フーリエ展開) するのに用いることができた。( $S^1$  上の関数は  $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$  を満足する関数、すなわち周期  $2\pi$  の周期関数のことである。) これに類似した展開を  $S^2$  上の関数に対しても行うことができる。 $S^2$  上の関数を軸対称なものに限れば、次の展開が可能である。

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta). \quad (11)$$

あるいは  $x = \cos \theta$  を用いれば、区間  $-1 \leq x \leq 1$  上の関数が次のように展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x). \quad (12)$$

この逆変換を得るには、フーリエ変換の場合と同様に、展開に用いる関数系の直交関係

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} A_n \quad (13)$$

および規格化を決める定数の値

$$A_n = \frac{2}{2n+1} \quad (14)$$

を用いればよい。

(11) の両辺に  $P_n$  を掛けて積分すれば、

$$\int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \delta_{mn} A_n = \frac{2}{2n+1} c_n. \quad (15)$$

従って、

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx \quad (16)$$

が得られる。

(13) は次のように証明される。ルジャンドル多項式が満足する微分方程式  $\Delta_{S^2} P_n(\cos \theta) = 0$  は次のように書き換えられる。(ルジャンドルの微分方程式)

$$\frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) = -n(n+1) P_n(x). \quad (17)$$

この式の両辺に  $P_m(x)$  を掛けて  $-1 \leq x \leq 1$  の区間で積分すると、

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) dx = -n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx. \quad (18)$$

この式の左辺を部分積分する。 $P_n(x)$  は区間の両端  $x = \pm 1$  において発散しないので、表面項は現れず、次の式を得る。

$$-\int_{-1}^1 \frac{dP_m}{dx}(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} dx = -n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx. \quad (19)$$

この式の左辺は  $m$  と  $n$  の入れ替えのもとで不変である。従って  $m$  と  $n$  を入れ替えたものと差をとれば、

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (20)$$

を得る。従って、 $m \neq n$  であれば積分は 0 であり、(13) が成り立つ。

$m = n$  の場合の積分の値 (14) は母関数を用いることで計算することができる。母関数の二乗の積分を考える。ルジャンドル多項式による展開を行えば、(13) を用いることで次の結果を得る。

$$\int_{-1}^1 G(r, x)^2 dx = \int_{-1}^1 \sum_{m,n=0}^{\infty} r^m P_m(x) r^n P_n(x) dx \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{2n}. \quad (21)$$

一方、母関数の具体形を用いれば

$$\int_{-1}^1 G(r, x)^2 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2 - 2rx + 1} dx = \frac{1}{r} \log \frac{1+r}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} r^{2n}. \quad (22)$$

これら二つの結果を比較することで (14) が得られる。

内積を定義するのに区間  $-1 \leq x \leq 1$  における積分を用いたが、これは球面上の積分とみなすことができることに注意しよう。

$$\int d\Omega_2 = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (23)$$

ここで、変数  $\theta$  の代わりに  $x = \cos \theta$  を用い、被積分関数が  $\phi$  に依存しないことを仮定すれば、

$$\int d\Omega_2 = 2\pi \int_{-1}^1 dx \quad (24)$$

が得られる。従って、球面上の関数としては次の規格化が自然である。

$$Y_n(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \theta). \quad (25)$$

これは、あとで導入される球面調和関数  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  のうち、 $\phi$  依存性のないもの  $Y_{\ell 0}(\theta, \phi)$  を表している。 $Y_n(\theta)$  は球面上の積分のもとで正規直交系をなす。

$$\int d\Omega_2 Y_m(\theta) Y_n(\theta) = \delta_{mn}. \quad (26)$$

### 3.5 ルジャンドル陪関数

ルジャンドル多項式は  $z$  軸対称なラプラス方程式の解と関係しており、 $(x, y, z) = (0, 0, 1)$  にある点電荷の作る静電ポテンシャルを母関数として定義することができた。これに対してルジャンドル陪関数は  $z$  軸対称ではないラプラス方程式の解と関係しているから、 $z$  軸からずれた位置にある電荷の静電ポテンシャルを母関数として用いることで生成することができるだろうということは容易に想像できる。

実は、ルジャンドル陪関数  $P_n^m(\zeta)$  ( $n \geq 0, m \geq 0$ ) は次の母関数によって生成することができる。

$$G(ae^{i\phi}, r, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-ia)^2 + (z-1)^2}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a^m e^{im\phi}}{m!} r^n P_n^m(\zeta). \quad (27)$$

ただし、 $(x, y, z)$  は直交座標

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (28)$$

であり、 $\zeta = \cos \theta$  である。

(27) は  $(x, y, z) = (a, ia, 1)$  にある点電荷によって作られる静電ポテンシャルと形式的にみなすことができる。「形式的に」と言ったのは座標が複素数であるため厳密には物理的に解釈することができないからである。しかしラプラス方程式の解であることにはかわりはないから、この関数を母関数として用いることができる。



実際に展開してみると、

$$\begin{aligned}
G(ae^{i\phi}, r, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r(\zeta + \frac{a(x+iy)}{r}) + 1}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left( \frac{a(x+iy)}{r} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^m \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\zeta + 1}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (ae^{im\phi}(1 - \zeta^2)^{1/2})^m \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\zeta) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ae^{im\phi})^m}{m!} r^n (1 - \zeta^2)^{m/2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^m P_n(\zeta) \quad (29)
\end{aligned}$$

となるから、(27) と比較することで

$$P_n^m(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{m/2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^m P_n(\zeta) \quad (30)$$

が得られ、(27) によって定義される関数  $P_n^m(\zeta)$  が以前に定義したものと同一であることがわかる。

ルジャンドル陪関数が満足する微分方程式は、 $r^n P_n^m(\theta) e^{im\phi}$  をラプラス方程式 ( $\Delta(r^n f_n^m(\theta) e^{im\phi}) = 0$ ) に代入することによって得ることができる。

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n^m(x) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_n^m(x) = 0. \quad (31)$$

この式はルジャンドル陪方程式と呼ばれる。ルジャンドル方程式とよく似ているが、 $m$  を含む項が新たに付け加わっている。

(30) の関係から容易に想像できるようにルジャンドル微分方程式を  $m$  回微分することによってもこの方程式を得ることができる。確認しておこう。

(31) には  $m$  が二乗の形で現れているので、 $m$  を  $-m$  で置き換えても同じである。そこで一般性を失わずに  $m > 0$  と仮定することができる。ルジャンドル多項式が満たす方程式は

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n + n(n+1) P_n = 0. \quad (32)$$

である。この両辺を  $m$  回微分すると、次の微分方程式を得る。

$$(1 - x^2) u'' - 2(m+1) x u' + (n-m)(m+n+1) u = 0. \quad (33)$$

ただし  $u(x) = (d/dx)^m P_n(x)$  とおいた。さらに  $P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} u(x)$  を用いれば、定義すれば、ルジャンドルの陪方程式 (31) が得られる。

ルジャンドル陪方程式はルジャンドル方程式と同様に二階の微分方程式であるから、二つの独立な階が存在する。それらのうちの片方は  $x = \pm 1$  で発散するた

め、物理的には興味がない。上記のようにルジャンドル多項式から得られる解は  $x = \pm 1$  で有限の値となる解である。

先ほど  $m > 0$  であると仮定したが、(30) による定義は  $m < 0$  の場合にも用いることができる。一見微分の階数が負になるように見えるが、ロドリゲスの公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n. \quad (34)$$

を代入すれば

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^{m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} (x^2 - 1)^n. \quad (35)$$

となるから、 $n + m \geq 0$  である限りこの式によって  $P_n^m(x)$  を定義することができる。

ルジャンドル陪方程式は  $m$  の符号に依存しないから  $P_n^m(x)$  と  $P_n^{-m}(x)$  は同じ微分方程式を満足する。実はそれらは、次の関係式を満足し、独立ではない。

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (36)$$

これを示すには、 $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$  と分解してロドリゲスの公式の微分演算を実行してみればよい。

ルジャンドル陪多項式に対する基本的な方程式を与えておこう。

**偶奇性** (35) より直ちに次の関係式を満たすことがわかる。

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x). \quad (37)$$

また、 $m \neq 0$  においては

$$P_n^m(\pm 1) = 0. \quad (38)$$

である。

**直交性**  $P_n^m$  と  $P_{n'}^m$  の直交関係を調べよう。 $n \neq n'$  のときにこれらが直交すること、すなわち

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \delta_{nn'} A_n^m \quad (39)$$

が成り立つことの証明は、ルジャンドル多項式の場合と同様にできるので省略する。 $n = n'$  の場合の積分  $A_n^m$  は次のように計算することができる。 $(X := 1 - x^2$

である。)

$$\begin{aligned}
A_n^m &= \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^m(x) dx \\
&= \frac{1}{2^{2n} n! n!} \int_{-1}^1 X^m \left\{ \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} X^n \right\} \left\{ \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} X^n \right\} dx \\
&\downarrow \text{部分積分} \\
&= \frac{1}{2^{2n} n! n!} \int_{-1}^1 X^n \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} \left\{ (-X)^m \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} (-X)^n \right\} dx \quad (40)
\end{aligned}$$

ここで、被積分関数の中にある  $2n + 2m$  個の微分を実行した結果 0 でない答えを出すのは  $(-X)^m$  および  $(-X)^n$  の最高次の項だけであることがわかる。それらの項に注目して計算を行えば、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned}
A_n^m &= \frac{1}{2^{2n} n! n!} \int_{-1}^1 X^n \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} \left\{ x^{2m} \left( \frac{d}{dx} \right)^{n+m} x^{2n} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2^{2n} n! n!} \frac{(2n)!(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \\
&= \frac{1}{2^{2n} n! n!} \frac{(2n)!(n+m)!}{(n-m)!} 2^{2n+1} B(n+1, n+1) \\
&= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (41)
\end{aligned}$$

つまり、次の式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \delta_{nn'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (42)$$

### 3.6 球面調和関数

ラプラス方程式の解  $r^n e^{im\theta} P_n^m(\cos \theta)$  を球面上でのノルムが 1 になるように規格化したもの

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) \quad (43)$$

を球面調和関数と呼ぶ。この関数は球面上のラプラシアン固有関数であり、次の関係を満たす。

$$\Delta_{S^2} Y_{nm}(\theta, \phi) = -n(n+1) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (44)$$

このように規格化しておくと、次の直交関係を満足する。

$$\int d\Omega_2 Y_{nm} Y_{n'm}^* = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (45)$$

$n = n'$  かつ  $m \neq m'$  の場合にはルジャンドル陪関数の直交関係 (42) より積分が 0 であることが示されるのに対し、 $n \neq n'$  のときには  $m$  と  $m'$  には無関係に  $\phi$  に依存する因子  $e^{i(n-n')\phi}$  の  $\phi$  積分によって 0 になる。このことが共通する  $m$  に対するルジャンドル陪関数の直交関係のみを調べた理由である。

$m$  と  $n$  がどのような値をとるかは重要である。これらは次の条件を満足する整数値を取る。

$$|m| \leq n. \quad (46)$$

球面上のラプラス演算子に対する固有値は  $n$  にのみ依存する。従って、 $m$  を一つ決めたとき微分方程式 (44) には  $m = -n, -n+1, \dots, +n$  に対応する  $2n+1$  個の独立な解が存在する。

球面上の任意の (たちのよい) 関数  $f(\theta, \phi)$  は、球面調和関数を用いて次のように展開することができる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (47)$$

展開係数は、次の式によって得られる。

$$c_{nm} = \int d\Omega_2 Y_{nm}(\theta, \phi)^* f(\theta, \phi). \quad (48)$$

# 物理数学第二 第8回

2015年12月1日

## 目次

3	ルジャンドル関数	1
---	----------	---

## 3 ルジャンドル関数

# 物理数学第二 第9回

2015年12月8日

## 目次

3	ルジャンドル関数	1
3.8	第二種ルジャンドル関数 . . . . .	1
3.9	積分表示 . . . . .	5
4	ベッセル関数	8
4.1	母関数 . . . . .	8
4.2	漸化式 . . . . .	9

## 3 ルジャンドル関数

### 3.8 第二種ルジャンドル関数

ルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}f(x) + n(n+1)f(x) = 0. \quad (1)$$

は二階の微分方程式であるから、二つの独立な解が存在する。そのうちの一つは既に見たルジャンドル多項式  $P_n(x)$  である。そしてそれとは独立なもう一つの解は第二種ルジャンドル関数と呼ばれ、 $Q_n(x)$  によってあらわされる。

$Q_n(x)$  は  $x = \pm 1$  において発散するため、 $P_n(x)$  に比べると物理で登場する機会は少ない。それでも  $Q_n$  についてここで述べる理由は、以下で  $Q_n$  を調べるために用いられる手法は応用範囲が広く重要であるため、 $Q_n$  がそれらのを学ぶよい例になるからである。

まずは  $Q_n$  の  $x = +1$  での振る舞いを確認しておこう。ルジャンドルの微分方程式 (1) において  $f$ 、 $f'$ 、 $f''$  がすべて有限であるとして  $x = 1$  と置いてみると、

$$-2f'(1) + n(n+1)f(1) = 0 \quad (2)$$

が得られる。従って、解は定数倍を除き一つしかない。定数因子を  $f(1) = 1$  と選べばそれがルジャンドル多項式であり、 $x = 1$  のまわりの振る舞いは次のように得られる。

$$P(1 - \epsilon) = 1 - \frac{n(n+1)}{2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3)$$

$f$ 、 $f'$ 、 $f''$  が有限な解がこれしかないということはもう一つの独立な解は  $x = 1$  において  $f$ 、 $f'$ 、 $f''$  のうちの少なくともひとつは発散するはずである。

ここで、 $x = 1$  近傍での様子を知るために、 $x = 1 - \epsilon$  と置いて、 $\epsilon$  の次数が低い項を抜き出すと、

$$2\epsilon \frac{d^2 f}{d\epsilon^2} + 2 \frac{df}{d\epsilon} = 0 \quad (4)$$

が得られるが、この微分方程式には次の解が存在する。

$$f \sim c \log \epsilon \quad (5)$$

$Q_n$  はこのような発散する解を適当に規格化することによって定義される。

$Q_n(x)$  をより具体的に与える方法には幾つかあるが、ここではロンスキアンを用いた構成法を紹介しよう。まずは一旦  $P_n$  や  $Q_n$  のことは忘れて、(1) の二つの解を  $f_1$  と  $f_2$  と置こう。(1) において  $f$  を  $f_1$  で置き換え、 $f_2$  を掛けると次の式が得られる。

$$f_2(x) \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx} f_1(x) + n(n+1) f_1(x) f_2(x) = 0. \quad (6)$$

もちろん、 $f_1$  と  $f_2$  を入れ替えた式も同様に成り立つ。(6) から、 $f_1$  と  $f_2$  を入れ替えた式を引くと、次の式が得られる。

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) W[f_1, f_2]] = 0. \quad (7)$$

ただし、 $W[f_1, f_2]$  は  $f_1$  と  $f_2$  のロンスキアンと呼ばれる関数であり、次のように定義される。

$$W[f_1, f_2] := f_1 \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dx} f_2. \quad (8)$$

(7) はこのロンスキアンが次のように簡単な関数で与えられることを示している。

$$W[f_1, f_2] = \frac{c}{1 - x^2}. \quad (9)$$

もし  $f_1$  と  $f_2$  が独立ではなく、互いに比例していれば  $W[f_1, f_2] = 0$  である。また、

$$W[f_1, f_2] = f_1^2 \frac{d}{dx} \frac{f_2}{f_1} \quad (10)$$

なので、 $W[f_1, f_2] = 0$  であれば  $f_1$  と  $f_2$  の比は一定であり、互いに独立ではない。

$f_1 = P_n$ 、 $f_2 = Q_n$  に対してもやはり (9) が成り立ち、 $P_n$  と  $Q_n$  が互いに独立であるという仮定より  $c \neq 0$  であるはずである。ここでは  $Q_n$  の規格化を  $c = 1$  と選ぶことによって定める。すなわち、 $Q_n$  を次の関係を満足する関数として定める。

$$W[P_n, Q_n] = \frac{1}{1 - x^2} \quad (11)$$

$x = 1$  まわりでの  $P_n$  の振る舞い (3) と発散する解の振る舞い (5) を用いると、

$$Q_n(1 - \epsilon) = -\frac{1}{2} \log \epsilon + \dots \quad (12)$$

が得られる。(… は  $x = 1$  のまわりで有限になる項である。) まだこれだけでは  $Q_n(x)$  は完全に定義されていないことに注意しよう。 $x = 1$  の周りで上記の特異性を持つある  $Q_n(x)$  が与えられたとき、それに  $P_n(x)$  の定数倍を加えたものはやはり同じ特異性を持ち、しかもルジャンドル微分方程式を満足するから、ここまでに述べた  $Q_n$  としての条件を満足している。

$Q_n$  のより具体的な式は以下のように得ることができる、(10) を用いれば、(11) を次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dx} \frac{Q_n}{P_n} = \frac{1}{(1 - x^2)P_n^2}. \quad (13)$$

従って、 $Q_n$  は次のように与えられる。

$$Q_n(x) = P_n(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{(1 - t^2)P_n^2(t)} dt. \quad (14)$$

被積分関数の分母は  $x = \pm 1$  および  $P_n$  の 0 点において 0 になるが、後者によって現れる発散は積分の外から掛けられている  $P_n(x)$  の 0 点と相殺するので、 $Q_n$  は  $-1 < x < 1$  の区間において滑らかな関数である。右辺の積分の起点  $x_0$  は条件 (11) からは決めることができない積分定数である。 $x_0$  を変化させることは  $Q_n$  に  $P_n$  の定数倍を加え、それを改めて  $Q_n$  として採用することに対応している。従って  $x_0$  の選び方を変えても本質的に新しい関数は得られない。

$Q_n$  の不定性に関連して、次の事実を指摘しておこう。 $Q_n$  が  $x = 1$  において (12) に与えた特異性を持つことから、 $x$  を複素平面上で 1 のまわりを一周させたとき、次のように振舞う。

$$Q_n(1 - e^{2\pi i} \epsilon) = Q_n(1 - \epsilon) - \pi i + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (15)$$

この両辺に現れる  $Q_n(1 - e^{2\pi i} \epsilon)$  と  $Q_n(1 - \epsilon)$  はどちらも同じルジャンドル微分方程式を満足する。従ってそれらの差として現れる  $-\pi i + \mathcal{O}(\epsilon)$  もやはり同じ微分方程式を満足するはずである。この関数は  $x = 1$  ( $\epsilon = 0$ ) において有限値  $-\pi i$  を



取るから、 $-\pi i P_n(x)$  に等しいはずである。すなわち、 $Q_n(x)$  は次の関係式を満足する。

$$Q_n(1 - e^{2\pi i \epsilon}) = Q_n(1 - \epsilon) - \pi i P_n(1 - \epsilon) \quad (16)$$

この関係式が意味するのは、 $Q_n(x)$  の有限部分をどのように定義したとしても、複素平面上を移動してもとの場所に戻ってくると、別の方法で定義された  $Q_n(x)$  になってしまうということである。従って、 $Q_n(x)$  の定義を行う際にはリーマン面のどのシートの上で議論をしているのかを注意深く指定する必要があることに注意しよう。

次の条件を課すことで  $Q_n$  の有限部分を一意的に定義することができる。

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x). \quad (17)$$

つまり、 $Q_n(x)$  は  $P_n(x)$  とは逆の偶奇性を持つ。

(14) に対して  $P_0(x) = 1$  および  $P_1(x) = x$  を代入して計算し、有限部分を (17) によって定めれば、 $Q_0(x)$  と  $Q_1(x)$  が次のように得られる。

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \\ Q_1(x) &= \frac{1}{2} x \log \frac{1+x}{1-x} - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

$n \geq 2$  に対してはルジャンドル多項式  $P_n$  の場合と同様に漸化式

$$(n+1)Q_{n+1} - (2n+1)xQ_n + nQ_{n-1} = 0 \quad (19)$$

を満足する。(これは以下で積分表示を用いて示す。) これを用いれば、 $Q_0$  と  $Q_1$  から任意の  $Q_n$  を計算することができる。

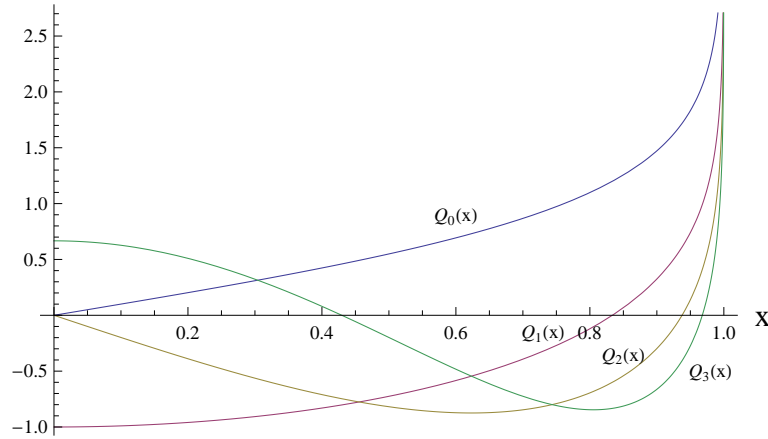


図 1: 第二種ルジャンドル関数

### 3.9 積分表示

一般に、点  $z$  の周りで正則なある関数  $f(z)$  に対して次の式が成り立つ。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_z \frac{f(t)}{(t-z)} dt. \quad (20)$$

積分路は  $t = z$  にある極を反時計周りにまわるように取る。これを  $n$  回  $z$  で微分することにより  $f(z)$  の  $n$  階微分を積分によって与える公式が得られる。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt. \quad (21)$$

これを用いてロドリゲスの公式

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n (z^2 - 1)^n \quad (22)$$

を書き換えることでルジャンドル多項式の積分表示が得られる。

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_z \frac{(t^2 - 1)^n}{(t-z)^{n+1}} dt. \quad (23)$$

積分路は  $t = z$  を反時計回りにまわる。これはシュレーフリ積分と呼ばれる、ルジャンドル多項式の積分表示である。

この積分表示の用途の一つは、ルジャンドル多項式  $P_n$  の次数  $n$  を非整数へ拡張することである。この場合、関数は多項式ではなくなるため、(第1種)ルジャンドル関数と呼ぶべきである。非整数であることを表すために次数を表すのに  $n$  の代わりに  $\nu$  を用いることにする。 $\nu$  が整数ではないときには被積分関数は  $t = \pm 1, z, \infty$  に分岐点を持つ。 $t = z$  および  $t = 1$  をつなぐカットを反時計回りにまわる積分経路を  $C_P$  としよう。(図2) ルジャンドル関数は (23) の積分を  $C_P$  に変更することで定義することができる。

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_P} \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} dt. \quad (24)$$

$-1 < z < 1$  の実数のときに  $t > 1$  において被積分関数が正の実数になるようにシートを選ぶ。

$\nu$  が非負整数のときには  $x = +1$  は零点であり、 $C_P$  は積分値を変えないことなく  $t = z$  まわりの円に変形することができるから、その場合には (23) に帰着し、 $P_\nu$  はこれまでに考えてきたルジャンドル多項式に一致する。

$P_\nu$  がルジャンドルの微分方程式を満足することは、被積分関数

$$f_\nu = \frac{1}{2^\nu} \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}} \quad (25)$$

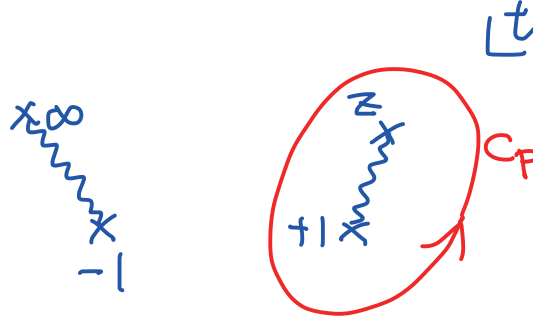


図 2:  $\nu$  が整数ではないときにルジャンドル関数を与える積分路

が次の関係を満足することから簡単に示すことができる。

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} (1 - z^2) \frac{\partial}{\partial z} + \nu(\nu + 1) \right) f_\nu = 2(1 + \nu) \frac{\partial}{\partial t} f_{\nu+1}. \quad (26)$$

この両辺を  $C_P$  にそって積分すれば、右辺は 0 になるからルジャンドル方程式を得る。また、次数が整数の場合と同様な漸化式

$$(\nu + 1)P_{\nu+1}(z) - (2\nu + 1)zP_\nu(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = 0 \quad (27)$$

を満足することも、次の関係式を  $C_P$  に沿って積分することで確認できる。

$$(\nu + 1)f_\nu - (2\nu + 1)zf_\nu + \nu f_{\nu-1} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{(1 - 2tz + t^2)f_\nu}{2} \quad (28)$$

上に与えた  $P_\nu$  がルジャンドルの微分方程式を満足することの証明は、積分経路  $C_P$  が具体的に何であるのかを用いていないことに注意しよう。必要なのは積分経路が（リーマン面上で）閉じているということだけである。従って、別の積分経路をとることによりルジャンドル微分方程式のもう一つの解  $Q_\nu$  を与えることができる。

その準備として、 $z$  と  $-1$  をまわる積分経路  $\tilde{C}_P$  (図 3) を用いて次の関数を定義しよう。

$$\tilde{P}_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{C}_P} \frac{(t^2 - 1)^\nu}{(z - t)^{\nu+1}} dt. \quad (29)$$

$z$  が  $-1 < z < 1$  を満たす実数のときに  $t < -1$  で被積分関数が正の実数になるようにシートを選ぶ。定義より明らかに  $P_\nu(-z) = -\tilde{P}_\nu(z)$  である。

$z = 1$  付近での特異性を調べよう。そのためには、直接積分を評価するよりも  $z$  を 1 のまわりで一周した時に積分値がどのように変化するのを見るほうが簡単である。 $z$  の移動に伴い積分経路がどのように変形するかを注意深く調べると、次の関係式が得られる。

$$\tilde{P}_\nu(1 - e^{2\pi i} \epsilon) = \tilde{P}_\nu(1 - \epsilon) - 2i \sin \pi \nu P_\nu(1 - \epsilon). \quad (30)$$

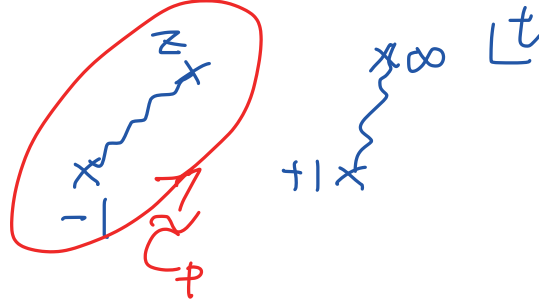


図 3:  $\nu$  が整数ではないときにルジャンドル関数を与える積分路

これは  $\tilde{P} \sim -\frac{\sin \pi \nu}{\pi} \log \epsilon$  であることを意味する。 $Q_\nu$  の規格化を整数の場合 (12) と同じ特異性  $Q_\nu \sim -\frac{1}{2} \log \epsilon$  を持つように決めれば、

$$Q_\nu \sim \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} \tilde{P}_\nu \quad (31)$$

を得る。有限部分は、 $n$  が整数の時に偶奇性 (17) が再現されるように次のように定義する。

$$Q_\nu = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} (\tilde{P}_\nu + \cos \pi \nu P_\nu) = \frac{\pi}{4} \left[ \cot \frac{\pi \nu}{2} (\tilde{P}_\nu + P_\nu) + \tan \frac{\pi \nu}{2} (\tilde{P}_\nu - P_\nu) \right] \quad (32)$$

積分表示より、 $\tilde{P}_\nu / \sin \pi \nu$  が  $P_\nu$  と同じ漸化式を満足することは簡単にわかる。したがって  $Q_\nu$  も同様に同じ漸化式を満足する。

## 4 ベッセル関数

### 4.1 母関数

二次元面上の波動方程式を極座標

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (33)$$

を用いて解くことを考えよう。(例えば、円形の太鼓の膜の振動を考える場合など。)

$$(\nabla^2 + k^2)f = 0. \quad (34)$$

このかいを次のように展開することができるはずである。

$$f(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(r) e^{in\theta} \quad (35)$$

一旦ある解  $f(r, \theta)$  に対して関数  $f_n(r)$  が得られれば、他の解も同じ関数を別の重みで重ね合わせることで得ることができるであろう。

関数  $f_n(r)$  を定義するための母関数として次のものを用いる。

$$e^{iky} = e^{ikr \sin \theta} = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} =: g(z, \theta). \quad (36)$$

ただし、変数  $z$  と  $t$  を次のように定義した。

$$z = kr, \quad t = e^{i\theta}. \quad (37)$$

これをフーリエ展開することで、次のように関数  $J_n(z)$  を定義する。

$$g(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) t^n. \quad (38)$$

$J_n$  は次数  $n$  の第1種ベッセル関数と呼ばれる。

実際に展開してみよう。 $g(x, t) = e^{\frac{x}{2}t} e^{-\frac{x}{2}\frac{1}{t}}$  のように二つに分けてそれぞれを展開すれば

$$g(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}t\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(-\frac{x}{2}\frac{1}{t}\right)^l \quad (39)$$

$k$  を  $l+n$  で置き換えると、

$$g(x, t) = \sum_n t^n \sum_l \frac{(-1)^l}{(l+n)!l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} \quad (40)$$

従って、 $J_n(x)$  が次のように得られる。

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+n)!l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} \quad (41)$$

ベッセル関数の次数  $n$  は正負どちらの値も取りえる。(非整数の次数についてはあとで議論する。ここでは  $n$  は整数であるとする。)  $J_n$  と  $J_{-n}$  は独立ではない。それらの関係を見るには、母関数が次の関係式を満たすことを用いればよい。

$$g(x, t) = g\left(x, -\frac{1}{t}\right) \quad (42)$$

両辺をベッセル関数で展開すれば

$$\text{左辺} = \sum_n J_n(x) t^n, \quad \text{右辺} = \sum_n J_n(x) \left(-\frac{1}{t}\right)^n = \sum_n (-1)^n J_{-n}(x) t^n. \quad (43)$$

従って、これらを比較することで次の式が得られる。

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x). \quad (44)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  に対するベッセル関数は図 4 のような形をしている。これらは

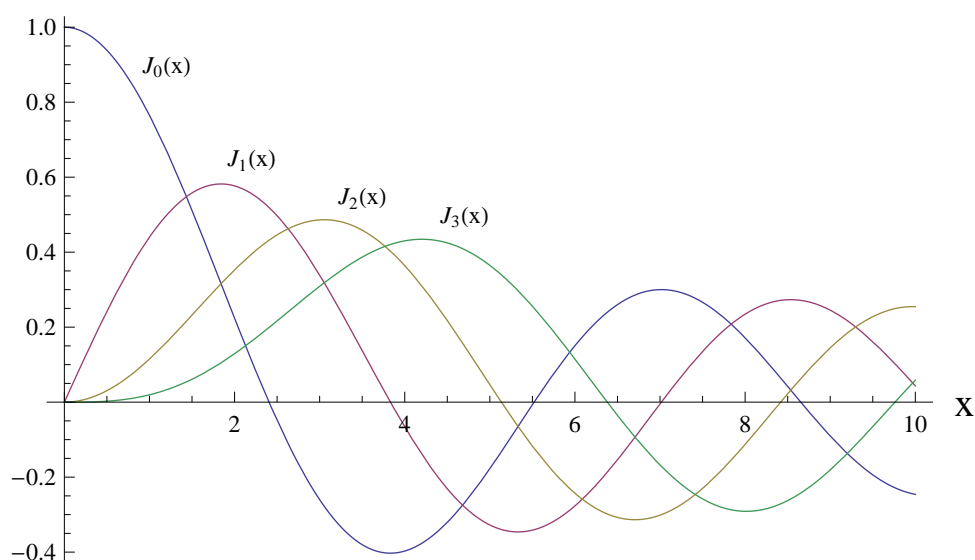


図 4: 第一種ベッセル関数  $J_n$

平面上を減衰しながら広がっていく波の形をあらわしている。(このことは後に  $x \rightarrow \infty$  での漸近形を求めることでよりはっきりする。)

## 4.2 漸化式

母関数  $g(x, t)$  をその引数  $t$  と  $x$  で微分してみよう。まず、 $t$  で微分してみると、次の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) g(x, t). \quad (45)$$

この両辺の  $g(x, t)$  をベッセル関数によって展開し、 $t$  のそれぞれのべきについて比較することで次の関係式を得る。

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}(J_{n-1} + J_{n+1}(x)) \quad (46)$$

これを用いることで、 $J_0$ 、 $J_1$  が与えられれば任意の  $n \geq 2$  に対する  $J_n$  を計算することができる。

母関数を  $x$  で微分すれば次の関係式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)g(x, t). \quad (47)$$

この式の両辺を  $J_n$  で展開して  $t$  のべきごとに比較することで次の式を得る。

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)). \quad (48)$$

上で得られた二つの関係式はどちらも 3 つのベッセル関数  $J_{n+1}$ 、 $J_n$ 、 $J_{n-1}$  を含むが、二つの式を組み合わせることで、唯一つの  $J_n$  を含む次の微分方程式が得られる。

$$J''_n + \frac{1}{x}J'_n + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n = 0. \quad (49)$$

これはベッセルの微分方程式と呼ばれるものである。この微分方程式は二階の微分方程式であるから二つの独立な解を持つが、第 1 種ベッセル関数はそれらのうちの片方である。実はもう一つの解は原点において発散し、第二種ベッセル関数（ノイマン関数）と呼ばれる。

ベッセルの微分方程式

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)f = 0. \quad (50)$$

の解について、 $x$  の小さいところでの様子を見てみよう。（ $n \geq 1$  の場合を考える。） $1 \ll n^2/x^2$  であるとして第 3 項の係数の 1 を無視すると、

$$f'' + \frac{1}{x}f' - \frac{n^2}{x^2}f = 0. \quad (51)$$

$f \propto x^s$  と置いて代入してみると、

$$s^2 - n^2 = 0 \quad (52)$$

が得られる。つまり、二つの独立な解は  $f \sim x^n$  と  $f \sim x^{-n}$  である。前者が第 1 種ベッセル関数  $J_n$  であり、後者は第二種ベッセル関数（ノイマン関数） $N_n$  に対応する。

$n = 0$  の場合には、二つの独立な解は  $x = 0$  の近傍で  $J_0 \sim (\text{const})$  および  $N_0 \sim (\text{const}) \log x$  のように振舞う。

# 物理数学第二 第 10 回

2015 年 12 月 15 日

## 目 次

4	ベッセル関数	1
4.3	直交性 . . . . .	1
4.4	ベッセル級数とハンケル変換 . . . . .	4
4.5	非整数次数のベッセル関数 . . . . .	5
4.6	積分表示 . . . . .	6
4.7	漸近形 . . . . .	10

## 4 ベッセル関数

はじめに、ベッセルの微分方程式を書いておく。

$$\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 - n^2\right) f = 0. \quad (1)$$

ベッセル関数  $J_n$  はこの微分方程式の解の一つ（原点において発散しないもの）であった。

### 4.3 直交性

ベッセル関数の直交性について調べよう。直交関係と聞いてすぐに調べたくなるのは、次数が異なるベッセル関数の間の直交関係であろう。実際、次の関係式が成り立つ。

$$\int_0^\infty J_n(x) J_{n'}(x) \frac{dx}{x} = 0 \quad \text{for } |n| \neq |n'|. \quad (2)$$

（ベッセルの微分方程式を用いることでこの関係式を証明してみよ。）



しかしここではこれとは別の直交関係に注目する。太鼓のモードの解析において現れる関数は、ある動径座標  $r = a$  において 0 となるような、さまざまなモードの間の関係である。角度依存性が異なるモードは、角度依存性だけから直交することが明らかである。従って必要なのはある特定の角度依存性を持つモードの間の関係を知ることだけである。角度依存性が  $e^{in\theta}$  であるようなモードに注目すれば、動径座標に対する依存性は次のように与えられる。

$$J_n(kr). \quad (3)$$

ただし、任意の  $k$  が許されるわけではなく、境界条件

$$J_n(ka) = 0. \quad (4)$$

を満たす  $k$  のみが許される。 $J_n(x)$  は波状の関数であるから、この境界条件を満足する  $k$  は無限個ある。 $J_n(x) = 0$  を満足する  $x > 0$  を小さいほうから  $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots$  のようにおけば、境界条件を満足する無限個の関数は、次のように与えられる。

$$J_n(k_{n,m}r), \quad k_{n,m} = \frac{x_{n,m}}{a}. \quad (5)$$

従って、次の内積を調べることが必要である。

$$\int_0^a r dr J_n(k_{n,\bar{m}}r) J_n(k_{n,m}r). \quad (6)$$

いちいち添え字を全て書くのは面倒なので、以下では

$$\begin{aligned} f(r) &= J_n(k_{n,m}r), & k &= k_{n,m}, \\ \bar{f}(r) &= J_n(k_{n,\bar{m}}r), & \bar{k} &= k_{n,\bar{m}} \end{aligned} \quad (7)$$

とおく。

これらは次の微分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} \left( -\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r} \right) f(r) &= k^2 r f(r), \\ \left( -\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + \frac{n^2}{r} \right) \bar{f}(r) &= \bar{k}^2 r \bar{f}(r). \end{aligned} \quad (8)$$

一つ目に  $\bar{f}$  を掛けて  $0 \leq r \leq a$  で積分すると、

$$\int_0^a dr \left( r \frac{d\bar{f}}{dr} \frac{df}{dr} + \frac{n^2}{r} \bar{f} f \right) - \left[ \bar{f} r \frac{df}{dr} \right]_0^a = k^2 \int_0^a dr r \bar{f} f. \quad (9)$$

$f$  と  $\bar{f}$  はどちらも  $r = a$  において 0 になる境界条件を満足し、 $r = 0$  においては有限である。従って左辺第 2 項の表面項は 0 である。従って左辺は  $k$  と  $\bar{k}$  の入れ

替えに対して対称である。従って、両辺においてこの入れ替えを行ったものを引くと、次のものを得る。

$$(k^2 - \bar{k}^2) \int_0^a dr r \bar{f} f = 0. \quad (10)$$

従って、 $\bar{k} \neq k$  のとき、積分は 0 になる。

$\bar{k} = k$  のときの規格化を計算するには、 $k$  が境界条件を満足するような値であり、 $\bar{k}$  をそこから少しだけずれた値  $\bar{k} = k + \epsilon$  とおき、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限をとればよい。

(9) と  $k$  と  $\bar{k}$  を入れ替えたものの差を取ると、

$$\left[ \bar{f} r \frac{df}{dr} \right]_0^a - \left[ f r \frac{d\bar{f}}{dr} \right]_0^a = (\bar{k}^2 - k^2) \int_0^a dr r \bar{f} f. \quad (11)$$

この段階では  $k$  と  $\bar{k}$  に対する条件を用いていない。 $k$  が境界条件を満足すること、 $\bar{k} = k + \epsilon$  を用いよう。

$$\bar{f}(a) = J_n(\bar{k}a) = J_n(ka) + \epsilon a J'_n(ka) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \epsilon a J'_n(ka) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (12)$$

を用いれば、

$$\epsilon a^2 k (J'_n(ka))^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 2\epsilon k \int_0^a dr r (J_n(kr))^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (13)$$

両辺を  $\epsilon$  で割って  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を取ることによって次の式が得られる。

$$\int_0^a dr r (J_n(kr))^2 = \frac{a^2}{2} (J'_n(ka))^2. \quad (14)$$

さらに、漸化式

$$J_{n+1} = \frac{n}{x} J_n - J'_n \quad (15)$$

によって書き換えると、

$$\int_0^a dr r (J_n(kr))^2 = \frac{a^2}{2} (J_{n+1}(ka))^2. \quad (16)$$

が得られる。

結果は次の式にまとめられる。

$$\int_0^a dr r J_n(k_{n,\bar{m}} r) J_n(k_{n,m} r) = \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(k_{n,m} a) \delta_{\bar{m},m}. \quad (17)$$

#### 4.4 ベッセル級数とハンケル変換

$r = 0$  において  $r^n$  のように振る舞い、 $r = a$  において 0 になるような境界条件を満足する関数  $f(r)$  は同じ条件を満足する関数

$$J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a}r\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

によって次のように展開することができる。

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a}r\right). \quad (19)$$

ここで用いられている関数のグラフを図1に与えた。関数  $f(r)$  が与えられたとき、

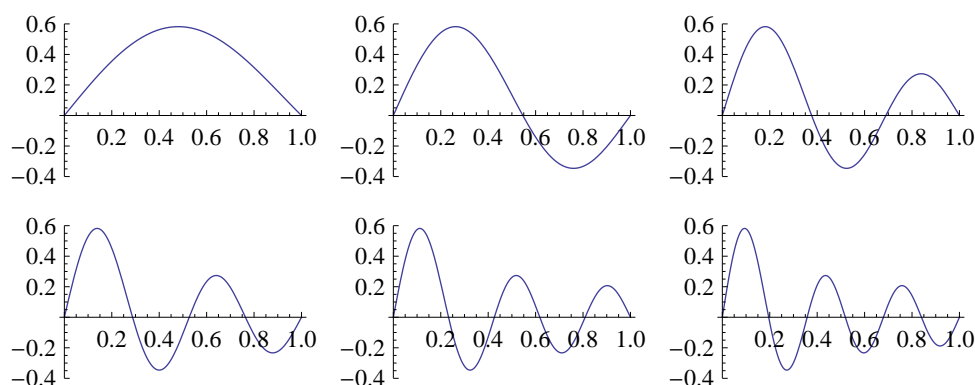


図 1: ベッセル級数に用いられる関数 ( $n = 1$ ,  $a = 1$  の場合)

展開係数  $c_m$  は直交関係式 (17) を用いることで次のように得られる。

$$c_m = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(k_{n,m}a)} \int_0^a dr r J_n(k_{n,m}r) f(r). \quad (20)$$

ベッセル級数はフーリエ級数と良く似ている。フーリエ級数の場合には、関数の周期が無限に大きくなる極限を取ることによってフーリエ展開に移行することができた。ベッセル級数に対しても同じように  $a \rightarrow \infty$  の極限を取ることができる。その結果として得られる変換はハンケル変換と呼ばれる。

$a$  が有限のとき、 $k$  はとびとびの値  $k_{n,m}$  しか許されないが、 $a \rightarrow \infty$  の極限ではその間隔  $\Delta k$  が小さくなり  $k$  を連続量とみなすことができるようになる。その結果、

$$\delta_{\bar{m},m} \rightarrow \Delta k \delta(\bar{k} - k) \quad (21)$$

のような置き換えが可能となる。(この時点では  $\Delta k$  は  $k$  に依存する可能性があるが、実際にはすぐあとで説明するように定数である。) その結果、直交関係式 (17)

が次のように書き換えられる。

$$\int_0^\infty dr r J_n(\bar{k}r) J_n(kr) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \Delta k \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(k_{n,m}a) \right) \delta(\bar{k} - k). \quad (22)$$

右辺の係数の極限を取るには、 $J_n(x)$  の  $x \rightarrow \infty$  における振る舞いを知る必要がある。これは後に導出するように次のように与えられる。

$$J_n(x) \stackrel{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \frac{\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (23)$$

この式より、 $x$  が大きいところでの零点の間隔は  $\pi$  である。

$$x_{n,m+1} - x_{n,m} \sim \pi \quad (24)$$

よって、

$$\Delta k = k_{n,m+1} - k_{n,m} \sim \frac{\pi}{a}. \quad (25)$$

また  $J_n$  の 0 点における  $J_{n+1}$  の値は

$$J_{n+1}(x_{n,m}) \sim \pm \sqrt{\frac{2}{\pi x_{n,m}}} \sim \pm \sqrt{\frac{2}{\pi a k}} \quad (26)$$

これらを用いれば

$$\int_0^\infty dr r J_n(\bar{k}r) J_n(kr) = \frac{1}{k} \delta(\bar{k} - k). \quad (27)$$

が得られる。

ここから、ハンケル変換に対する次の式が得られる。

$$F(k) = \int_0^\infty J_n(kr) f(r) r dr, \quad f(r) = \int_0^\infty J_n(kr) F(k) k dk. \quad (28)$$

## 4.5 非整数次数のベッセル関数

ベッセル関数

$$J_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+\nu)! l!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2l+\nu} \quad (29)$$

はベッセルの微分方程式

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) f(x) = 0 \quad (30)$$

の解である。このことは  $\nu$  が整数であるかどうかにはよらない。そのため、(29) の展開式を用いて非整数の  $\nu$  に対するベッセル関数を定義することができる。(分母に現れる非整数の階乗はガンマ関数を用いて定義する。)

$\nu \in \mathbb{Z}$  のとき  $J_\nu$  と  $J_{-\nu}$  は独立ではなく、ベッセル微分方程式の二つの独立な解は第一種ベッセル関数  $J_\nu$  と第二種ベッセル関数 (ノイマン関数)  $N_\nu$  によって与えられたが、 $\nu \notin \mathbb{Z}$  の場合には  $J_\nu$  と  $J_{-\nu}$  によって二つの独立な解が与えられる。このことは例えば上記の展開式の  $x \sim 0$  での振る舞い

$$J_\nu = \frac{1}{\nu!} x^\nu + \cdots, \quad J_{-\nu} = \frac{1}{(-\nu)!} x^{-\nu} + \cdots \quad (31)$$

からも確認できる。従って、 $N_\nu$  は  $J_\nu$  と  $J_{-\nu}$  の線形結合として与えられる。

$N_\nu$  を定義し、それと  $J_\nu$ 、 $J_{-\nu}$  の関係を与えるには、ベッセル関数を積分表示するのが便利である。

## 4.6 積分表示

次数が整数の場合には  $J_n$  を母関数を用いて与えることができた。

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (32)$$

従って、ベッセル関数を次のように積分で与えることができる。

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{ix \sin \theta} d\theta \quad (33)$$

以下の議論では積分変数として  $\theta$  の代わりに  $z = i\theta$  を用いるほうが都合がよい。このとき (33) は次のように書き換えられる。

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_0+2\pi i} e^{-nz+x \sinh z} dz \quad (34)$$

積分経路を  $z_0$  から  $z_0 + 2\pi i$  までとした。  $n$  が整数のとき被積分関数は周期  $2\pi i$  の周期関数であるため、積分は  $z_0$  に依らない。

ここで、整数値  $n$  を非整数  $\nu$  に一般化することを考えよう。(複素数にまで一般解することができるが、ここでは実数の範囲で考えることにする。) この場合には、被積分関数

$$f_\nu(z, x) = e^{-\nu z + x \sinh z} \quad (35)$$

には上で述べた周期性がなくなるので、積分経路を適切に選ぶ必要がある。

何らかの積分経路を選んだとして、次の関数を定義してみよう。

$$F_\nu^C(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f_\nu(z, x) dz. \quad (36)$$

ここで、被積分関数は次の式を満たす。

$$\left[ x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) \right] f_\nu(z, x) = \frac{\partial}{\partial z} [(\nu + x \cosh z) f_\nu(z, x)] \quad (37)$$

この両辺を  $C$  上で積分すれば

$$\left[ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2) \right] F_\nu^C(x) = [(\nu + x \cosh z) f_\nu(z, x)]_C \quad (38)$$

右辺は  $C$  の始点と終点における値の差を表す。 $\nu$  が整数の場合には  $f_\nu(z+2\pi i, x) = f_\nu(z, x)$  であるために (34) の積分経路の両端での値は同じであり、(38) の右辺は 0 になる。これは  $F_\nu^C(x)$  がベッセルの微分方程式を満たすことを意味する。

しかし、 $\nu \notin \mathbb{Z}$  の場合にはそうはならない。そこで (38) の右辺に対する  $C$  のそれぞれの端点の寄与が 0 になるように、積分経路を選ぶことにしよう。

被積分関数の絶対値の大小に注目し、複素平面上に図示してみると図 2 のようになる。図に示されたように、複素平面上では  $f(z, x)$  が小さくなるような谷が左

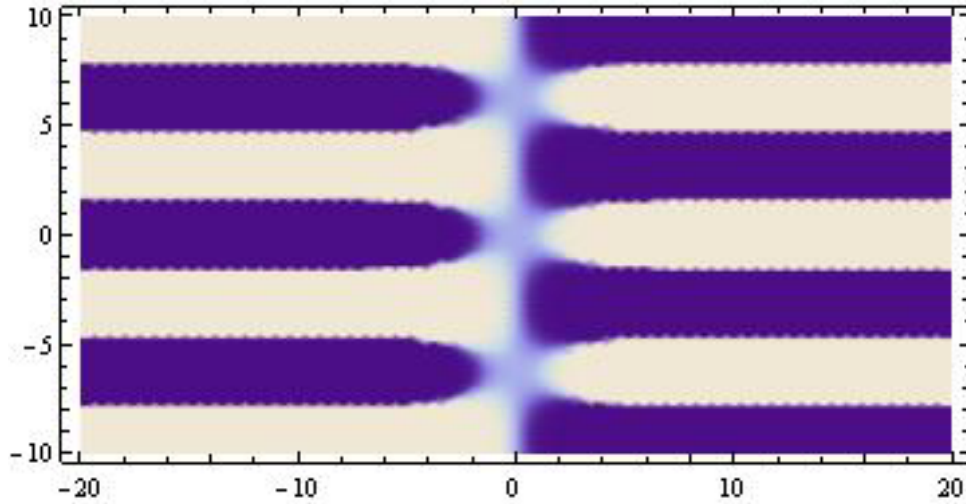


図 2: (34) の被積分関数の絶対値。 $(\nu = 1, x = 1)$  のとき。) 白は山 (絶対値が大きい) を、青は谷 (絶対値が小さい) を表す。

右に伸びている。そこで、これらの谷のうちの一つから出発して別の谷へと伸びる積分経路を採用してみよう。始点、終点にどの谷を選んでもベッセルの微分方程式の解を与えるが、 $n$  が整数の場合の  $J_n$  の積分表示にあわせるには、終点を始点の一つ上の谷に取る必要がある。 $x \in \mathbb{R}_+$  の場合には、 $\text{Im } z = (2k+1)\pi$  に右側に伸びる谷が、 $\text{Im } z = 2k\pi$  に左側に伸びる谷がある。そこで、次のような可能性が考えられる。

$$\begin{aligned} C_k^R &: +\infty + (2k-1)\pi i \rightarrow +\infty + (2k+1)\pi i, \\ C_k^L &: -\infty + (2k-2)\pi i \rightarrow -\infty + 2k\pi i. \end{aligned} \quad (39)$$

上で述べたように、 $\nu$  が整数の時には全て同じ関数を与えるが、 $\nu$  が非整数の場合にはそうではない。ここでは  $C_0^R$  上での積分によって非整数次数のベッセル関数を定義することにしよう。

$$J_\nu(x) := F_\nu^{C_0^R}(x). \quad (40)$$

他の積分経路を選んでもやはりベッセルの微分方程式の解を与えるが、それらとの関係については（時間があれば）あとで触れることにする。ここでは、積分によって定義された関数  $F_\nu^C(x)$  は、谷をつなぐ任意の  $C$  に対してベッセル関数と同じ漸化式

$$\nu F_\nu^C = \frac{x}{2}(F_{\nu-1}^C + F_{\nu+1}^C) \quad (41)$$

を満足することを指摘するにとどめる。このことは、被積分関数が満たす次の関係式を積分することで直ちに示される。

$$\frac{x}{2}(f_{\nu-1} + f_{\nu+1}) - \nu f_\nu = \frac{\partial}{\partial z} f_\nu \quad (42)$$

この subsection の残りは時間の関係で授業では説明しない。

ベッセル関数  $J_\nu$  を積分によって定義する際に、積分経路として  $C_0^R$  を採用した。しかし、他の積分経路を採用してもやはりベッセルの微分方程式の解を得ることができる。そこで、異なる積分経路を選ぶことで得られる関数との関係について触れておこう。被積分関数の擬周期性

$$f(z + 2\pi i, x) = e^{-2\pi i \nu} f(z, x) \quad (43)$$

より、 $2\pi i$  だけずれた積分経路を採用して得られる関数の間の関係が次のように得られる。

$$F_\nu^{C_{k+1}^R}(x) = e^{-2\pi i \nu} F_\nu^{C_k^R}(x), \quad F_\nu^{C_{k+1}^L}(x) = e^{-2\pi i \nu} F_\nu^{C_k^L}(x). \quad (44)$$

また、 $x$  が正の実軸からずれると、谷の位置がそれに伴ってずれる。（図 3）谷の位置は  $x$  の偏角に次のように依存する。

$$+\infty + (2k + 1 - \arg x)i, \quad -\infty + (2k + \arg x)i. \quad (45)$$

従って、 $x$  が複素平面上で原点の周りを左回りに一周すると、 $C_k^R$  は  $C_{k-1}^R$  に、 $C_k^L$  は  $C_{k+1}^L$  に変化する。このことは、対応する関数に対する次の関係式を与える。

$$F_\nu^{C_k^R}(e^{2\pi i} x) = F_\nu^{C_{k-1}^R}(x), \quad F_\nu^{C_k^L}(e^{2\pi i} x) = F_\nu^{C_{k+1}^L}(x). \quad (46)$$

つまり、 $C_k^L$  と  $C_k^R$  それぞれに対する無限個の  $k$  の選び方は独立ではなく、同じ関数の異なるシート上での値を与えるものである。

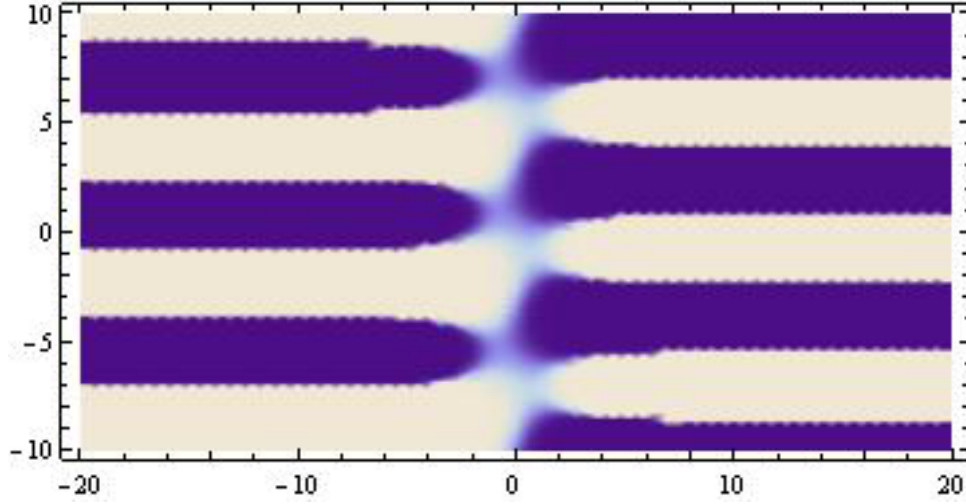


図 3:  $\nu = 1$ 、 $x = e^{\pi i/4}$  の場合の被積分関数の様子。図 2 と比べると、谷の位置が上下にずれていることがわかる。

(44) と (46) を組み合わせれば次の式が得られる。

$$F_\nu^{C_k^R}(e^{2\pi i}x) = e^{2\pi i\nu} F_\nu^{C_k^R}(x), \quad F_\nu^{C_k^L}(e^{2\pi i}x) = e^{-2\pi i\nu} F_\nu^{C_k^L}(x). \quad (47)$$

(31) と比較すれば

$$F_\nu^{C_k^R}(x) \propto J_\nu(x), \quad F_\nu^{C_k^L}(x) \propto J_{-\nu}(x) \quad (48)$$

であることがわかる。(この段階で  $C_k^L$  ではなく  $C_k^R$  を用いて  $J_\nu$  を定義したことが正しかったことが確認される。)

$\nu = n$  が整数であり、 $x \in \mathbb{R}_+$  のときには一つ目の式において等号が成り立つことを知っているから、一般の  $\nu$  に対しては次のように置くのがよいであろう。

$$J_\nu(x) = e^{\pi i(2k)\nu} F_\nu^{C_k^R}(x) \quad (49)$$

右辺は  $k$  の選び方に依存しないことに注意。さらに、 $z$  平面をひっくり返したときの被積分関数の振る舞い

$$f_{-\nu}(x, z) = e^{-\pi i\nu} f_\nu(x, -\pi i - z) \quad (50)$$

を用いれば、

$$F_{-\nu}^{C_k^R}(x) = e^{-\pi i\nu} F_\nu^{C_{-k}^L}(x) \quad (51)$$

を示すことができ、さらには (49) において  $\nu$  を  $-\nu$  で置き換えたものが次のようにも書けることを示すことができる。

$$J_{-\nu}(x) = e^{\pi i(2k-1)\nu} F_\nu^{C_k^L}(x). \quad (52)$$

今度も右辺は  $k$  の選び方に依存しない。



## 4.7 漸近形

ベッセル関数  $J_\nu(x)$  の積分表示の一つの重要な用途は、漸近形を計算することである。 $x \rightarrow +\infty$  (すなわち、太鼓の問題における無限遠方) でのベッセル関数の振る舞いを調べることは、波源から遠くはなれたところでの球面波の振る舞いを表しており、物理的にきわめて重要である。

$x$  が非常に大きいとき、被積分関数

$$f_\nu(z, x) = e^{-\nu z + x \sinh z} \quad (53)$$

は鋭いピークを持つ関数として扱うことができ、積分値はそのピーク周りの寄与を拾うだけでよい近似となる。ただしガンマ関数の積分表示を用いてスターリングの公式を導出したときとは異なり、積分は複素平面上で行う必要がある。

積分誤差をできるだけ小さくするには、 $C$  上の被積分関数の絶対値ができる限り小さくなるように選ぶのがよい。そのような経路は、被積分関数の絶対値を高さとして表せば、谷から始まり、(必要であればいくつかの) 峠を通り、谷に終わるような道として表される。峠の周りにおいて、関数を現す面は鞍状になっており、鞍点と呼ばれる。経路上のもっとも高い点は鞍点(峠)であり、それらの周りでの積分値を足し上げることで積分の近似値を得ることができる。この方法は鞍点法と呼ばれる。

鞍点法を用いて  $x \rightarrow +\infty$  におけるベッセル関数の漸近形を求めよう。被積分関数の鞍点は

$$0 = \frac{\partial f_\nu}{\partial z} = (-\nu + x \cosh z) f_\nu \quad (54)$$

によって決まる。 $x$  が非常に大きいときには  $\cosh z = 0$  となる点、すなわち

$$z = z_k := \pi i \left( k + \frac{1}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (55)$$

において鞍点となる。鞍点の周りでの被積分関数の様子を見るために  $z = z_k + \epsilon$  とおくと

$$f_\nu(z, x) = e^{-\nu(z_k + \epsilon)} e^{i(-)^k x \cosh \epsilon} \sim \begin{cases} e^{-\pi i \nu(k + \frac{1}{2}) + ix} e^{\frac{ix}{2} \epsilon^2} & (k \in 2\mathbb{Z}) \\ e^{-\pi i \nu(k + \frac{1}{2}) - ix} e^{-\frac{ix}{2} \epsilon^2} & (k \in 2\mathbb{Z} + 1) \end{cases} \quad (56)$$

$\epsilon$  は複素数である。鞍点から離れるとき、 $\epsilon$  の偏角によって、被積分関数の絶対値は大きくなる場合と小さくなる場合がある。積分は被積分関数の絶対値が小さくなる向きに行う必要がある。そのためには  $t$  を実数として次のような向きの経路を取ればよい。

$$\epsilon = e^{\frac{\pi i}{4} t} \quad (k \in 2\mathbb{Z}), \quad \epsilon = e^{\frac{3\pi i}{4} t} \quad (k \in 2\mathbb{Z} + 1) \quad (57)$$

代入すれば、鞍点の周りで、経路に沿っての被積分関数が次のように表される。

$$f_\nu(z, x) \sim \begin{cases} e^{-\pi i \nu(k+\frac{1}{2})+ix} e^{-\frac{x}{2}t^2} & (k \in 2\mathbb{Z}) \\ e^{-\pi i \nu(k+\frac{1}{2})-ix} e^{-\frac{x}{2}t^2} & (k \in 2\mathbb{Z}+1) \end{cases} \quad (58)$$

経路に沿った積分は、 $t$  の高次の項を無視した結果ガウス積分となるから簡単に実行できる。 $t$  で積分して  $2\pi i$  で割ると、次の結果を得る。 $\frac{1}{2\pi i} \int f_\nu d\epsilon$  はそれぞれの鞍点の周りで次の寄与を与える。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left[ -\pi i \nu \left( k + \frac{1}{2} \right) + i \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (k \in 2\mathbb{Z}) \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp \left[ -\pi i \nu \left( k + \frac{1}{2} \right) - i \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (k \in 2\mathbb{Z}+1) \end{aligned} \quad (59)$$

$J_\nu$  の漸近形は  $k=0$  と  $k=-1$  の寄与を加えることで次のように得られる。

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi \nu}{2} \right). \quad (60)$$

# 物理数学第二 第 11 回

2015 年 12 月 22 日

## 目次

4.8 ハンケル関数、ノイマン関数 . . . . .	1
4.9 ロンスキアン . . . . .	2
4.10 変形ベッセル関数 . . . . .	3
4.11 球ベッセル関数 . . . . .	3

## 4.8 ハンケル関数、ノイマン関数

ベッセル方程式の解は次のように与えられることを見た。

$$\int_C f_\nu(x, z) dz 2\pi i, \quad f_\nu(x, z) = e^{-\nu z + x \sinh z}. \quad (1)$$

$J_\nu(x)$  を得るには、 $+\infty - i\pi$  から出て  $+\infty + i\pi$  に至る積分経路を用いる。

$x$  が大きいときの漸近形は鞍点法を用いて得ることができた。

上記の積分経路は二つの鞍点  $z = \pm \pi i/2$  を持つ。 $z = +\pi i/2$  の寄与は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i \left\{ x - \frac{\pi}{2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (2)$$

$z = -\pi i/2$  の寄与は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -i \left\{ x - \frac{\pi}{2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (3)$$

二つの寄与をあわせれば、

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left\{ x - \frac{\pi}{2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (4)$$

ハンケル関数はそれぞれの鞍点の寄与のみを拾う積分経路を取ることで定義できる。

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp i \left\{ x - \frac{\pi}{2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (5)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp -i \left\{ x - \frac{\pi}{2} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (6)$$

ハンケル関数を用いると、ベッセル関数  $J_\nu$  とノイマン関数  $N_\nu$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)), \\ N_\nu(x) &= \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)). \end{aligned} \quad (7)$$

ハンケル関数が次の式を満たすことは、例えば漸近形からすぐに分かる。

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{\pi i \nu} H_{-\nu}^{(1)}(x), \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-\pi i \nu} H_{-\nu}^{(2)}(x). \quad (8)$$

これらを用いれば  $J_{-\nu}$  などを他の関数で表すことができる。

例えば次の式が成り立つ。

$$J_{-\nu}(x) = \cos(\pi \nu) J_\nu(x) - \sin(\pi \nu) N_\nu(x). \quad (9)$$

ここまでは  $x \in \mathbb{R}_+$  としてきたが、 $\arg x = \theta$  の場合には  $|f_\nu|$  の谷の位置は  $z$  平面の右側では下に  $i\theta$  だけ、左側では上に  $i\theta$  だけずれる。このことを用いれば、次の式が示される。

$$H_\nu^{(1)}(e^{2\pi i} x) = -e^{-2\pi i \nu} H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x) - H_\nu^{(1)}(x). \quad (10)$$

他の関数についても同様。

## 4.9 ロンスキアン

$f$  と  $g$  をベッセルの微分方程式の解とすると、 $A$  を  $x$  によらない定数として

$$W[f, g] = \frac{A}{x} \quad (11)$$

が成り立つ。

## 4.10 変形ベッセル関数

ベッセル関数は

$$(\Delta + k^2)f = 0 \quad (12)$$

の解を

$$J_n(kr)e^{in\theta} \quad (13)$$

のように展開することで得られた。

$$(\Delta - k^2)f = 0 \quad (14)$$

に対して同様なことを行えば変形ベッセル関数が得られる。 $k$  を  $ik$  で置き換えればよいから、ベッセル関数から次のように定義する。

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \quad (15)$$

これは次の方程式の解。

$$\left( x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - \nu^2 \right) f = 0. \quad (16)$$

もう一つの解は

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (17)$$

## 4.11 球ベッセル関数

$\mathbb{R}^3$  上の方程式

$$(\Delta + k^2)\phi = 0 \quad (18)$$

において、 $\phi = f(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  とおけば、 $f(r)$  が満たす式は

$$\left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} + (kr)^2 - n(n+1) \right] f = 0 \quad (19)$$

ここで、

$$f = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z(kr) \quad (20)$$

とおけば、 $Z$  が満足する式は

$$\left[ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} + (kr)^2 - \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] f = 0 \quad (21)$$

これはベッセルの微分方程式であり、解は次数  $n + 1/2$  のベッセル関数によって与えられる。

次の関数を定義するのが便利。

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ n_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x), \\ h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), \\ h_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (22)$$

これらは球ベッセル関数と呼ばれる。

# 物理数学第二 第12回

2016年1月5日

## 目次

5	その他の特殊関数	1
5.1	エルミート多項式	2
5.2	ラゲール多項式	4
6	偏微分方程式	7
6.1	偏微分方程式の種類	7
6.2	ディリクレ問題	7

## 5 その他の特殊関数

量子力学においてシュレーディンガー方程式を解く際に現れるその他の特殊関数においてみておこう。シュレーディンガー方程式は

$$\text{運動エネルギー} + \text{ポテンシャルエネルギー} = \text{全エネルギー} \quad (1)$$

において運動エネルギーを  $-\Delta$  で置き換えて、両辺を関数に作用させることで得られる。(ここでは数係数などは無視した大雑把な話をしている。) 例えば、ばねの振動(調和振動子)に対するシュレーディンガー方程式は次のように与えられる。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2)$$

クーロンポテンシャル中の粒子の運動を表すシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\Delta + \frac{1}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3)$$

である。

## 5.1 エルミート多項式

エルミート多項式 (Hermite polynomials)  $H_n(x)$  は母関数を用いて次のように定義される。

$$g(x, t) := e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \quad (4)$$

(この母関数は調和振動子のコヒーレント状態と関係している。) 母関数を展開してみれば、 $H_n(x)$  は  $n$  次の多項式であることがわかる。最初のいくつかは

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \dots \quad (5)$$

母関数が  $g(-x, t) = g(x, -t)$  を満足することから次の偶奇性が得られる。

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (6)$$

母関数のテイラー展開により次の式 (ロドリゲスの公式) を得ることができる。

$$H_n(x) = e^{x^2} \left( -\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}. \quad (7)$$

(この式は、昇降演算子を用いた構成法と関係している。)

母関数を微分することにより漸化式を得ることができる。

$$\partial_t g(x, t) = (-2t + 2x)g(x, t) \quad (8)$$

より、次の式が得られる。

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}. \quad (9)$$

この式を用いれば、 $H_0$  と  $H_1$  から全てのエルミート多項式を得ることができる。  
( (9) において  $n = 0$  とおけば  $H_1 = 2xH_0$  となるから、実は  $H_0$  さえわかれば  $H_1$  およびそれ以降の  $H_n$  が全て決まる。 )

母関数を  $x$  で微分すると、

$$\partial_x g = 2tg, \quad \partial_x^2 g = 4t^2g \quad (10)$$

が成り立つ。これを

$$t\partial_t g = (-2t^2 + 2xt)g \quad (11)$$

と組み合わせれば

$$\partial_x^2 g - 2x\partial_x g + 2t\partial_t g = 0 \quad (12)$$



が得られる。これは次の式が成り立つことを意味する。

$$\partial_x^2 H_n - 2x\partial_x H_n + 2nH_n = 0 \quad (13)$$

$\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$  を定義すると、

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x). \quad (14)$$

が成り立つが、これは「調和振動子に対するシュレーディンガー方程式」である。

量子力学において、関数  $\psi_n$  の直交性が重要になる。 $\psi_m$  と  $\psi_n$  について、 $m \neq n$  のときに直交することは微分方程式 (14) を用いて示することができる。また、 $m = n$  の場合のノルムは母関数を用いて計算することができる。最終的に、次の関係式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n}. \quad (15)$$

## 5.2 ラゲール多項式

クーロンポテンシャル中の粒子の動径方向の運動を与えるシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\Delta + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r}\right)\psi(r) = -\frac{1}{4n^2}\psi(r) \quad (16)$$

左辺の  $1/r$  がクーロンポテンシャルであり、角度方向の運動の影響は  $1/r^2$  に比例する遠心力ポテンシャルとして現れている。3次元空間のラプラシアン of 極座標での表式を用いれば、次のようになる。

$$\left(-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{4n^2}\right)\psi(r) = 0. \quad (17)$$

この方程式の解はラゲール陪多項式 (associated Laguerre polynomials) を用いて表すことができる。

ラゲール陪多項式を定義するために、まずラゲール多項式 (Laguerre polynomials) を定義する必要がある。ラゲール多項式は次の微分方程式の解である。

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \quad (18)$$

次の積分がこの解を与えていることが簡単に確認できる。

$$y = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{e^{-x\frac{z}{1-z}}}{1-z}. \quad (19)$$

実際これを (18) に代入すると、左辺は次のようになる。

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d}{dz} \left[ -\frac{1}{z^n} \frac{e^{-x\frac{z}{1-z}}}{1-z} \right] dz \quad (20)$$

従って、積分経路が閉じてさえいれば、微分方程式の解になっている。

特に、積分経路として原点を反時計周りに一周するものを取ったとき得られる関数をラゲール多項式といい、 $L_n(x)$  と表す。

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z=0} \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{e^{-x\frac{z}{1-z}}}{1-z}. \quad (21)$$

(21) は次の式が成り立つことを意味する。

$$g(x, z) := \frac{e^{-x\frac{z}{1-z}}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n(x). \quad (22)$$

変数変換  $z = 1 - x/s$  によって  $z$  を  $s$  で書き換えれば式 (21) は次のようになる。

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint_{s=x} \frac{s^n e^{-s} ds}{(s-x)^{n+1}}. \quad (23)$$

これは、 $s^n e^{-s}$  を  $s = x$  の周りでテイラー展開したときの  $n$  次の係数を与える。このことから、次のロドリゲスの公式が得られる。

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^n e^{-x}) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dx} - 1 \right)^n x^n. \quad (24)$$

この式より、 $L_n(x)$  は  $n$  次の多項式であることがわかる。微分を実行すれば、次の式を得る。

$$L_n(x) = \sum_r \frac{n!}{(n-r)!(n-r)!r!} (-x)^{n-r}. \quad (25)$$

ラゲール陪多項式は次の式によって定義される。<sup>1</sup>

$$L_n^k(x) = \left( -\frac{d}{dx} \right)^k L_{n+k}(x). \quad (26)$$

$L_n(x)$  が  $n$  次多項式であるから、 $L_n^k(x)$  も  $n$  次多項式であることがわかる。具体的には、次のように与えられる。

$$L_n^k(x) = \sum_r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(n-r)!r!} (-x)^{n-r}. \quad (27)$$

ラゲール陪多項式の母関数はラゲール多項式の母関数を微分することで得ることができる。

$$g_k(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^k(x) = \frac{e^{-x \frac{z}{1-z}}}{(1-z)^{k+1}}. \quad (28)$$

母関数を用いるか、ラゲール多項式の満たす微分方程式を用いるかすることで、 $L_n^k(x)$  が次の式を満たすことを示すことができる。

$$x L_n^{k''} + (k+1-x) L_n^{k'} + n L_n^k = 0. \quad (29)$$

次の内積を計算してみよう。

$$\int_0^{\infty} x^{k+p} e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(y) dx \quad (30)$$

母関数を用いればよい。

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{k+p} e^{-x} g_k(x, u) g_k(x, v) dx &= \int_0^{\infty} x^{k+p} \frac{e^{-x \frac{1-uv}{(1-u)(1-v)}}}{(1-u)^{k+1} (1-v)^{k+1}} dx \\ &= \frac{(1-u)^p (1-v)^p}{(1-uv)^{k+p+1}} \int_0^{\infty} t^{k+p} e^{-t} dt \\ &= (k+p)! \frac{(1-u)^p (1-v)^p}{(1-uv)^{k+p+1}}. \end{aligned} \quad (31)$$

---

<sup>1</sup>ここでの定義は Mathematica の `LaguerreL[n, k, x]` と同じものを採用した。

これを  $u$  と  $v$  についてテイラー展開することで、(30) を得ることができる。例えば、 $m = n$ 、 $p = 1$  に対しては次の式が成り立つ。

$$\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x} (L_n^k(x))^2 dx = (k + 2n + 1) \frac{(k + n)!}{n!}. \quad (32)$$

ラゲール陪多項式を (17) の解と関係させるために、次の関数を定義してみよう。

$$f_{n,l}(x) = x^l e^{-\frac{x}{2}} L_{n-l-1}^{2l+1}(x). \quad (33)$$

この関数を用いて微分方程式 (29) を書き換えれば、

$$f_{n,l}'' + \frac{2}{x} f_{n,l}' + \left( -\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{n}{x} - \frac{1}{4} \right) f_{n,l} = 0. \quad (34)$$

さらに、動径座標をリスケールすることで関数  $\psi_{n,l}$  を次のように定義する。

$$\psi_{n,l}(r) = f_{n,l}\left(\frac{r}{n}\right) \quad (35)$$

この関数は次の微分方程式を満足する。

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \psi_{n,l}')' + \left( -\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{4n^2} \right) \psi_{n,l} = 0. \quad (36)$$

これはシュレーディンガー方程式 (17) に他ならない。(36) を用いれば、次の直交関係を示すことができる。

$$\int_0^\infty r^2 \psi_{n,l}(r) \psi_{\bar{n},l}(r) dr = 0 \quad (n \neq \bar{n}) \quad (37)$$

さらに、 $n = \bar{n}$  の場合には

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^2 (\psi_{n,l}(r))^2 dr &= n^3 \int_0^\infty x^2 (f_{n,l}(x))^2 dx \\ &= n^3 \int_0^\infty x^{2l+2} e^{-x} (L_{n-l-1}^{2l+1}(x))^2 dx \\ &= 2n^4 \frac{(n+l)!}{(n-l-1)!} \end{aligned} \quad (38)$$

が得られる。最後に (32) を用いた。

## 6 偏微分方程式

ここでは、2次元、3次元の線形偏微分方程式についての基本的な事柄について述べる。

### 6.1 偏微分方程式の種類

偏微分方程式にはいろいろな種類がある。座標変数を  $x_i$ 、求めたい関数を  $y(x_i)$  とする。ここでは以下の条件を満たすものについて考える。

- 線形

方程式が  $y$  およびその微分の二次以上の項を含まない。この場合、重ね合わせの原理が有効である。

- 二階

$y$  の二階微分までを含む。

以上の条件を満足する方程式の一般形は

$$\sum_{i,j} f_{ij} \partial_i \partial_j y + \sum_i g_i \partial_i y + hy = s \quad (39)$$

$f_{ij}$ 、 $g_i$ 、 $h$ 、 $s$  はいずれも  $x_i$  の関数である。ここではすべて実数であると仮定する。さらに以下のように分類することができる。

- 斉次、非斉次

$p = 0$  のとき、 $y$  についての次数が全ての項で等しい（1次）ので、斉次微分方程式と呼ぶ。 $p \neq 0$  である場合には非斉次微分方程式と呼ぶ。

- 楕円型、放物型、双曲型

$f_{ij}$  は対称行列であるから、実固有値を持つ。それらが同負号である場合は楕円型、正負両方を含む場合には双曲型と呼ばれる。0と正、または0と負の固有値を含む場合には放物型と呼ばれる。

### 6.2 ディリクレ問題

平面上（ここで述べることは任意の次元で成り立つが、ここでは2次元の場合で考える。）のある有限な領域  $R$  の境界  $\partial R$  における値  $u|_{\partial R}$  が決められているときに、 $u$  に対する微分方程式の解を求める問題は、ディリクレ問題と呼ばれる。

平面上の実関数  $u$  が楕円型の微分方程式である、ポアソン方程式

$$\nabla^2 u = \rho \quad (40)$$

を満たすとしよう。 $u$  には境界条件

$$u|_{\partial R} = f \quad (41)$$

が課されているとする。ただし  $f$  は  $R$  の境界上の関数である。

実は、この解はただ一つであることが以下のように示される。

$u_1$  と  $u_2$  を二つの解とする。これらが必ず一致することを示す。そのために差  $u_{12} = u_1 - u_2$  を定義する。明らかに、 $u_{12}$  は次の条件を満足する。

$$\nabla^2 u_{12} = 0, \quad u_{12}|_{\partial R} = 0. \quad (42)$$

このとき、次の式が成り立つ。

$$0 = \int_R u_{12} \nabla^2 u_{12} d^2x = - \int (\nabla u_{12})^2 \quad (43)$$

右辺の被積分関数は負にはならないから、積分が 0 になるためには次の式が成り立つ必要がある。

$$\nabla u_{12} = 0. \quad (44)$$

つまり  $u_{12}$  は定数である。さらに、 $\partial R$  において 0 になることから、 $u_{12} = 0$  であることが結論される。

# 物理数学第二 第 13 回

2016 年 1 月 19 日

## 目 次

6 偏微分方程式	1
6.3 変数分離法 . . . . .	1
6.4 グリーン関数 . . . . .	4
6.5 波動方程式 . . . . .	6

## 6 偏微分方程式

### 6.3 変数分離法

変数分離法は斉次方程式を解くための重要な方法である。以下では具体的な例として方程式  $\Delta u = \alpha u$  を幾つかの座標系で解くことを考えよう。

二次元の直交座標での微分方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha u \quad (1)$$

となる。これを解くために、 $u(x, y)$  が次のように  $x$  だけの関数  $X(x)$  と  $y$  だけの関数  $Y(y)$  の積であるとしてみよう。

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2)$$

これを (1) に代入し、両辺を  $XY$  で割ると

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \alpha \quad (3)$$

が得られる。この式が成立するためには、それぞれの項が  $x$  にも  $y$  にも依存しない定数でなければならない。そこで次のようにおく。

$$\frac{X''}{X} = c, \quad \frac{Y''}{Y} = \alpha - c. \quad (4)$$

こうして、偏微分方程式 (1) は次の二つの常微分方程式に帰着された。

$$X'' = cX, \quad Y'' = (\alpha - c)Y. \quad (5)$$

これらは簡単に解く事ができる。

(1) の一般解は必ずしも (2) の形をしているとは限らない。一般の解は (2) の形の解の線形結合として得られる。

$$u(x, y) = \sum_i X_i(x) Y_i(y). \quad (6)$$

具体的な例として、次の問題を考える。

$$\Delta u = 0 \quad (0 < x < L, 0 < y), \quad u = 0 \quad (\text{boundary}) \quad (7)$$

これを解くために、それぞれの  $y$  の値について  $u(x, y)$  を  $x$  の関数とみなしてフーリエ展開しよう。

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \sin \frac{\pi n}{L} x. \quad (8)$$

これを  $\Delta u = 0$  に代入すると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 a_n(y) + a_n''(y) \right\} \sin \frac{\pi n}{L} x = 0. \quad (9)$$

よって、展開係数  $a_n(y)$  は次の微分方程式を満たす必要がある。

$$- \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 a_n(y) + a_n''(y) = 0 \quad (10)$$

$u$  が (7) に与えられた境界条件を満たすためには、 $a_n(0) = 0$  でなければならない。この条件を満たす解は次の通りである。

$$a_n(y) = b_n \sinh \frac{\pi n}{L} y. \quad (11)$$

従って、 $u(x, y)$  に対する一般解は次のように与えられる。

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{L} x \sinh \frac{\pi n}{L} y. \quad (12)$$

これは確かに (6) の形をしている。

次に、 $\Delta u = \alpha$  を極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (13)$$



を用いて解いてみよう。微分方程式は次のようになる。

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u = \alpha u. \quad (14)$$

これを次のように書き換えると、変数分離できることがわかる。

$$\left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \alpha r^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u = 0. \quad (15)$$

ここで、 $u(r, \theta) = R(r) + \Theta(\theta)$  と置けば、微分方程式を次の二つの方程式に分解することができる。

$$\begin{aligned} \left( r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \alpha r^2 \right) R &= \lambda R, \\ \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta &= -\lambda \Theta. \end{aligned} \quad (16)$$

二番目の式は  $\Theta = e^{in\theta}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) を解に持ち  $\lambda = n^2$  である。このとき、一つ目の式は Bessel の微分方程式となる。

3 次元の極座標

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (17)$$

を用いて微分方程式  $\Delta u = \alpha u$  を用いると、

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] u = \alpha u. \quad (18)$$

これを次のように書き換える。

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \alpha r^2 \right) + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] u = 0. \quad (19)$$

左辺の演算子の前半部分は動径座標  $r$  のみを、後半部分は角度座標  $\theta$  と  $\phi$  のみを含む。よって、解を次のように置くことができる。

$$u = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (20)$$

微分方程式は次の二つに分解される。

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - \alpha r^2 \right) R(r) &= \lambda R(r), \\ \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) Y(\theta, \phi) &= -\lambda Y(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (21)$$

一つ目は常微分方程式である。二つ目の偏微分方程式はさらに次のように書き換えられる。

$$\left[ \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda \sin^2 \theta \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta, \phi). \quad (22)$$

従って次のように変数分離できる。

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (23)$$

次の二つの微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \lambda \sin^2 \theta \right) \Theta(\theta) &= \mu \Theta(\theta), \\ \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi(\phi) &= -\mu \Phi(\phi). \end{aligned} \quad (24)$$

これらはどちらも常微分方程式である。

(24) の二つ目の解は  $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$  であり、 $\mu = m^2$  が得られる。これを (24) の一つ目の式に代入するとルジャンドルの微分方程式になり、 $\lambda = l(l+1)$  が得られる。これを (21) の一つ目に代入すればベッセルの微分方程式が得られる。

## 6.4 グリーン関数

次の非斉次微分方程式を考えよう。

$$Du = \rho \quad \text{in } R, \quad u|_{\partial R} = f. \quad (25)$$

ただし  $D$  は線形微分演算子であり、 $f$  は領域  $R$  の境界上で与えられた関数である。

これらを満足する二つの解  $u_1$  と  $u_2$  があるとしよう。それらの差  $v = u_1 - u_2$  は次の方程式を満たす。

$$Dv = 0 \quad \text{in } R, \quad v|_{\partial R} = 0. \quad (26)$$

よって、次の関係が成り立つ。

$$\text{非斉次方程式の一般解} = \text{非斉次方程式の特殊解} + \text{斉次方程式の一般解} \quad (27)$$

従って、非斉次方程式については何らかの方法で特殊解を求めればよい。

例として次のポアソン方程式を考えよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho(x, y) \quad (28)$$

$\rho$  が電荷密度を表し、 $u$  はポテンシャルを与えているとみなすことができる。

$\rho$  によって与えられる電荷分布全体によって生じるポテンシャルは、各点に存在する電荷の生じるポテンシャルを足し合わせるによって得られる。各点の電荷の影響は次の式を解くことによって得られる。

$$\Delta u = -\delta(\mathbf{r}_0^r) \quad (29)$$

このような方程式の解はグリーン関数と呼ばれる。この解を  $u(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  とおく。すると、(28) 解は

$$u = \int d\mathbf{r}_0 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) \quad (30)$$

と与えられる。

対称性より

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (31)$$

と置くことができる。 $\mathbf{r}_0$  を原点にとると、

$$\Delta G(r) = -\delta(\mathbf{r}). \quad (32)$$

両辺を半径  $R$  の球で積分すると、

$$\int \nabla^2 G(r) = -1. \quad (33)$$

ガウスの定理を用いると、右辺は

$$\int d\mathbf{S} \cdot \nabla G(r) = 4\pi R^2 G'(R). \quad (34)$$

従って

$$G'(r) = -\frac{1}{4\pi r^2}. \quad (35)$$

積分して、無限遠方で 0 とおけば

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r} \quad (36)$$

が得られる。

フーリエ変換を用いて計算するのも便利である。

$$G(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{k} \tilde{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (37)$$

によってフーリエ変換を行えば、微分方程式は次のように書き換えることができる。

$$-k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^2}. \quad (38)$$

これより

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2 k^2} \quad (39)$$

が得られ、フーリエ変換を行えば (36) が得られる。

別の例として長方形  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  のうえでグリーン関数を計算してみよう。 $u(x, y)$  を次のようにフーリエ展開する。

$$u(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \quad (40)$$

微分すると、

$$\Delta u(x, y) = - \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \quad (41)$$

これを、デルタ関数の展開式

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} d_{m,n} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y. \quad (42)$$

$$d_{m,n} = \frac{4}{ab} \sin \frac{\pi m}{a} x_0 \sin \frac{\pi n}{b} y_0. \quad (43)$$

と比較すると、

$$c_{m,n} = \frac{d_{m,n}}{\left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2} \quad (44)$$

が得られ、これをもとの展開式に代入すればグリーン関数が得られる。

## 6.5 波動方程式

双曲型の微分方程式の例として波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (45)$$

を考えてみよう。微分演算子を因数分解することで次のように書き換えられる。

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \quad (46)$$

これは、次のどちらかが成り立てば解になる。一般解は次のように与えられる。

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (47)$$

解は二つの任意関数によって与えられているから、解を一意的に決めるためには二つの境界条件を与えることが必要になる。例えば、 $t = 0$  において次の二つの条件を課すと解が一つに定まる。

$$u(x, 0) = a(x), \quad u'(x, 0) = b(x). \quad (48)$$

これを満たす解は次のように与えられる。(ダランベールの解)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[a(x - vt) + a(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} b(x) dx. \quad (49)$$

グリーン関数のテクニックは波動方程式の場合にも有効である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta(x)\delta(t) \quad (50)$$

この解は一通りではなくどのような境界条件を取るかに依存する。 $t < 0$  において 0 になるような解は

$$G(x, t) = -\frac{v}{2}\theta(vt - |x|) \quad (51)$$

である。これは遅延グリーン関数 (retarded Green's function) という。 $t < 0$  において 0 になるような解は

$$G(x, t) = -\frac{v}{2}\theta(-vt - |x|) \quad (52)$$

である。これは先進グリーン関数 (advanced Green's function)

フーリエ変換を用いてこれらのグリーン関数を表しておくことも有益である。フーリエ変換によって、微分方程式は次のように書き換えられる。

$$-\left(k^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) \tilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^2}. \quad (53)$$

従って

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk d\omega \frac{e^{ikx - i\omega t}}{\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k^2\right)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk d\omega e^{ikx - i\omega t} \frac{v}{2k} \left( \frac{1}{\omega - vk} - \frac{v}{\omega + vk} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

$\omega$  積分についてみる。この積分は  $\omega = \pm vk$  にある極をどのように避けるかに依存する。上側に避けると、遅延グリーン関数を、下側に避けると、先進グリーン関数が得られる。

# 物理数学第二 第 14 回

2016 年 1 月 26 日

## 目 次

7 ラプラス変換	1
7.1 定義	1
7.2 例	3
7.3 基本的な公式	4

## 7 ラプラス変換

### 7.1 定義

フーリエ変換

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} f(x) dx \quad (1)$$

において、積分が収束しないときに積分経路を少しだけ実軸からずらすことが有効である場合があった。

例えばステップ関数

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \quad (2)$$

に対するフーリエ変換は、次のように  $k$  にわずかな虚部を与えることで収束させることができる。

$$F(k - i\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ikx} e^{-\epsilon x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ik + \epsilon} \quad (3)$$

( $k = 0$  の場合には特別な配慮が必要であるが、それ以外の場合には)  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を取ることで  $F(k) = 1/(2\pi ik)$  を得ることができる。

ここで用いた、 $k$  の積分経路を実軸からずらす、という手法をより大胆に用いるのがラプラス変換である。

ある関数  $f(x)$  が  $x$  の大きいところで  $f(x)e^{cx}$  のように振舞うとしよう。 $c$  はある実数であり、関数  $f(x)$  の増加指数と呼ばれる。 $c \geq 0$  であれば通常のフーリエ変換の積分は収束しないが、次のように  $k$  に虚部  $a > c$  を与えることで  $x \rightarrow +\infty$  の側の積分が収束するようにできる。

$$F(k - ia) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - ax} f(x) dx \quad (4)$$

ただし、 $e^{-ax}$  という因子は  $x \rightarrow -\infty$  で発散するために、 $x$  の負の側の収束性は悪化している。そこで、ここでは  $x < 0$  において  $f(x) = 0$  であることを仮定しよう。そのような関数に対して、(4) によって定義される変換をラプラス変換と呼ぶ。

(4) の変換は、関数  $e^{-ax} f(x)$  に対する通常のフーリエ変換の式と同じであるから、逆変換は次のように与えられる。

$$e^{-ax} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k - ia) e^{ikx} dk. \quad (5)$$

つまり、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k - ia) e^{i(k-ia)x} dk. \quad (6)$$

これが逆変換の式である。

通常は、 $a + ik$  や  $F(k - ia)$  の代わりに、以下のものが用いられる。

$$s = a + ik, \quad L(s) = 2\pi F(-is) = 2\pi F(k - ia). \quad (7)$$

これらを用いれば、ラプラス変換およびその逆変換の式は次のように書くことができる。

$$L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(s) e^{sx} ds. \quad (9)$$

それぞれの積分についてコメントしておこう。

まず、(8) の積分は  $(-\infty, +\infty)$  の範囲でとっているが、 $x < 0$  では  $f(x) = 0$  であるから、 $(0, +\infty)$  にしても同じことである。

(9) の積分は、複素  $s$  平面上で、 $\operatorname{Re} s = a$  の直線上を下から上へ行う。

## 7.2 例

ラプラス変換の例を幾つか見ておこう。

$$f(x) = \begin{cases} e^{cx} & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (10)$$

この場合には

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} dx = \frac{1}{s-c} \quad (11)$$

となる。実際に積分が収束するのは  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$  であるが、それ以外の  $s$  に対しても解析接続によって定義されているとする。

逆変換は積分が収束する  $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$  の領域を下から上へ走る線で行う。この積分経路の左側に  $s = c$  の極が存在している。 $x$  が正の場合と負の場合に場合わけをして積分を行うと、もとの  $f(x)$  が得られることがわかる。

通常ラプラス変換では  $x < 0$  のところで  $f(x) = 0$  の関数を扱うが、 $x < 0$  における収束性が十分よければ、0 にならなくても同様の変換を行うことができる。例えば、次の場合を考えてみよう。

$$f(x) = \begin{cases} e^{cx} & (x > 0) \\ e^{c'x} & (x < 0) \end{cases} \quad (12)$$

もし  $\operatorname{Re} c < \operatorname{Re} c'$  であれば

$$\operatorname{Re} c < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} c' \quad (13)$$

を満たす  $s$  に対してラプラス変換の積分が収束し、

$$L(s) = \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s-c'} \quad (14)$$

を得る。逆変換は帯状の領域 (13) 内を走る経路上で行うことにより、もとの関数 (12) が得られることも分かる。

このように、 $x < 0$  でも 0 にならないような関数に対してもラプラス変換に似たものを考えることはできるが、以下では常に  $x < 0$  では 0 になる関数のみを考えることにしよう。

$$f(x) = \begin{cases} x^n & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (15)$$



に対しては

$$L(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (16)$$

が得られる。

$$f(x) = \delta(x - x_0) \quad (17)$$

に対しては

$$L(s) = e^{-sx_0} \quad (18)$$

が得られる。

### 7.3 基本的な公式

ラプラス変換はフーリエ変換の変形なので、フーリエ変換と良く似た性質が成り立つ。関数  $f(x)$  のラプラス変換を  $\mathcal{L}[f]$  と表すことにしよう。すなわち

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx. \quad (19)$$

線形性

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f + g] &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g], \\ \mathcal{L}[af] &= a\mathcal{L}[f]. \end{aligned} \quad (20)$$

微分

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] \quad (21)$$

これは以下のように部分積分を用いて示すことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-sx})' f(x) dx \\ &= s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= s\mathcal{L}[f]. \end{aligned} \quad (22)$$

注意 !!

ここでは  $x < 0$  において  $f(x) = 0$  を仮定しているが、非常にしばしば  $x < 0$  において  $f(x) = 0$  を仮定せず、代わりに (19) の積分範囲を  $-\infty$  からではなく 0 からにとることでラプラス変換を定義することがある。つまり、 $\theta(x)f(x)$  のラプラス変換のことを単に  $f(x)$  のラプラス変換として定義する場合がある。この定義によるラプラス変換を  $\overline{\mathcal{L}}[f]$  と表すことにしよう。すなわち

$$\overline{\mathcal{L}}[f] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \mathcal{L}[\theta f]. \quad (23)$$

このように定義されるラプラス変換では微分に対する公式が異なる。

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}[f'](s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} s e^{-sx} f(x) dx + [e^{-sx} f(x)]_0^{\infty} \\ &= s \overline{\mathcal{L}}[f](s) - f(0). \end{aligned} \quad (24)$$

あるいは、つぎのように示してもよい。

$$\overline{\mathcal{L}}[f'] = \mathcal{L}[\theta f'] = \mathcal{L}[(\theta f)'] - \mathcal{L}(\theta' f) = s \mathcal{L}[\theta f] - f(0) \mathcal{L}(\delta) = s \overline{\mathcal{L}}[f] - f(0). \quad (25)$$

$x$  との積について次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[x^n f] = \left(-\frac{d}{ds}\right)^n \mathcal{L}[f]. \quad (26)$$

積分

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (27)$$

について次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[F] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f]. \quad (28)$$

畳み込み

$$h = f * g \quad (29)$$

すなわち

$$h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \quad (30)$$

に対して次の式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]. \quad (31)$$

# 物理数学第二 第 15 回

2016 年 2 月 2 日

## 目 次

7	ラプラス変換	1
7.4	ラプラス変換の応用 . . . . .	1
8	その他の話題	2
8.1	シュツルム・リウビル型微分方程式 . . . . .	2
8.2	超幾何関数 . . . . .	2

## 7 ラプラス変換

### 7.4 ラプラス変換の応用

ラプラス変換の応用例として次の問題を解いてみよう。

問題

ばね定数  $k$  のばねにつながれており、時刻  $t = 0$  までは位置  $x = 0$  に静止している質量  $m$  の質点に対して、 $t \geq 0$  において外力  $A \sin(\omega t)$  が加わることで運動が始まる状況を考える。 $t \geq 0$  における質点の運動を求めよ。

ラプラス変換を用いた解答は以下の通り。

運動方程式は次の通りである。

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + A \sin(\omega t) \quad (1)$$

それぞれの項のラプラス変換は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &\rightarrow ms^2 X(s), \\ kx(t) &\rightarrow kX(s), \\ A \sin(\omega t) &\rightarrow \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

従って運動方程式が以下のように書き換えられる。

$$ms^2X(s) = -kX(s) + \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

これより  $X(s)$  は直ちに次のように求まる。

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{m} \frac{\omega}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{A}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、固有振動数を  $\omega_0^2 = k/m$  によって定義した。これを逆変換によって  $t$  の関数に戻せば次の解が得られる。

$$x(t) = \frac{A}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]. \quad (5)$$

## 8 そのほかの話題

### 8.1 シュツルム・リウビル型微分方程式

省略

### 8.2 超幾何関数

省略