

$I = 2 \pi\pi$ 波動関数と散乱位相

佐々木 潔 (東工大)

石塚 成人 (筑波大)

[Reference : Phys. Rev. D 78 (2008) 014511]

背景

散乱位相 δ (ハドロン間相互作用の理解に重要な量)

⇒ 相互作用が斥力(引力)なら、その符合は負(正)

共鳴点において、 $\pi/2$ を横切る (⇒ 共鳴の質量と崩壊幅)

- * '91 Lüscher : 有限の箱における E 固有値と δ の関係
- * '95 Rummukainen and Gottlieb : 全運動量がゼロでない系への拡張
- related works ($I = 2 \ 2\pi$ 系) : Aoki *et al.* [CP-PACS], Phys.Rev.D67 (2003) 014502
Yamazaki *et al.* [CP-PACS], Phys.Rev.D70 (2004) 074513
Kim, Nucl.Phys.B (Proc.Suppl.)129&130 (2004) 197
Kim, Nucl.Phys.B (Proc.Suppl.)140 (2005) 381
Yamazaki [RBC], PoS LAT2006 (2006) 100
Li *et al.* [CLQCD], hep-lat/0703015

$I = 2 \ 2\pi$ 系

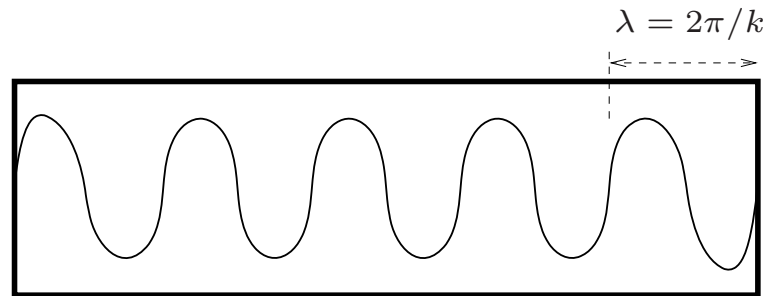
相互作用の性質が、実験的に良く知られている (⇒ 斥力)

格子計算は比較的簡単であり、シグナルも明瞭

有限体積公式と波動関数

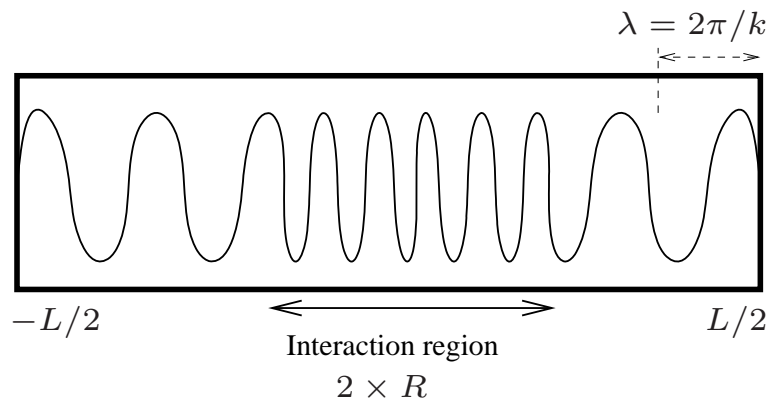
有限体積公式の導出において、2粒子波動関数は、中心的な役割りを果たす

Essence (1-dim. case) :



No interacting two-particle

$$kL = 2\pi \cdot n \quad (n \in \mathbf{Z})$$



Interacting two-particle

$$kL + \delta(k) = 2\pi \cdot n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

$\delta(k)$: phase shift in infinite volume

⇒ 相互作用距離 R は、 $L/2$ より小さくならない

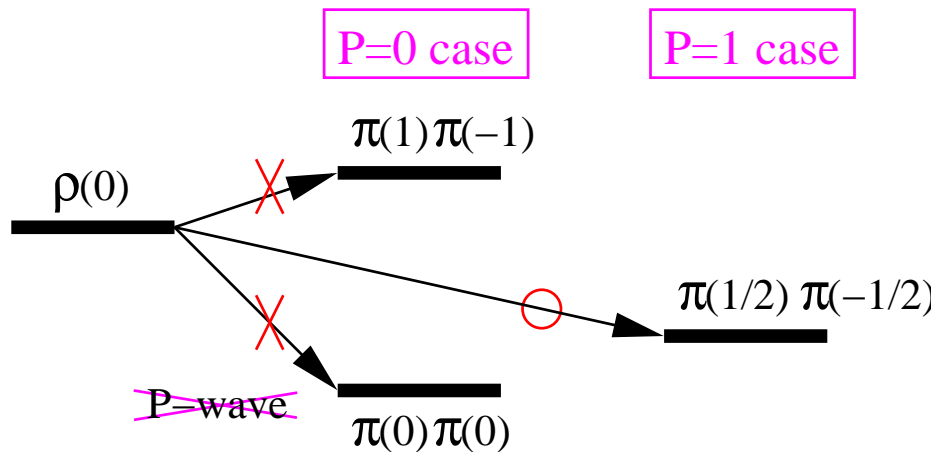
非ゼロ全運動量

全運動量の設定により、アクセス可能なエネルギー固有値を変更

- Ex.) Incident $\pi (p_1 = P) + \text{target } \pi (p_2 = 0)$
 \Rightarrow CM系では、 $\pm P/2\gamma$ の運動量で正面衝突する 2π
 $\Rightarrow k^2 = (P/2\gamma)^2 + \Delta$ (最低エネルギー固有状態に関して)

非ゼロ P を伴う方法は、元々、 ρ 中間子の崩壊チャンネルを開くために開発された

Rummukainen and Gottlieb, Nucl. Phys. B450 (1995) 397



現在の計算は、ほぼ物理点付近
(最小の m_π は 156 MeV.)

Aoki *et al.* [PACS-CS], arXiv:0807.1661 [hep-lat]

しかし、チャンネルは開いていない
 \Rightarrow 大体積か非ゼロ P が必要

動機

波動関数

- 格子上で計算可能か？
- その形は解析的に記述可能か？

相互作用距離

- 有限体積公式の必要条件は満たされているか？ ($R < L/2$?)

過去の仕事と本研究の位置づけ

- * '05 CP-PACS Collab. : $I = 2 \cdot 2\pi$ 波動関数 ($k^2 \sim 0$)
 \Rightarrow 散乱長 ($a_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \tan \delta_0(k)/k$)

本研究 : $I = 2 \cdot 2\pi$ 系の散乱位相のための $k^2 \neq 0$ への拡張
(有限の k^2 を実現するために、非ゼロ全運動量を導入した)

2π 波動関数 (infinite Minkowski)

$$\Psi(x_1; x_2) \equiv \langle 0 | \pi(x_1) \pi(x_2) | \pi(p_1) \pi(p_2); \text{in} \rangle$$

$$| \pi(p_1) \pi(p_2); \text{in} \rangle : 2\pi \text{ 漸近状態}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \Psi(x_1; x_2) \cdot e^{iP \cdot X} \quad \left(\begin{array}{l} X \equiv (x_1 + x_2) / 2, \quad x \equiv x_1 - x_2 \\ P \equiv p_1 + p_2 = (E, \mathbf{P}) \end{array} \right)$$

$-x^2 > R^2$ で、波動関数は次の式を満足する

$$\left(\partial_j^2 + m_\pi^2 \right) \Psi(x_1; x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\nabla^2 - (\mathbf{P} \cdot \nabla)^2 / E^2 + k^2 \right] \phi(x) = 0$$

$$\left(k^2 = P^2 / 4 - m_\pi^2 = (E^2 - \mathbf{P}^2) / 4 - m_\pi^2 \quad \text{or} \quad \sqrt{P^2} = \sqrt{E^2 - \mathbf{P}^2} = 2\sqrt{m_\pi^2 + k^2} \right)$$

2π 波動関数 (finite Euclidian)

$$\Psi^L(\mathbf{x}_1, \tau; \mathbf{x}_2, \tau) \equiv \langle 0 | \pi(\mathbf{x}_1, \tau) \pi(\mathbf{x}_2, \tau) | \pi\pi; E, \mathbf{P} \rangle$$

$| \pi\pi; E, \mathbf{P} \rangle : \text{有限体積における } (E, \mathbf{P}) \text{ 固有状態}$

$$\Rightarrow \phi^L(\mathbf{x}) = \Psi^L(\mathbf{x}_1, \tau; \mathbf{x}_2, \tau) \cdot e^{E\tau - i\mathbf{P} \cdot \mathbf{X}}$$

有限体積公式

$$C_{00}(k)b_{00}(k) [\alpha_0(k) \cdot j_0(k|\mathbf{x}|) + \beta_0(k) \cdot n_0(k|\mathbf{x}|)] + (\text{effects from } l > 0)$$

$$= \left[\frac{1}{\gamma L^3} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\mathbf{q}^2 - k^2} j_0(k|\mathbf{x}|) + \frac{k}{4\pi} n_0(k|\mathbf{x}|) \right] + (\text{effects from } l > 0)$$

Inf. Minkowski

Fin. Euclidian

Lab Frame

Simulation

Analytic Continuation @ $x^0 = x^4 = 0$ ($R < L/2$)

ϕ

ϕ^L

$$[\nabla^2 - (\mathbf{P} \cdot \nabla)^2 / E^2 + k^2] \phi(\mathbf{x}) = 0$$

$$[\nabla^2 - (\mathbf{P} \cdot \nabla)^2 / E^2 + k^2] \phi^L(\mathbf{x}) = 0$$

$$[E d_0 - \mathbf{P} \cdot \nabla] \phi(\mathbf{x}) = 0$$

$$\phi^L(\mathbf{x}) = (-1)^{L/(2\pi) \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}} \phi^L(\mathbf{x} + \mathbf{n}L)$$

Lorentz Transformation

Variable Change

$$x_{CM}^0 = \gamma (x^0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} = \hat{\gamma}[\mathbf{x}]$$

$$\mathbf{x}_{CM} = \hat{\gamma}[\mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot x^0]$$

$$\sum_{lm} C_{lm}(\mathbf{k}) \cdot Y_{lm}(\Omega) \phi_{CM}^{(lm)}(|\mathbf{x}|) = \phi_{CM}^L(\mathbf{x})$$

$$\phi_{CM}^L = \frac{1}{\gamma L^3} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\mathbf{q}^2 - k^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}$$

CM Frame

$$\phi_{CM} = \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) \cdot b_{lm}(\mathbf{k}) [\alpha_1(\mathbf{k}) j_1(k|\mathbf{x}|) + \beta_1(\mathbf{k}) n_1(k|\mathbf{x}|)]$$

$$[\nabla^2 + k^2] \phi_{CM}(\mathbf{x}) = 0$$

$$[\nabla^2 + k^2] \phi_{CM}^L(\mathbf{x}) = 0$$

$$d_0 \phi_{CM}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\phi_{CM}^L(\mathbf{x}) = (-1)^{L/(2\pi) \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}} \phi_{CM}^L(\mathbf{x} + \hat{\gamma}[\mathbf{n}]L)$$

数値計算の詳細

Plaquette gauge $\beta = 5.9$ (クエンチ近似)

Improved wilson $c_{SW} = 1.364$ ($a^{-1} = 1.63$ GeV)

Time extent $T = 120$ (Dirichlet 境界条件, ソース位置 $t_s = 20$)

Spatial size $L = 32$ (周期境界条件, $La = 3.9$ fm)

Total momenta $\mathbf{P} = \mathbf{0}, (2\pi/L)\mathbf{e}_x$ ($k^2 \simeq 0, (0.16)^2$ GeV²)

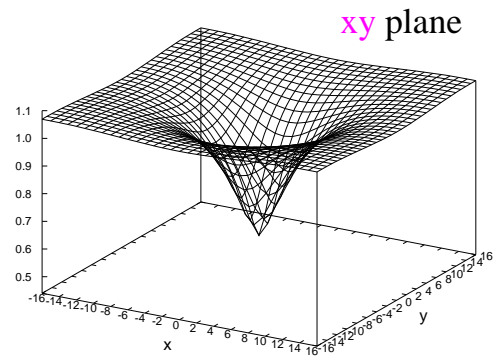
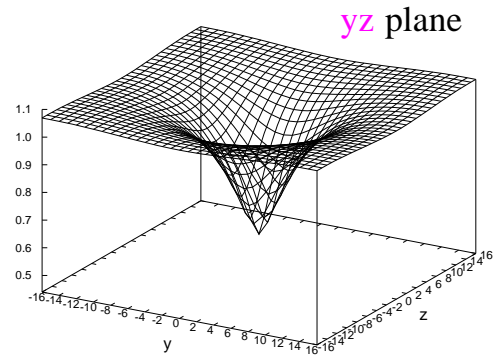
Quark mass parameters

κ	N_{conf}	m_π (GeV)	m_ρ (GeV)	m_π/m_ρ
0.1413	400	0.420	0.837	0.501
0.1410	212	0.488	0.860	0.568
0.1405	212	0.587	0.901	0.652

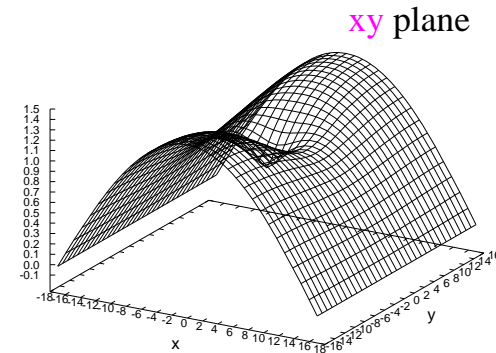
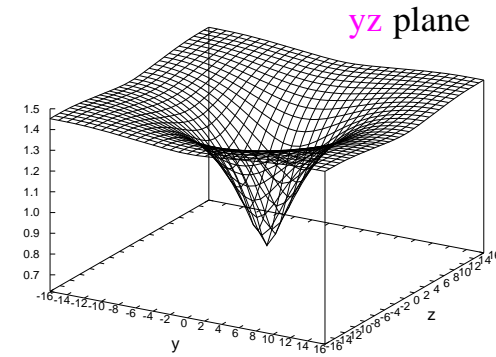
Computer VPP5000 @ 筑波大学学術情報センター

計算結果 (2π 波動関数 $\phi_{CM}^L(\mathbf{x})$)

$P = 0$



$P = (2\pi/L)\mathbf{e}_x$

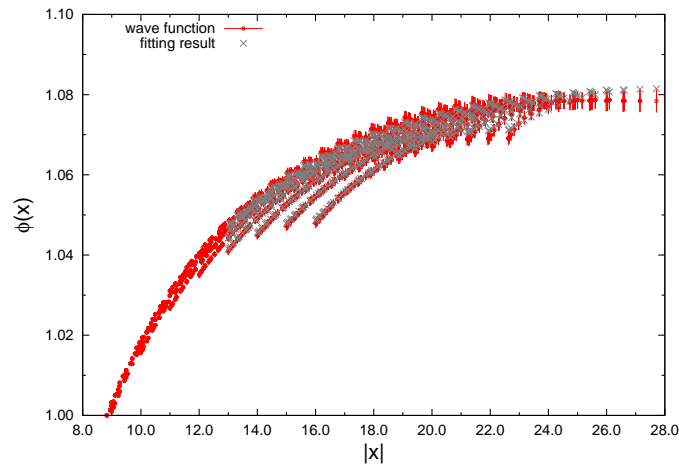


相互作用領域がない場合 : $P = 0$ では $\phi(\mathbf{x}) = \text{const.}$
 $P = (2\pi/L)\mathbf{e}_x$ では $\phi(\mathbf{x}) = c \cdot \cos(px)$ ($p = \frac{2\pi}{L}/2\gamma$)

⇒ 中心部のくぼみは、相互作用に起因している

$\phi^L(\mathbf{x})$ フィット

(a) $\mathbf{P} = 0$



$$\underline{m_\pi/m_\rho = 0.501}$$

$|\mathbf{x}| > R$ で、次の式によりフィット

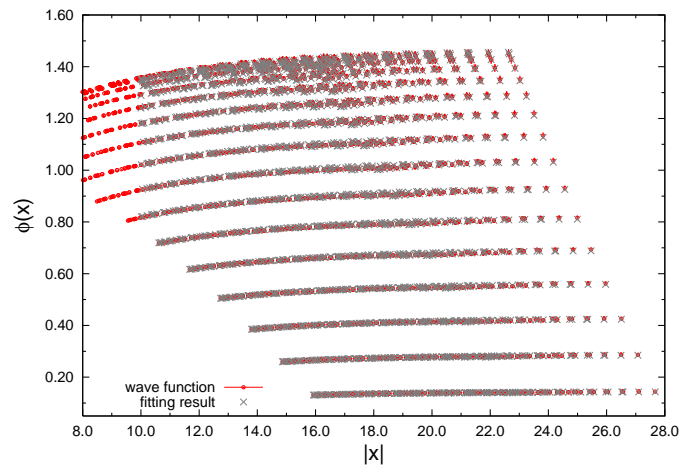
$$\phi^L(\mathbf{x}) = c \cdot G(\hat{\gamma}[\mathbf{x}]; k),$$

$$G(\mathbf{x}; k) = \frac{1}{\gamma L^3} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\mathbf{q}^2 - k^2} \cdot e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}.$$

ここで、

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n_x/\gamma \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\mathbf{P}|/\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

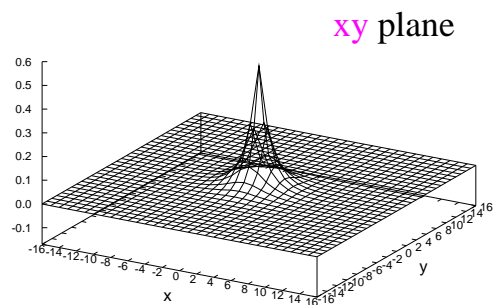
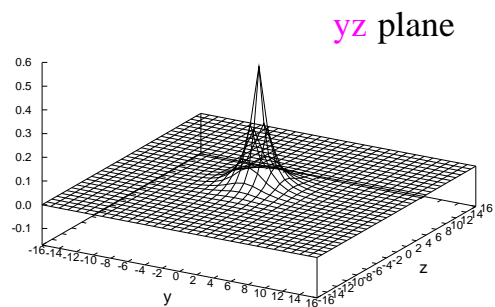
(b) $\mathbf{P} = (2\pi/L)\mathbf{e}_x$



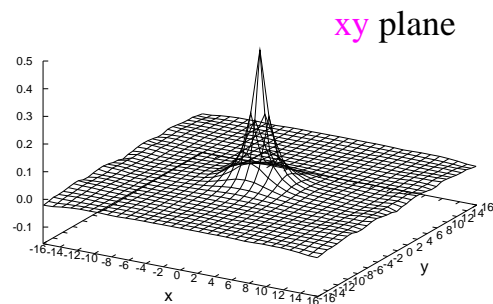
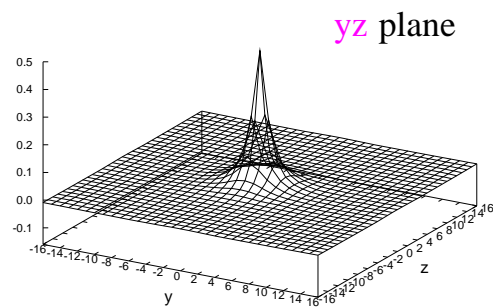
相互作用領域の外側では、Helmholtz 方程式のグリーン関数により記述可能

計算結果 ($V_{CM}^L(\mathbf{x}) \equiv \nabla^2 \phi_{CM}^L(\mathbf{x}) / \phi_{CM}^L(\mathbf{x})$)

$\mathbf{P} = 0$



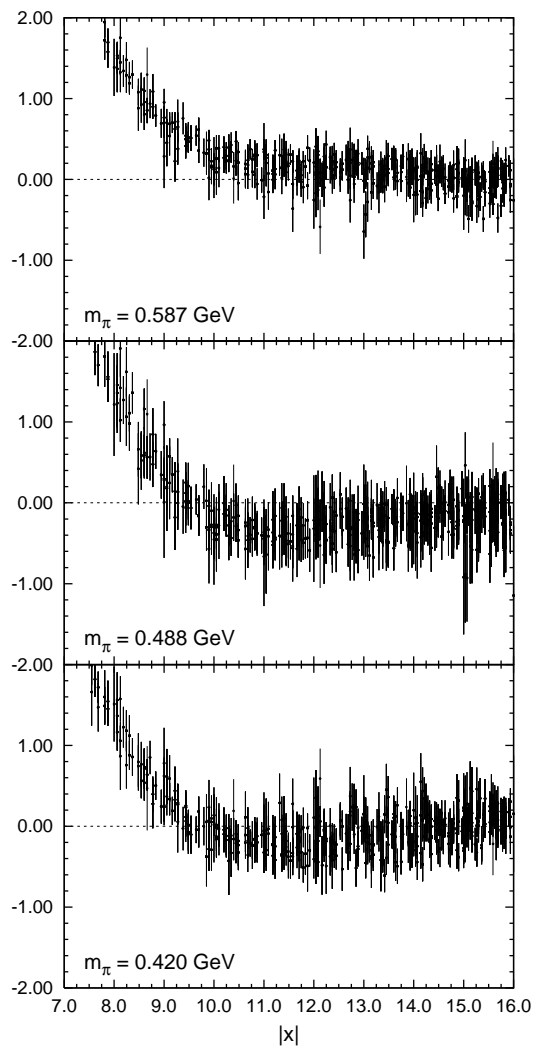
$\mathbf{P} = (2\pi/L)\mathbf{e}_x$



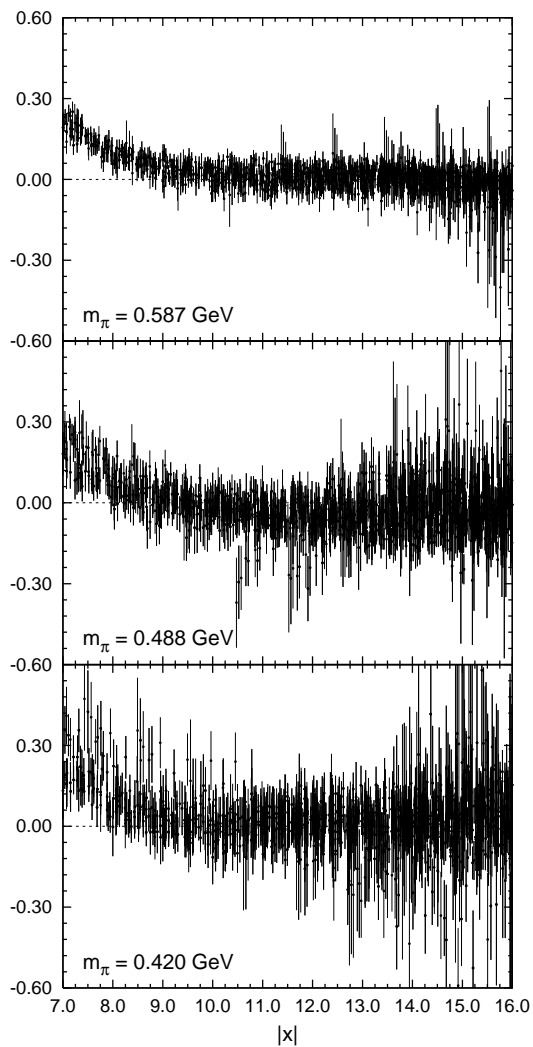
- * $V_{CM}^L(\mathbf{x})$ は、原点付近で局在し、強い斥力を示す
- * $V_{CM}^L(\mathbf{x})$ は、 $|\mathbf{x}| > 10$ で、ほぼ一定値に近づく

計算結果 (相互作用距離 R)

(a) $\mathbf{P} = 0$



(b) $\mathbf{P} = (2\pi/L)\mathbf{e}_x$



$$U_{\text{CM}}^L(\mathbf{x}) = \frac{(\nabla^2 + k^2)\phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})}{k^2\phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})} :$$

Interaction free $\Rightarrow U_{\text{CM}}^L(\mathbf{x}) \ll 1$

R の定義:

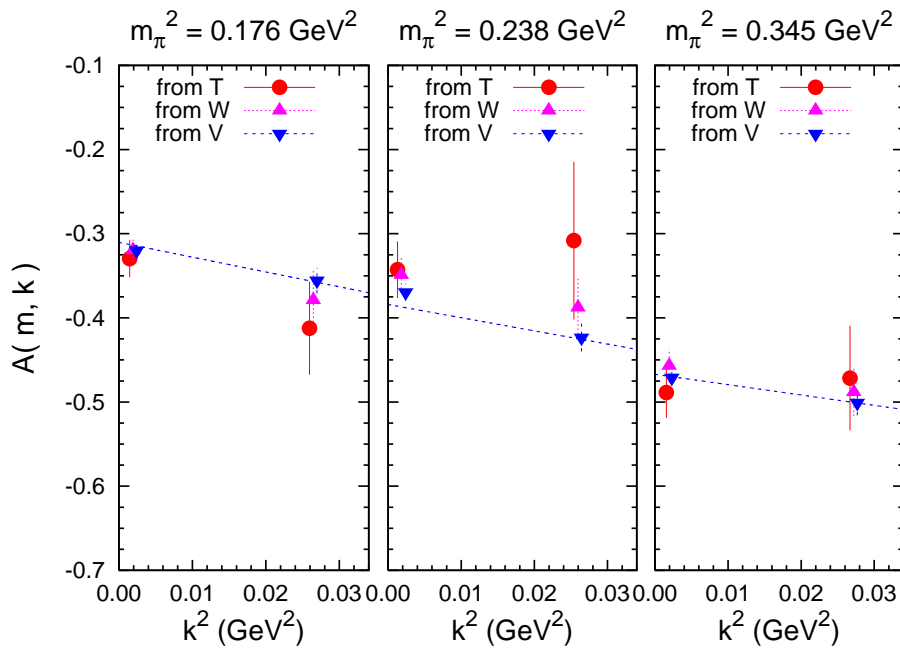
In $|\mathbf{x}| > R, U_{\text{CM}}^L(\mathbf{x}) \ll 1.$

全ての場合で $R < L/2 (= 16)$
 必要条件は満たされている

計算結果 (散乱振幅 $A(m_\pi, k^2) = \tan \delta_0(k) k^{-1} \sqrt{m_\pi^2 + k^2}$)

- k^2 の評価:
1. "from T" (2 粒子時間相関関数 $\Rightarrow E_{\text{CM}} = 2\sqrt{m_\pi^2 + k^2}$)
 2. "from W" ($\phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})$ を Helmholtz 方程式のグリーン関数にフィット)
 3. "from V" ($V_{\text{CM}}^L(\mathbf{x}) = \nabla^2 \phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x}) / \phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})$ を、定数値 $-k^2$ にフィット)

$A(m_\pi, k^2)$ @ 我々のシミュレーション点



展開 :

$$A(m_\pi, k^2) = A_{10}m_\pi^2 + A_{20}m_\pi^4 + A_{01}k^2 + A_{11}m_\pi^2k^2$$

	from T	from W	from V
A_{10}	-2.10(27)	-2.17(17)	-2.187(80)
A_{20}	2.02(92)	2.52(59)	2.42 (26)
A_{01}	-7.7 (56)	-3.2 (34)	-2.3 (15)
A_{11}	26. (22)	6. (12)	3.2 (56)

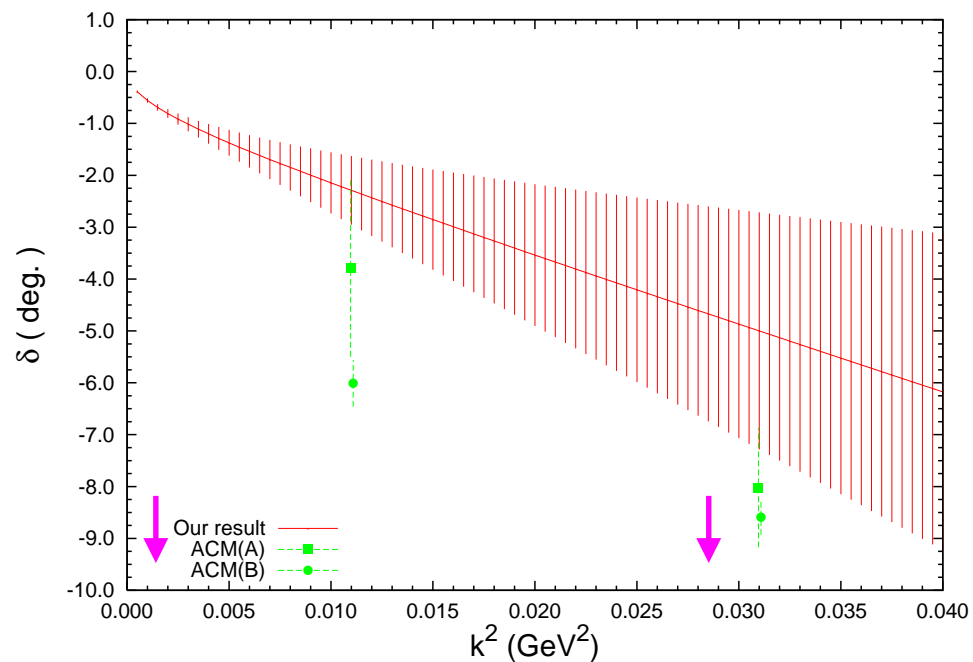
展開係数 ($A_{10}, A_{20}, A_{01}, A_{11}$) の決定

\Rightarrow 散乱位相差 @ 現実のパイオン質量

計算結果 (S-波散乱位相 $\delta_0(k)$)

$m_\pi = 140 \text{ MeV}$ に外挿された $\delta_0(k)$

ACM : Hoogland *et al.*, NPB126 (1977) 109



我々の計算値 > 実験値

⇒ 格子間隔が有限である効果 ?

Aoki *et al.* [CP-PACS], Phys.Rev.D67 (2003) 014502

Yamazaki *et al.* [CP-PACS], Phys.Rev.D70 (2004) 074513

まとめ

ゼロでない全運動量を伴う $I = 2 \cdot 2\pi$ 波動関数を計算した

1. 十分な統計精度で、 2π 波動関数は計算可能
原点から十分に離れて、Helmholtz 方程式のグリーン関数で記述可能
2. 2π 波動関数を用いて、相互作用距離 R を評価した
我々のシミュレーション点で、有限体積法の必要条件を満足
3. $\phi_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})$ や $V_{\text{CM}}^L(\mathbf{x})$ を用いて、散乱位相を評価する事も可能
時間相関関数を用いる手法よりも統計精度が良い

展望

QCD 第一原理計算によるハドロン散乱の研究は、今後盛んになると考えられる

- 理論的な興味

運動学的に崩壊が禁止される状況で、 E 固有値が実験値を再現するのは？
相互作用領域内の取り扱い
様々な系における有限体積公式の導出

- 様々な系への応用

共鳴状態の研究（ベクターは既にあるので、次はスカラー）
異なるハドロン同士の散乱（ex. $K\pi$ 散乱 \Rightarrow 室谷さん）
ただし、有限体積公式に換算質量を用いても良いのは、散乱長の時だけ

波動関数の使用は、特に、次の利点を与える

- 散乱位相の評価に関して、統計精度を大幅に改善できる

エネルギーシフトのような小さな量が相手なので、これは極端に重要

- 空間的情報が得られる

特に、相互作用距離 R の評価は重要
非相対論近似で、ハドロン間ポテンシャルも得られる（ \Rightarrow 初田さん、根村さん）
ただし、非ゼロ全運動量を用いる方法では、非相対論近似でもダメ
現状では、 $\mathbf{P} = 0$ のまま、うまくやる他ない

c.f.) T.Yamazaki, Nucl.Phys.Proc.Suppl.140 (2005) 338 ; S.Aoki et al., arXiv:0812.0673 [hep-lat]