一般相対論におけるＮ体問題
—— 相対論と舞踏解 ——

浅田 秀樹

(弘前大 理工)

共同研究者：今井 辰徳, 千葉 貴将

2007年5月28日

研究会「宇宙初期における時空と物質の進化」 (東京大学)

一般相対論的な強い重力場中でのＮ体

… あまり研究されていない

・宇宙における非線型ゆらぎ

・巨大ブラックホール形成

などとも関連するかもしれない ….

◎ 日本天文学会における格言

(出典:伊藤，谷川,「33回天体力学Ｎ体力学研究会集録」)

「三体問題にだけは手を出すな」(古在由秀)

「相対論にだけは手を出すな」(海野和三郎)

というが ･･･

一般相対論の視点で，「３体問題」を再考した.

References:

Chiba, Imai, HA,
MNRAS. 377, 269 (2007)

Imai, Chiba, HA,
Phys. Rev. Lett. 98, 201102 (2007)

重力波 •••

一般相対論における時空の歪みの伝播

加速度運動する天体

例：ハルス・テーラーの連星パルサー

(1974年発見, 1993年ノーベル賞)

周期的な重力波源として期待される天体

N＝1 •••

高速自転する回転星 (歪んだパルサー等)

N＝2 •••

コンパクト連星

３体以上は，余り考察されていない．

N＝３以上は，カオスがあるから．

不規則な重力波は，検出が難しい…

疑問：

３体以上からは周期的な重力波は
出ないのか？

答え：

3体以上も周期的な重力波を
生成する事は可能

Chiba, Imai, HA,
MNRAS. 377, 269 (2007)

一例 •••

３体の「８の字解」

Moore (1993)

Chenciner and Montgomery (2000)

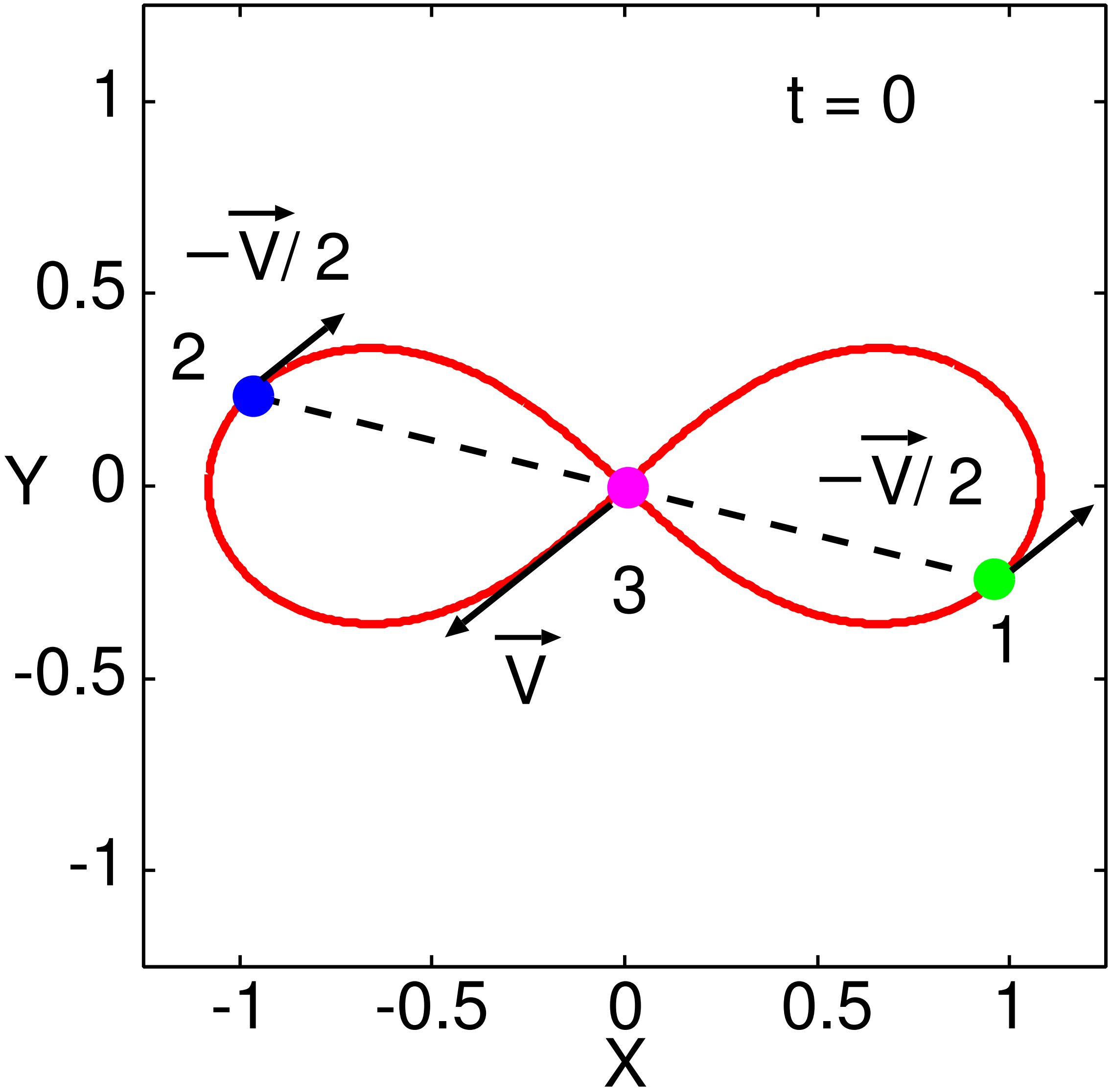
仮定　•••　ニュートン重力

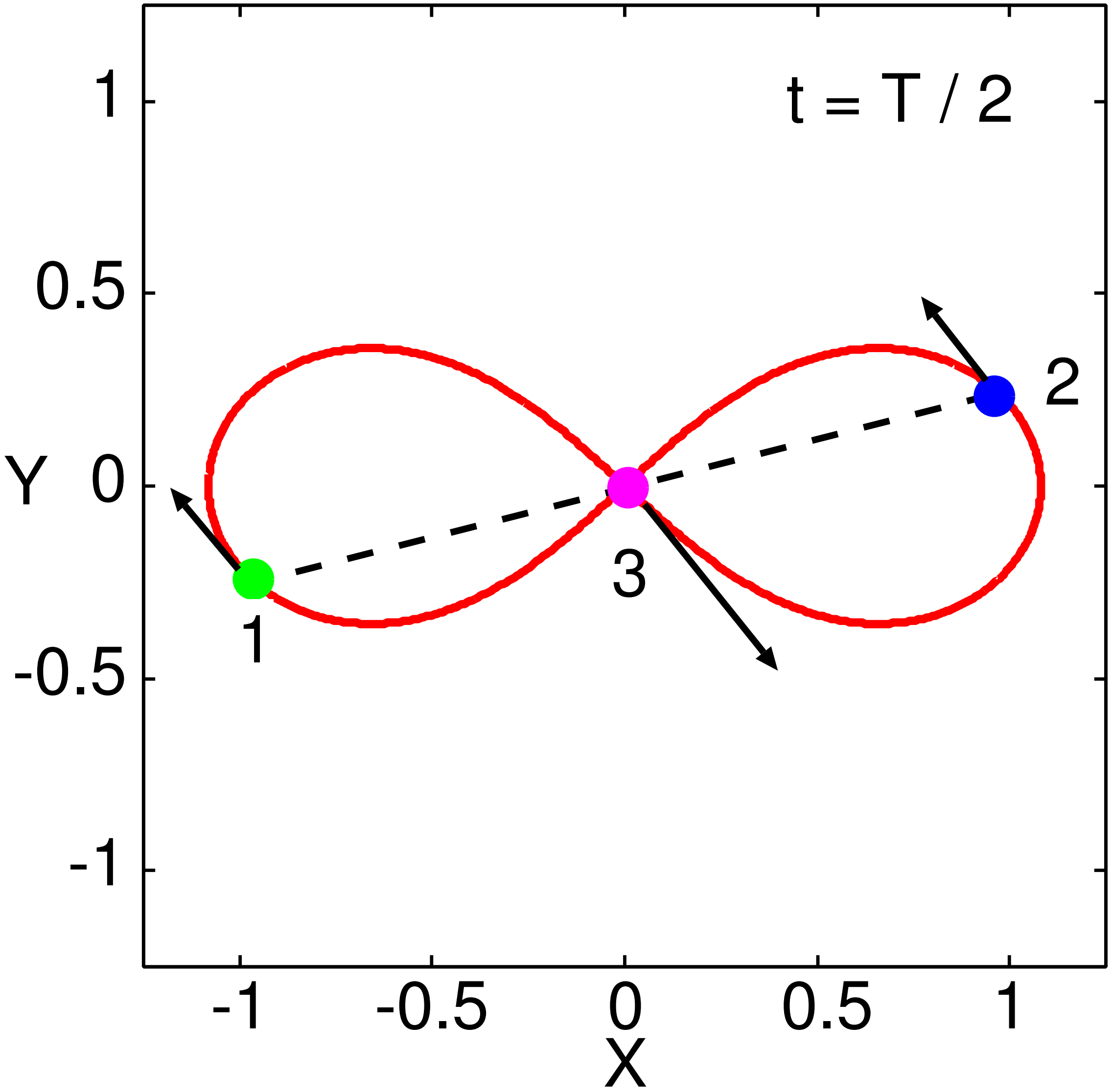
$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \frac{m_i m_k (\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}$$

３質点に対する仮定

同一平面上

同一質量


t = 0
$-\vec{V}/2$
2
$-\vec{V}/2$
3
$\vec{V}$
1
Y
X
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


t = T / 2
1
0.5
0
-0.5
-1
Y
-1
-0.5
0
0.5
1
X
1
2
3

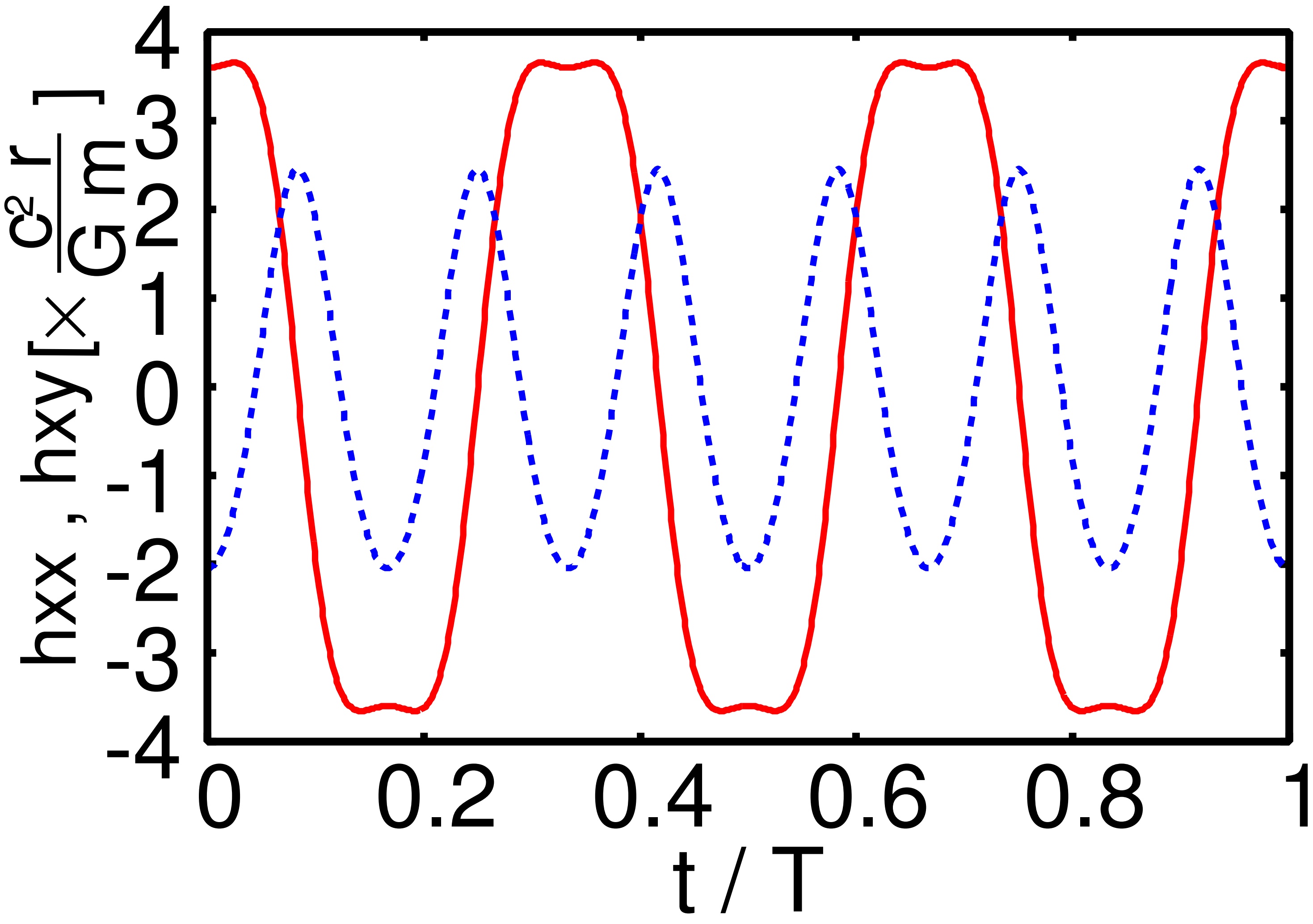
重力波 ••• 四重極公式（波動帯)

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G\ddot{Q}_{ij}}{rc^4} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

ただし,

$$Q_{ij} = I_{ij} - \delta_{ij}\frac{I_{kk}}{3}$$

$$I_{ij} = \sum_{A=1}^{N} m_A x_A^i x_A^j$$



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
t / T
hxx , hxy [$\times \frac{c^2 r}{G m}$]

エネルギー減少率

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} < Q_{ij}^{(3)} Q_{ij}^{(3)} >$$

$$= 1.2 \times 10^{19} \left(\frac{m}{M_\odot}\right)^5 \left(\frac{R_\odot}{\ell}\right)^5 \textbf{erg/s}$$

重力波放出の反作用のタイムスケール

$$t_{GW} \equiv \frac{E}{dE/dt}$$

$$= 0.13 \left(\frac{M_\odot}{m}\right)^3 \left(\frac{\ell}{R_\odot}\right)^4 \textbf{Gyr}$$

全角運動量は損失しない.

例１

正面衝突するブラック・ホール (Smarr 1979)

各天体の軌道角運動量＝０

例２

８の字解では，各々の軌道角運動量 $\neq 0$.

トータルでゼロ.

疑問：

ニュートンの運動方程式でＯＫ？

答え：

一般相対論的効果が必要 …

１次の補正 ＝ ポスト・ニュートン

(フルでは反作用があるので,「断熱的」

…「準周期解」)

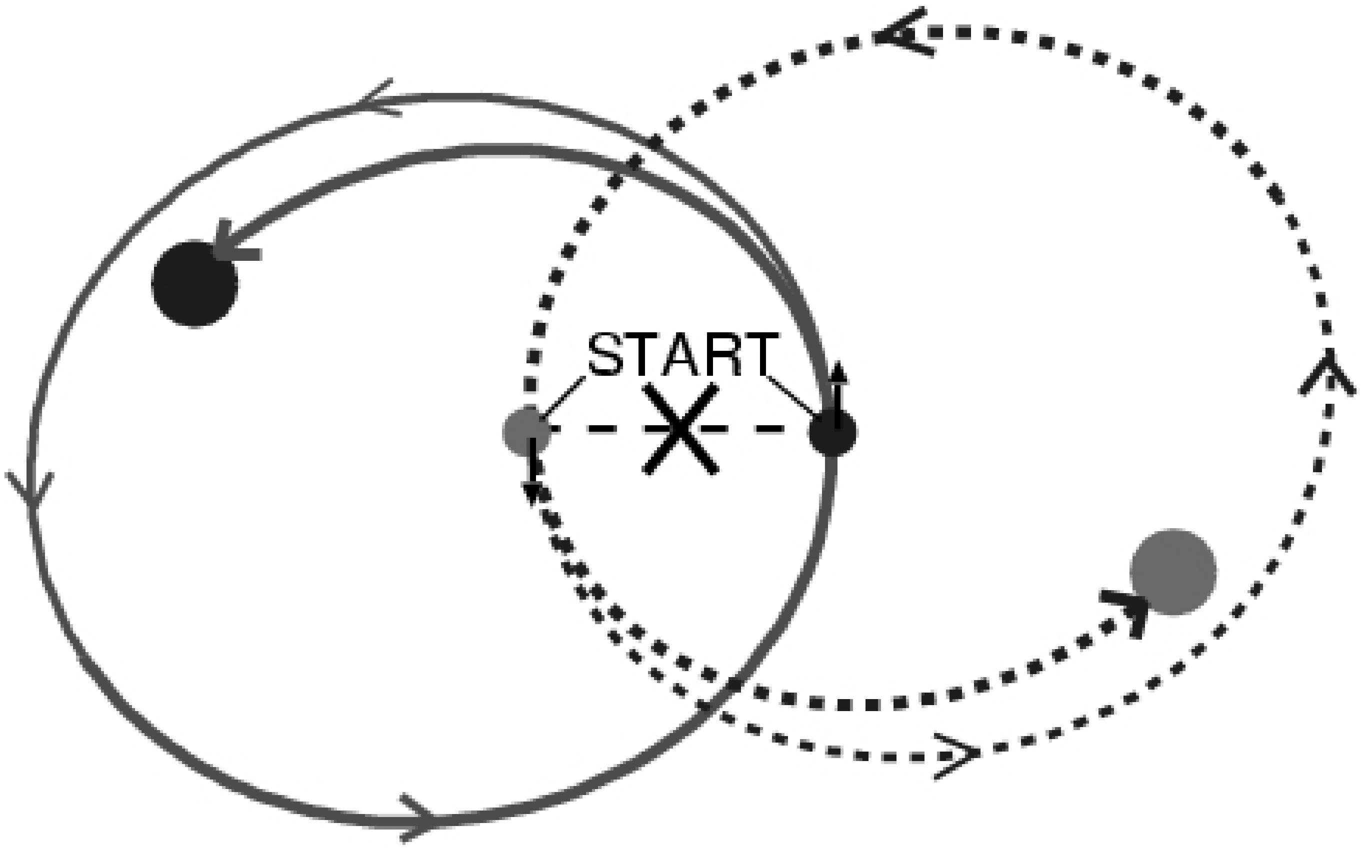
Einstein-Infeld-Hoffman の運動方程式（G＝c＝1）

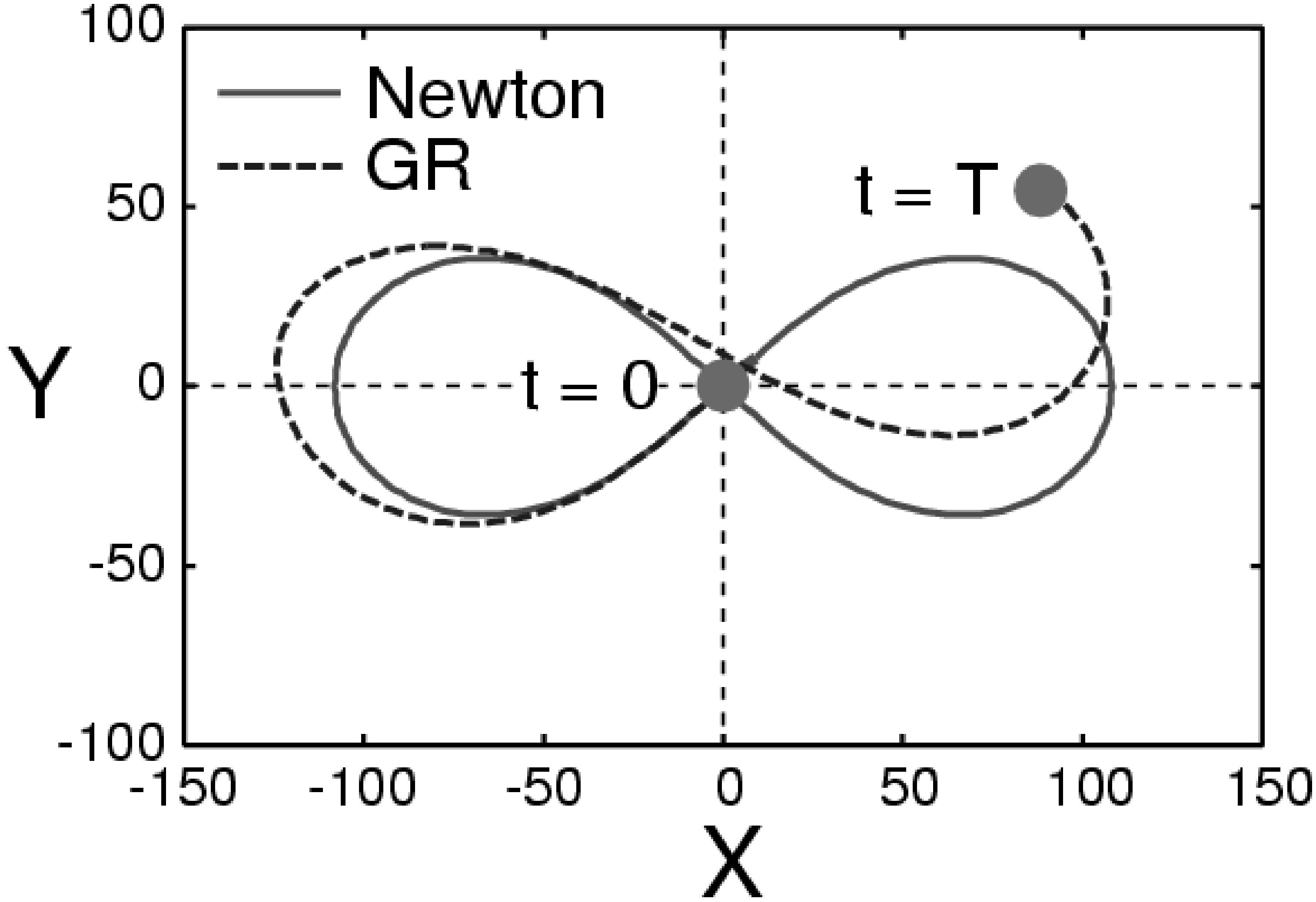
$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\boldsymbol{x}_K}{dt^2} \;=\; \sum_{A\neq K}\boldsymbol{r}_{AK}\frac{m_A}{r_{AK}^3}\Bigl[1 & -4\sum_{B\neq K}\frac{m_B}{r_{BK}} \\
& -\sum_{C\neq A}\frac{m_C}{r_{CA}}\left(1-\frac{\boldsymbol{r}_{AK}\cdot\boldsymbol{r}_{CA}}{2r_{CA}^2}\right) \\
& +v_K^2+2v_A^2-4v_A\cdot v_K-\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_{AK}}{r_{AK}}\right)^2\Bigr] \\
-\sum_{A\neq K}(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_K)&\frac{m_A\boldsymbol{r}_{AK}\cdot(3\boldsymbol{v}_A-4\boldsymbol{v}_K)}{r_{AK}^3} \\
+\frac{7}{2}\sum_{A\neq K}\sum_{C\neq A}\boldsymbol{r}_{CA}&\frac{m_A m_C}{r_{AK}r_{CA}^3}
\end{aligned}
$$

疑問：

２体だと近日点移動のため,
軌道が閉じない

８の字は ＯＫ ？


START


Newton
GR
t = T
t = 0
Y
X
100
50
0
-50
-100
-150
-100
-50
0
50
100
150

初速度をパラメタ化

$$\vec{v}_1 = k\vec{V} + \xi\frac{m}{\ell^3}(\vec{V}\cdot\vec{\ell})\vec{\ell}$$

$$\vec{v}_2 = k\vec{V} + \xi\frac{m}{\ell^3}(\vec{V}\cdot\vec{\ell})\vec{\ell}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{V}$$

$$k = -\frac{1}{2} + \alpha|\vec{V}|^2 + \beta\frac{m}{\ell}$$

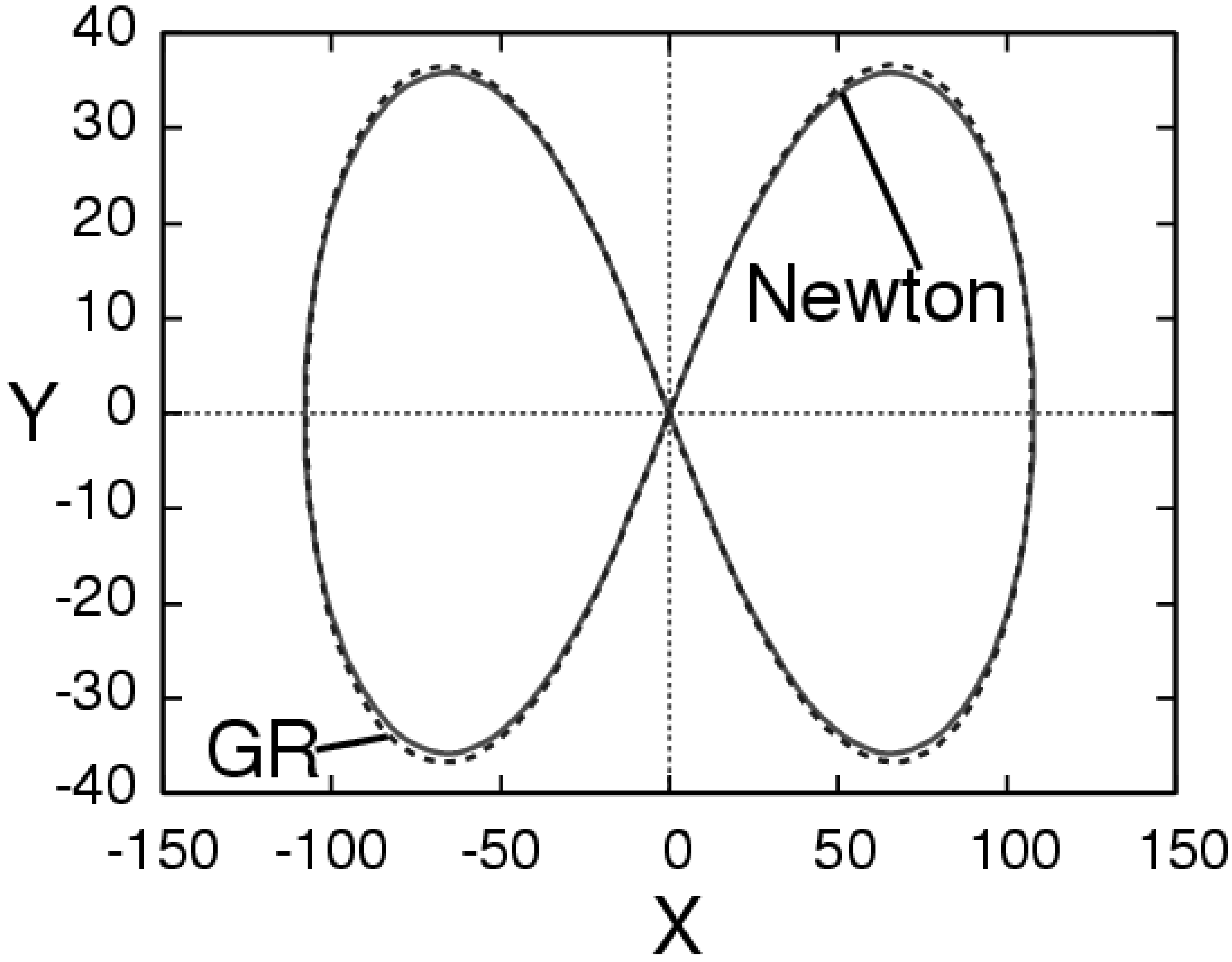
$$\vec{P}_{tot} = \vec{L}_{tot} = 0$$ より

$$\alpha = -\frac{3}{16}$$

$$\beta = \xi = \frac{1}{8}$$

残る2自由度

$\vec{V} = (V_x, V_y)$ は，数値計算


Newton
GR
Y
X
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-150
-100
-50
0
50
100
150

まとめ

○ Ｎ体でも周期的重力波を作る事は可能

○ ポスト・ニュートン重力での「８の字解」

○ 一般相対論的Ｎ体問題にも「舞踏解」

８の字解からの重力波のイベントは極めて稀

($< 1/$Gyr)

References:

Chiba, Imai, HA,
MNRAS. 377, 269 (2007)

Imai, Chiba, HA,
Phys. Rev. Lett. 98, 201102 (2007)

ご静聴，感謝いたします．

$$
\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}\sum_A m_A v_A^2 + \frac{1}{2}\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} + \frac{1}{8}\sum_A m_A v_A^4 \\
& -\frac{1}{4}\sum_A \sum_{B\neq A} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}[7(\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_B) - 6v_A^2 + (\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{n}_{AB})(\boldsymbol{v} \\
& -\frac{1}{2}\sum_A \sum_{B\neq A} \sum_{C\neq A} \frac{m_A m_B m_C}{r_{AB} r_{AC}}
\end{aligned}
$$

Here we define

$$\vec{r}_{AB} \equiv \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$r_{AB} \equiv |\vec{r}_{AB}|$$

$$\vec{n}_{AB} \equiv \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}$$

図 6.12: [+モード (上)、×モード (下) の重力波の角度依存性 ($t = 0$)]

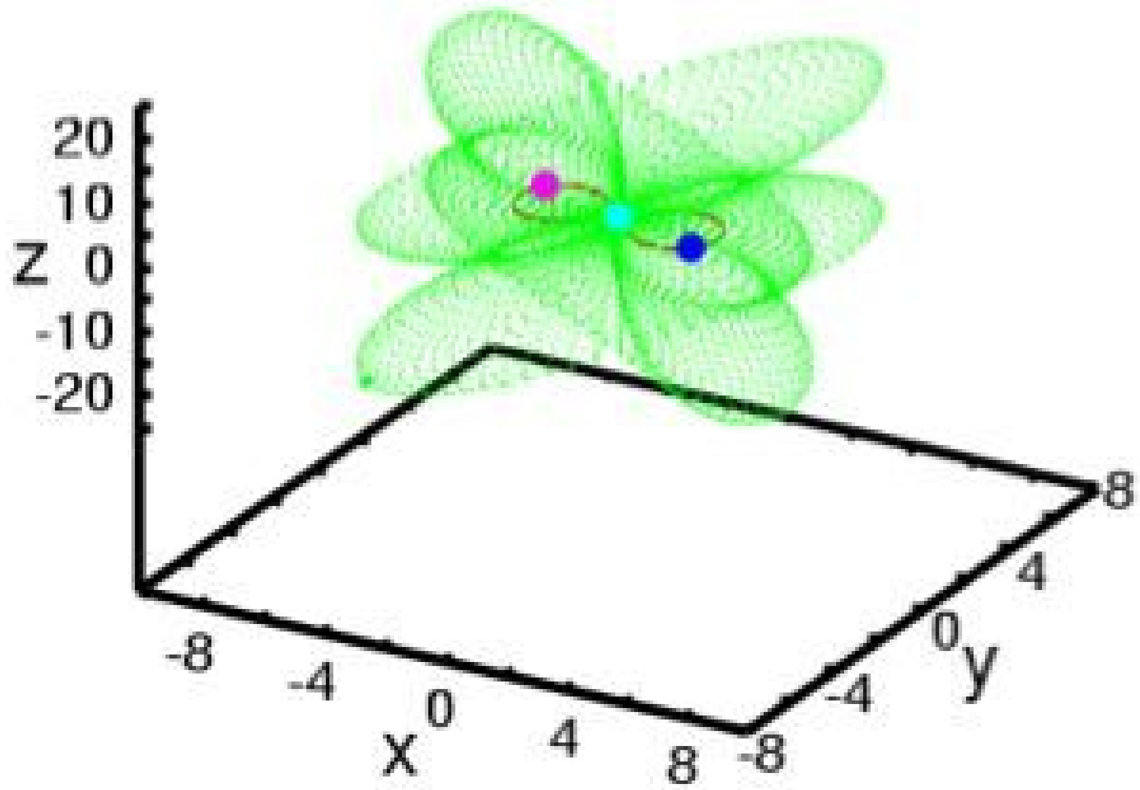
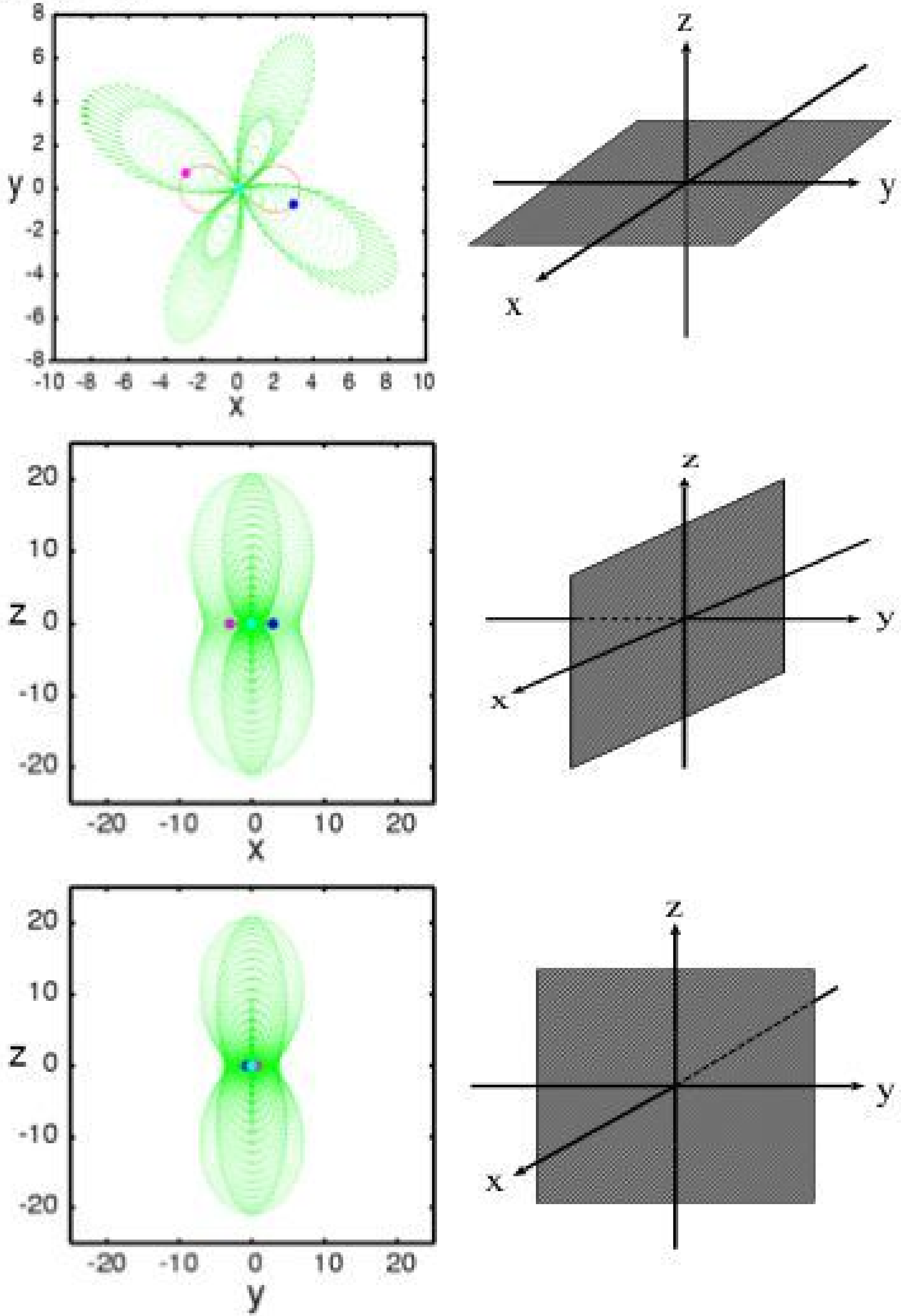
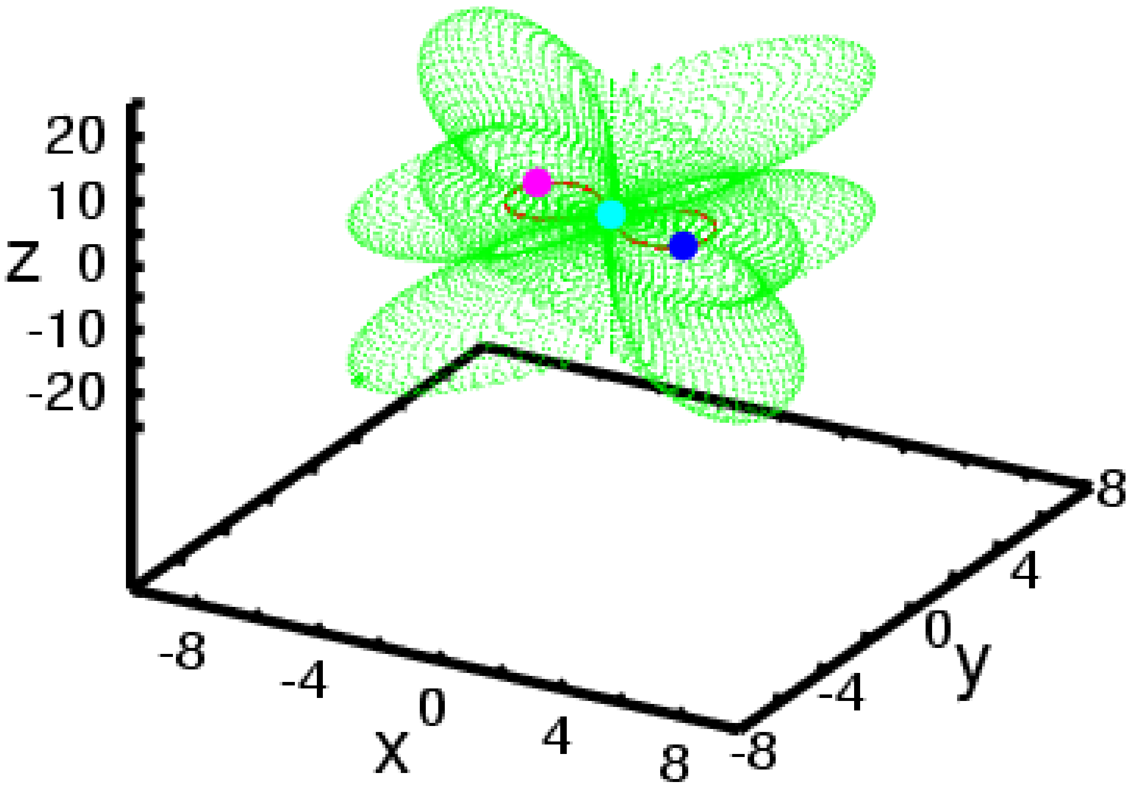
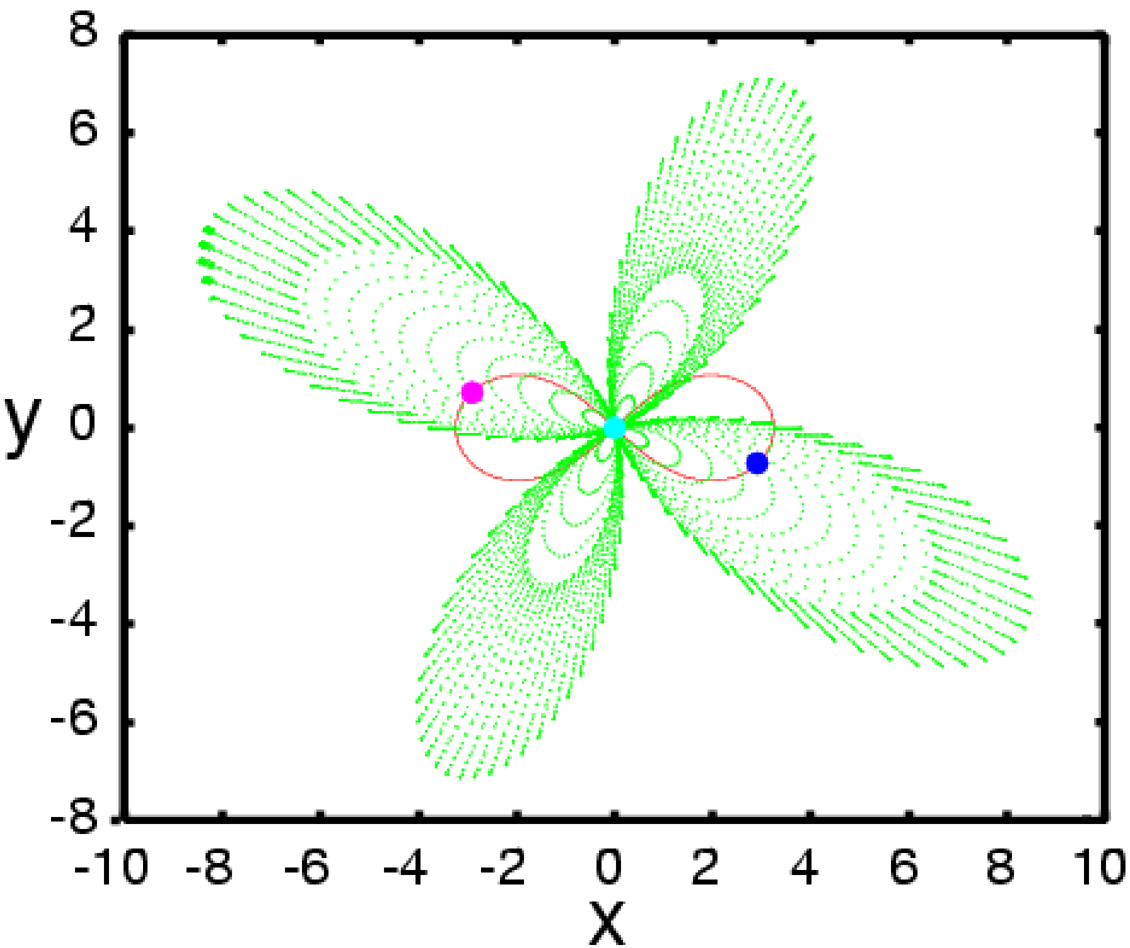


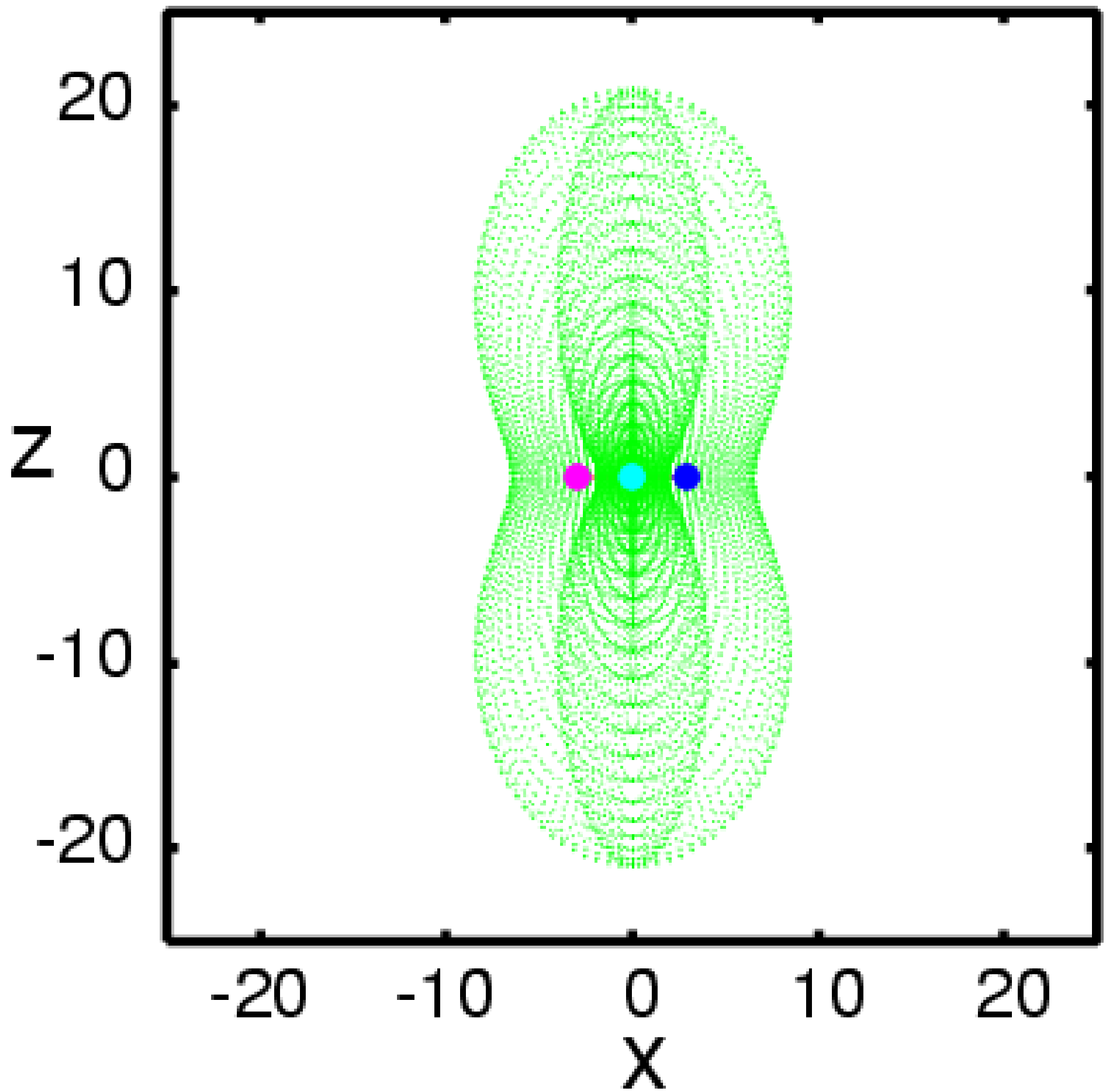
図 6.13: [図 6.12 の+モードでの $x-y$(上),$x-z$(中),$y-z$(下) 平面への射影図 $(t=0)$]

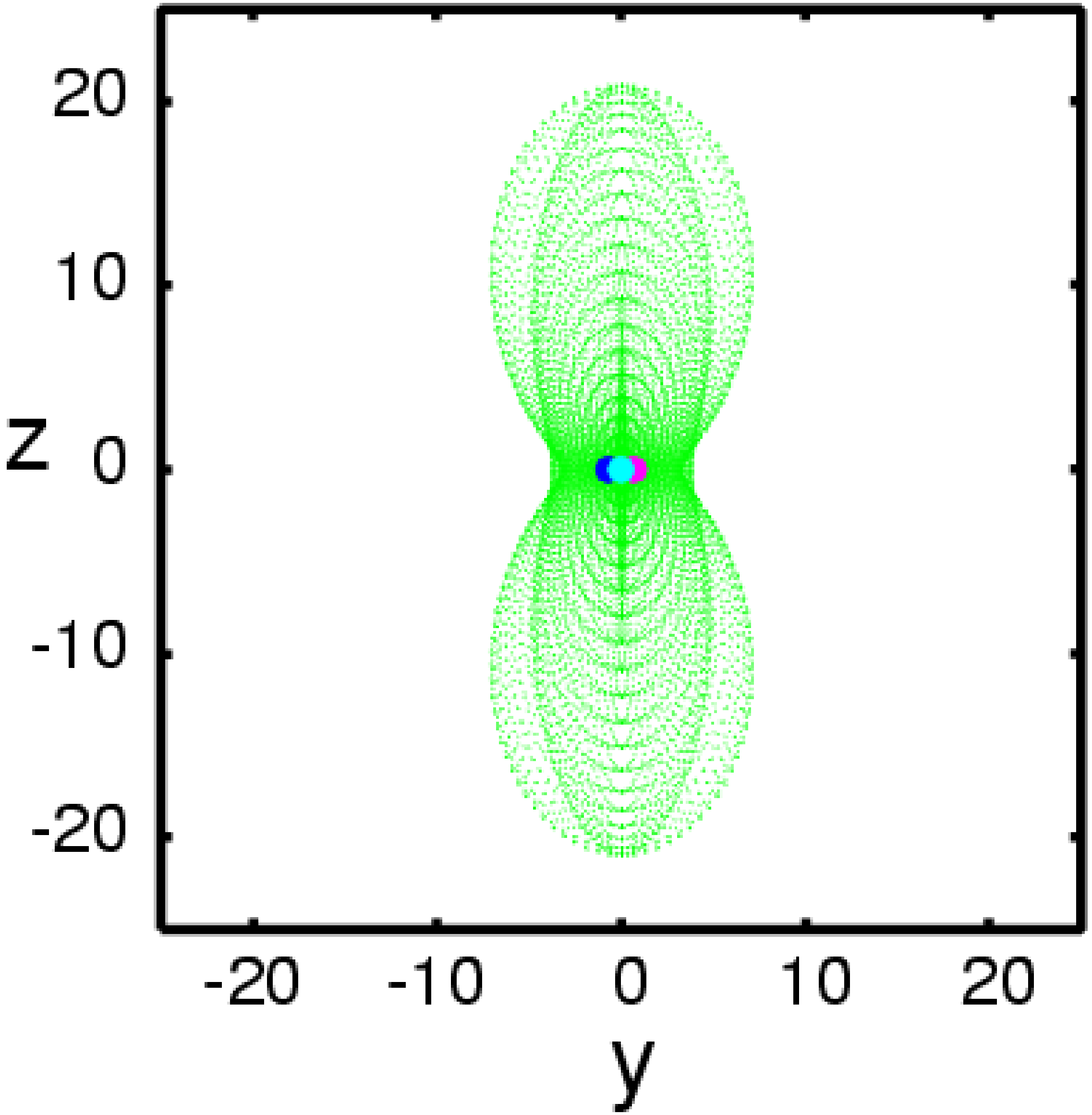


[A-1]
＋モードの角度依存性 ($t = 0$)

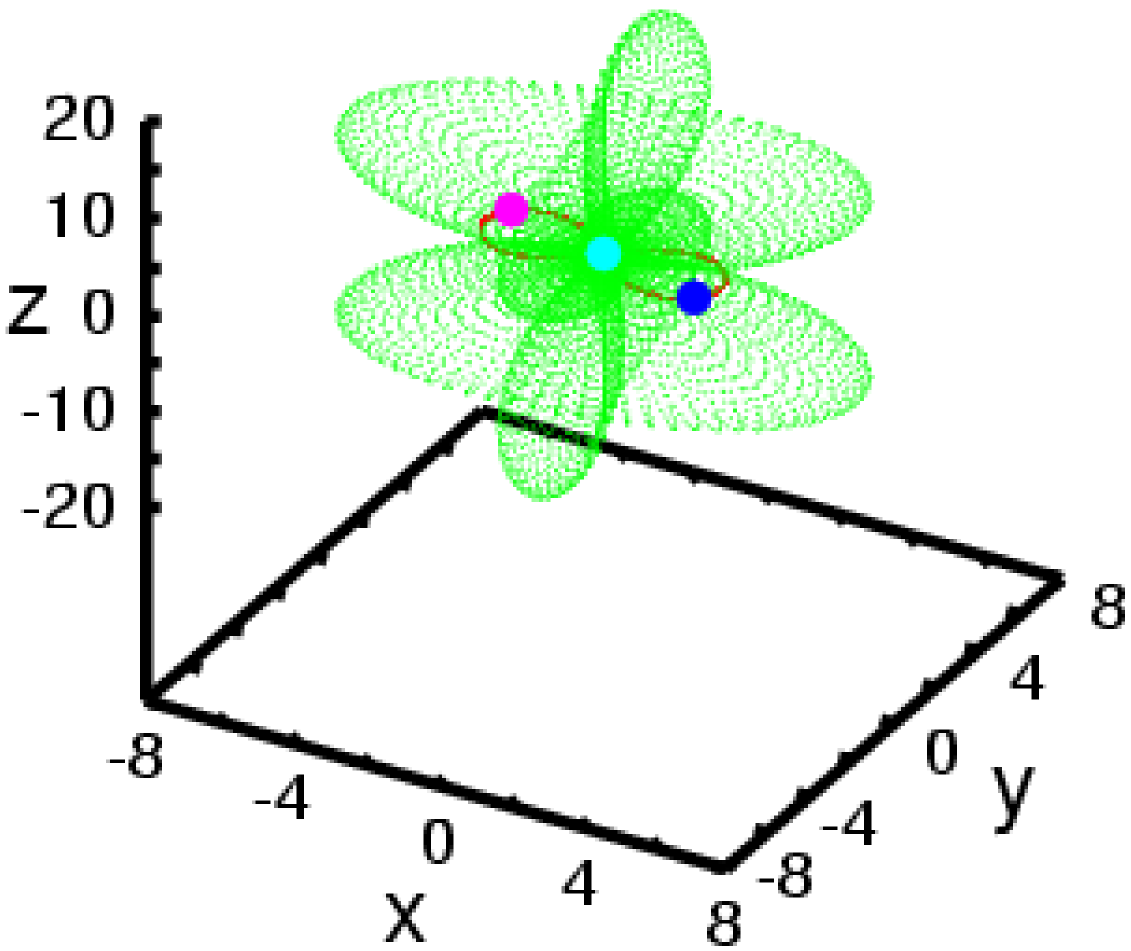

20
10
z 0
-10
-20
-8
-4
x 0
4
8
-8
-4
0 y
4
8


8
6
4
2
y 0
-2
-4
-6
-8
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
x

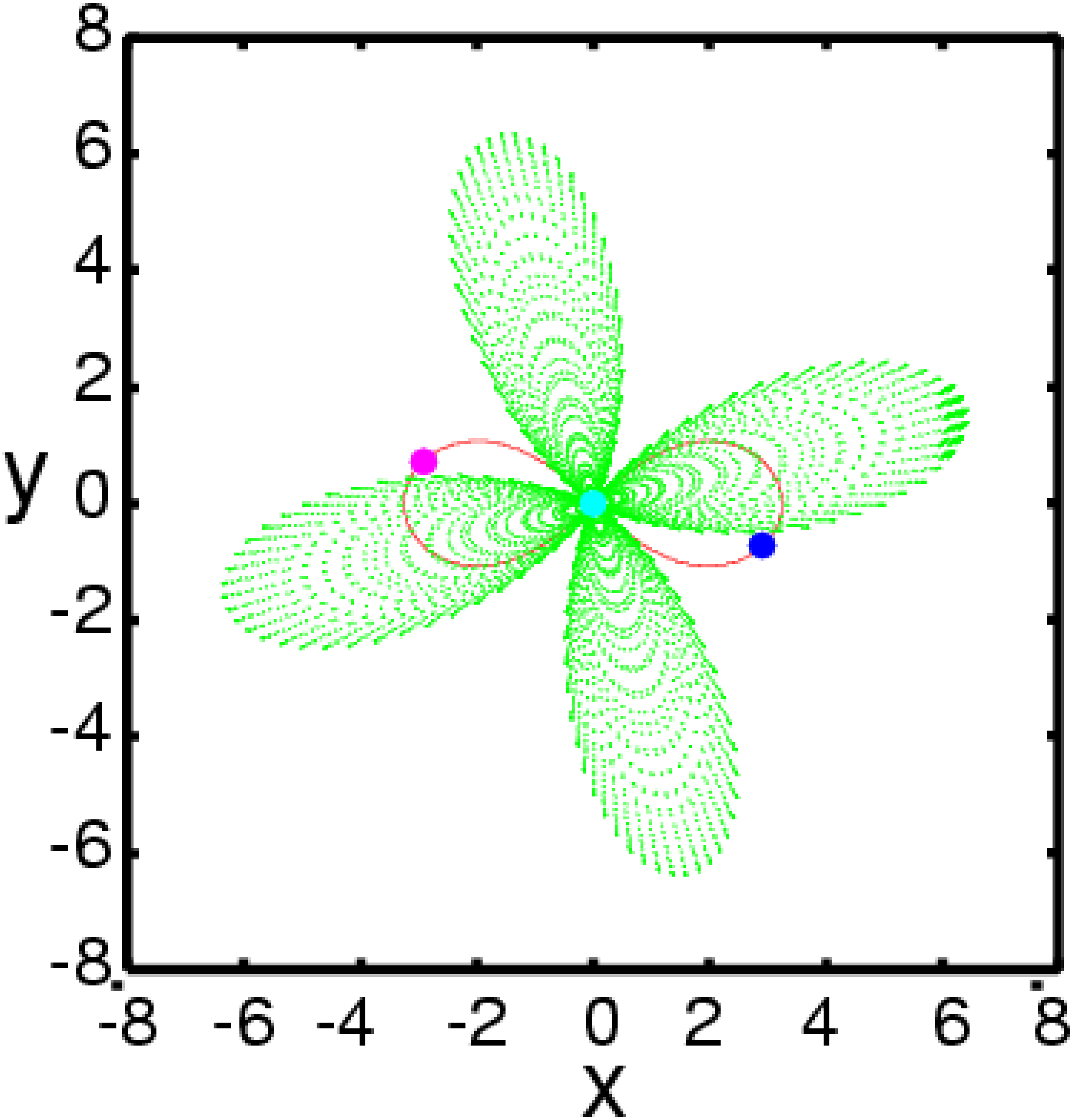

20
10
z 0
-10
-20
-20
-10
0
10
20
x

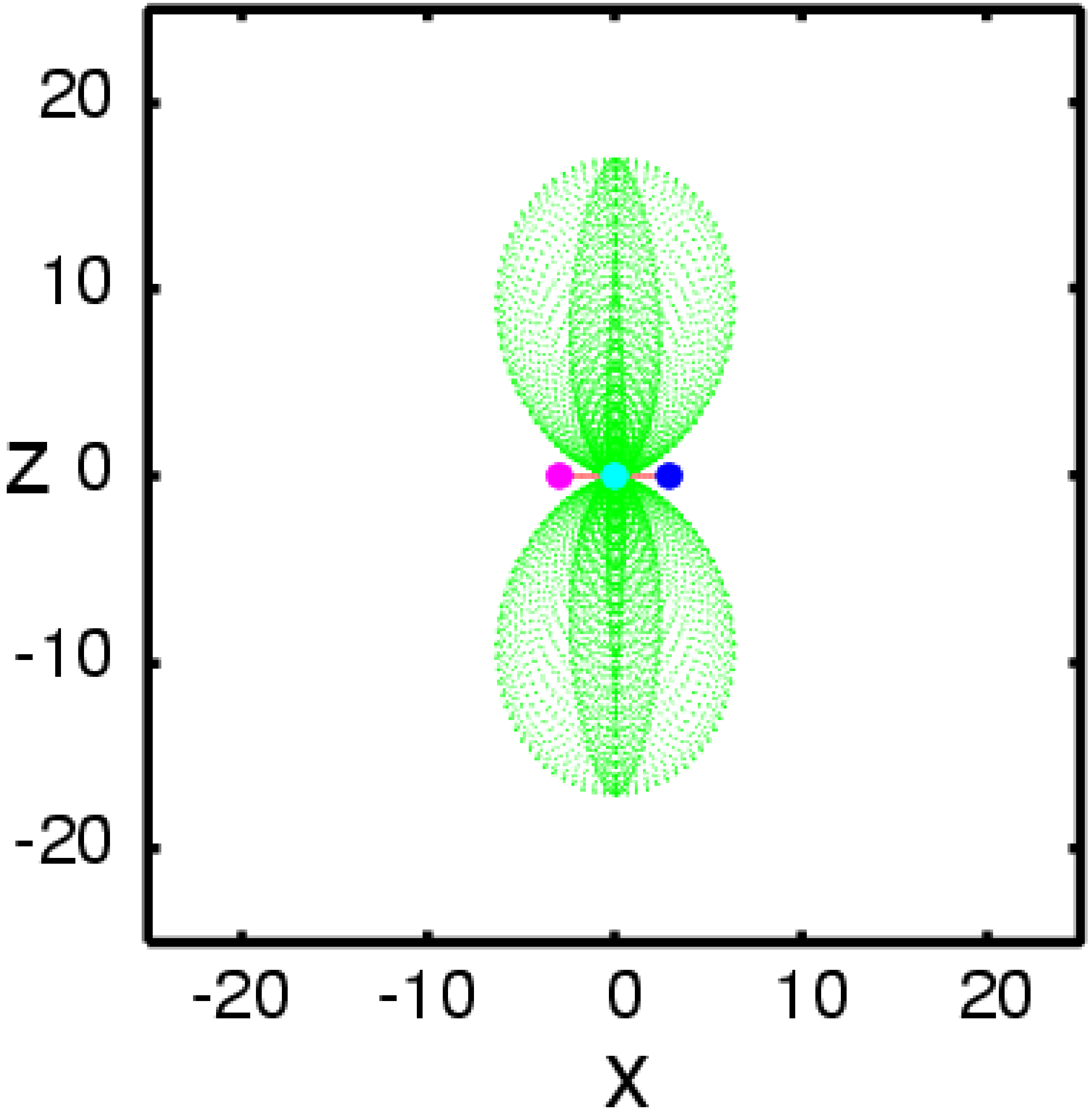

20
10
z 0
-10
-20
-20
-10
0
10
20
y

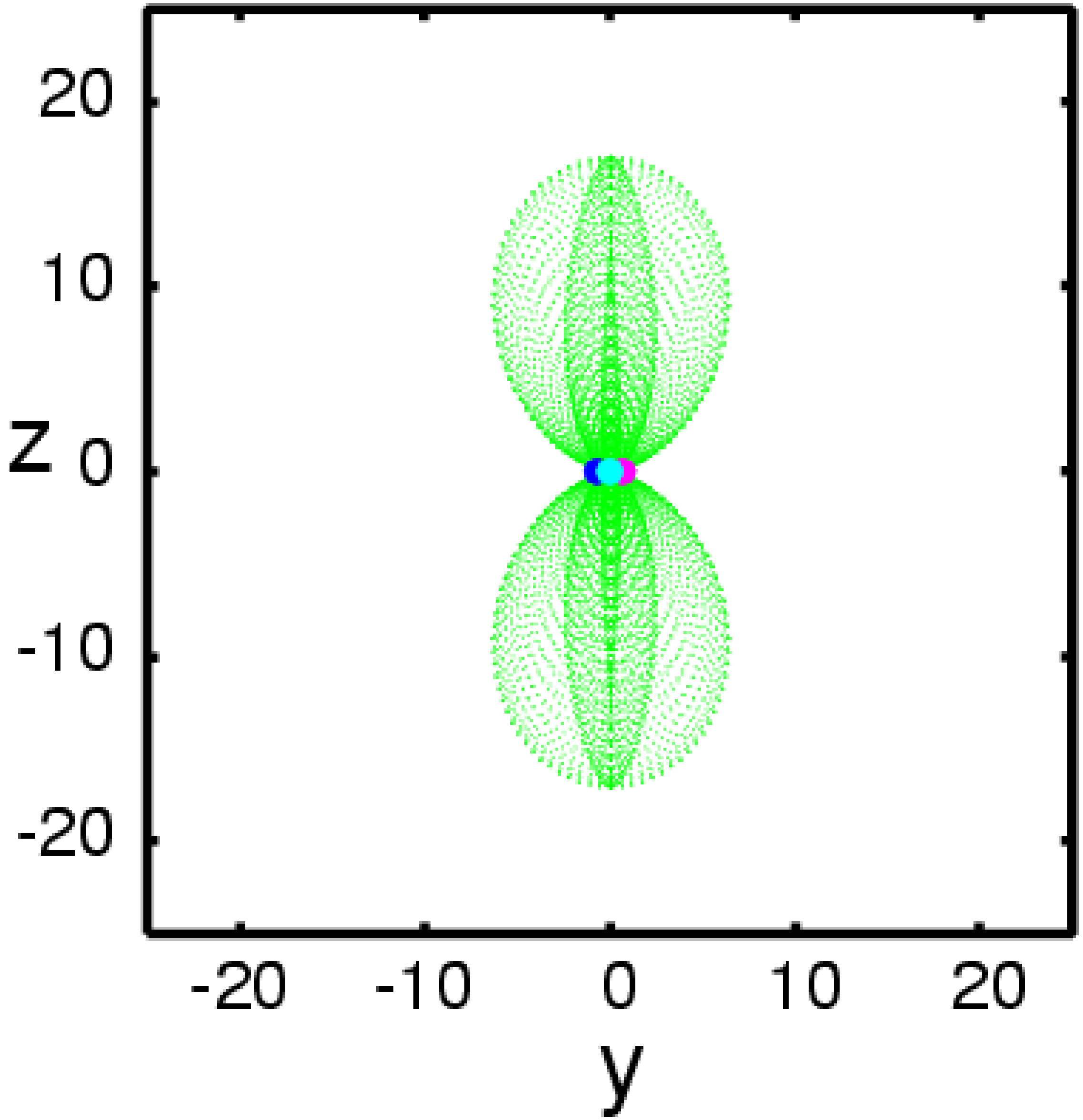
[A-2]
×モードの角度依存性 $(t = 0)$



20
10
z 0
-10
-20
-8
-4
0
4
8
x
-8
-4
0
4
8
y


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
y
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x


20
10
z 0
-10
-20
-20
-10
0
10
20
x



20
10
z 0
-10
-20
-20
-10
0
10
20
y