量子力学第一 ２０１１年度期末試験

注意

- 計算用紙２枚、答案用紙１枚
- 開始して３０分経ったら退室して結構です。
- 答えが合っていれば導出過程は不要です。間違っていた場合には採点の参考にしますが、要点のみを簡潔に記してください。

1 井戸型ポテンシャル

井戸型ポテンシャル

$$U(x) = 0 \quad (|x| \leq a), \quad U(x) = +\infty \quad (|x| \geq a).$$

中の粒子を量子力学的に扱う。粒子の質量を m とする。

1-1 基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ を求めよ。全体の係数は、規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$ および $\psi_0(\frac{a}{10}) > 0$ によって決めること。

1-2 第一励起状態の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ。全体の係数は、規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x)|^2 dx = 1$ および $\psi_1(\frac{a}{10}) > 0$ によって決めること。

1-3 波動関数 $\psi(x) = (\psi_0(x) + \psi_1(x))/\sqrt{2}$ によって表わされる状態に対して座標 x の期待値を求めよ。

2 階段型ポテンシャル

ポテンシャル

$$U(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad U(x) = U_0 \quad (x \geq 0)$$

に質量 m の粒子を x の負の側から入射させた場合の透過、散乱について考える。$U_0 < 0$ とする。入射波の波数を k、透過波の波数を k' とし、波動関数を次のようにおく。

$$\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx} \quad (x \leq 0), \quad \psi(x) = Be^{ik'x} \quad (x \geq 0)$$

2-1 k と k' の関係を与えよ。

2-2 係数 A を k と k' を用いて表わせ。

2-3 透過率を k と k' を用いて表わせ。

3　調和振動子

ばね定数 k の調和振動子について考える。シュレーディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{k}{2}x^2\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

である。

3-1 適当な変数変換 $x=cy$ を行うことによりシュレーディンガー方程式を次のように書き換える。

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}y^2\right)\psi(y)=\lambda\psi(y)$$

定数 c を求めよ。

3-2 昇降演算子

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y+\frac{d}{dy}\right),\quad \hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{d}{dy}\right)$$

を用いて 3-1 のシュレーディンガー方程式を書き換えよ。

3-3 第一励起状態の波動関数 $\psi_1(y)$ を y 座標を用いて与えよ。規格化は行わなくてよい。

4　ビリアル定理

ハミルトニアン

$$\hat{H}=\hat{K}+\hat{U},\quad \hat{K}=\frac{\hat{p}^2}{2m},\quad \hat{U}=a|\hat{x}|^n,\quad (n>0,a>0).$$

によって表わされる系を考える。演算子 $\hat{D}=\hat{x}\hat{p}/(i\hbar)$ を定義する。

4-1 交換関係 $[\hat{D},\hat{K}]$ を計算せよ。

4-2 交換関係 $[\hat{D},\hat{U}]$ を計算せよ。

4-3 エネルギー固有状態 $|\psi\rangle$ に対して $[\hat{D},\hat{H}]=[\hat{D},\hat{K}]+[\hat{D},\hat{U}]$ の両辺の期待値を計算することにより $\hat{K}$ と $\hat{U}$ の期待値の比 $\frac{\langle\psi|\hat{U}|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{K}|\psi\rangle}$ を求めよ。