２０１２年度 量子力学第二 中間試験 (2012/5/29)

注意

- 計算用紙２枚、答案用紙１枚
- 開始して３０分経ったら退室して結構です。
- 答えが合っていれば導出過程は不要です。間違っていた場合には採点の参考にしますが、要点のみを簡潔に記してください。

1 箱の中の粒子

一片が L の立方体の箱の中にある質量 m の粒子を量子力学的に扱う。ポテンシャルは

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{x}) &= 0, \quad (0 \leq x, y, z \leq L) \\ U(\boldsymbol{x}) &= \infty, \quad (\text{その他}) \end{aligned} \tag{1}$$

である。

1-1 時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

[解答]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(\boldsymbol{x})\right]\psi(\boldsymbol{x}) = E\psi(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

$U(\boldsymbol{x})$ が無いものも正解にしました。

1-2 基底状態の規格化された波動関数を書け。

[解答]

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right), \quad (0 \leq x, y, z \leq L) \\ \psi(\boldsymbol{x}) &= 0, \quad (\text{その他}) \end{aligned} \tag{3}$$

箱の外側の波動関数を与えていないものも正解にしました。基底状態ではなく、一般の状態の波動関数を与えた場合には減点しています。

1-3 基底状態のエネルギーを求めよ。

[解答]

$$E = \frac{3}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2 \tag{4}$$

基底状態ではなく、一般の状態の波動関数を与えた場合には減点しています。

2 水素原子

2-1 次の 3 つの量を用いて、長さの次元を持つ量 a_0（ボーア半径）とエネルギーの次元を持つ量 E_0 を作れ。

$$s = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad \hbar, \quad m \tag{5}$$

m は電子と陽子の換算質量であり、ほぼ電子質量に等しい。

[解答]

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{ms}, \quad E_0 = \frac{ms^2}{\hbar^2}. \tag{6}$$

数係数は正の実数であれば何でもいいです。

2-1 水素原子の基底状態の波動関数は極座標で次のように与えられる。

$$\psi = c\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right). \tag{7}$$

c は規格化の定数である。この基底状態における r^2 の期待値を求めよ。

[解答]

$$\langle r^2 \rangle = 3a_0^2 = 3\pi a_0^5 |c|^2 \tag{8}$$

$c = 1/\sqrt{\pi a_0^3}$ です。極座標の体積積分は $\int 4\pi r^2 (\cdots) dr$ です。次元が合っているものは 5 点。$4\pi r^2$ の因子を忘れて単に $\int r^2 |\psi|^2 dr$ を計算している場合には 0 点。

2-3 主量子数 n が 3 である全ての状態を $|n, l, m\rangle$ の形で与えよ。（スピンは考慮しなくてよい。）

[解答]

$$\begin{aligned} &|3,0,0\rangle, \\ &|3,1,1\rangle, \quad |3,1,0\rangle, \quad |3,1,-1\rangle, \\ &|3,2,2\rangle, \quad |3,2,1\rangle, \quad |3,2,0\rangle, \quad |3,2,-1\rangle, \quad |3,2,-2\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

過不足なく正解で 10 点、それ以外は $\max(\text{正解} - \text{不正解}, 0)$。$l = 3$ の状態まで書いてしまった場合は減点 -3 にしています。

3　角運動量代数

$\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ を角運動量演算子とする。これらは次の交換関係を満足する。

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y. \tag{10}$$

状態 $|j, m\rangle$ を次の関係式を満足するものとして定義する。

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle, \quad \langle j, m|j, m\rangle = 1. \tag{11}$$

さらに $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ を定義する。以下の問いに答えよ。（$\hbar = 1$ としてよい。）

3-1 $[\hat{J}_z, \hat{J}_+]$ を計算せよ。

[解答]

$$\hat{J}_+ \tag{12}$$

3-2 $\hat{J}_-$ と $\hat{J}_+$ の積 $\hat{J}_-\hat{J}_+$ を $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ と $\hat{J}_z$ を用いて表せ。

[解答]

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_z(\hat{J}_z + 1) \tag{13}$$

3-3 次の関係式の $c_{j,m}$ を求めよ。

$$\hat{J}_+|j, m\rangle = c_{j,m}|j, m+1\rangle \tag{14}$$

ただし $c_{j,m}$ は 0 または正の実数とする。

[解答]

$$c_{j,m} = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \tag{15}$$

3-4 次の行列要素を求めよ。

$$\langle j, m+1|\hat{J}_x|j, m\rangle, \quad \langle j, m+1|\hat{J}_y|j, m\rangle, \quad \langle j, m+1|\hat{J}_z|j, m\rangle. \tag{16}$$

[解答]

$$\langle j, m+1|\hat{J}_x|j, m\rangle = \frac{c_{j,m}}{2}, \quad \langle j, m+1|\hat{J}_y|j, m\rangle = \frac{c_{j,m}}{2i}, \quad \langle j, m+1|\hat{J}_z|j, m\rangle = 0. \tag{17}$$