

## 第8章 万有引力のもとでの運動

### 8.1 軌道

#### 8.1.1 離心率と軌道

太陽から万有引力を受ける物体（惑星など）の運動を考える。万有引力定数を  $G$ 、太陽の質量を  $M$ 、物体の質量を  $m$  とする。運動方程式の  $r$  方向成分は

$$m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} \right) = -G \frac{mM}{r^2} \quad (8.1)$$

と書ける。この方程式の解  $r(t)$  を求めるのは容易ではない。しかし、軌道は以下のように求めることができる。

運動方程式の書き換え 軌道は  $r$  を  $\varphi$  の関数として  $r(\varphi)$  の形で表される。運動方程式 (8.1) から軌道  $r(\varphi)$  を求めるために、まず、変換

$$u = \frac{1}{r} \quad (8.2)$$

により運動方程式を書き直す（求める方程式は (8.8)）。運動方程式の左辺にある  $r$  の時間微分は、 $r = r(\varphi)$  が  $\varphi$  を通して時間  $t$  の関数であることより

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.3)$$

と書ける。右辺の第1因子は

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -u^2 \frac{dr}{d\varphi} \quad \text{よ} \ddot{\text{r}} \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \quad (8.4)$$

第2因子は

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{よ} \ddot{\text{r}} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} = u^2 h \quad (8.5)$$

と表せる。よって、(8.3) は

$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{du}{d\varphi} \quad (8.6)$$

となる。この式をもう一度時間で微分すると、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\varphi} \right) = -h \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{du}{d\varphi} \right) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \quad (8.7)$$

が得られる。従って、運動方程式の  $r$  方向成分は  $u$  の  $\varphi$  に関する微分方程式

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (8.8)$$

に書き直せる。これを解いて軌道  $r = r(\varphi)$  が得られる。

微分方程式の解 微分方程式 (8.8) の一般解は、右辺を 0 とおいた斉次方程式の一般解と、非斉次方程式 (8.8) の特解の和で与えられる。斉次方程式は単振動の方程式であるから、一般解は、 $A$  と  $\varphi_0$  を定数として  $u = A \cos(\varphi - \varphi_0)$  と表せる。一方、 $u = GM/h^2 =$  定数は非斉次方程式 (8.8) を満たしているので特解になる。従って、(8.8) の一般解は

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{h^2} = \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + \frac{h^2 A}{GM} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \quad (8.9)$$

で与えられる。ここで

$$\frac{1}{l} = \frac{GM}{h^2}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{GM} A = lA \quad (8.10)$$

とおくと、求める軌道は  $r = 1/u$  から

$$r(\varphi) = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (8.11)$$

と表される。 $l$  は半直弦であり、 $\varepsilon$  を離心率という。 $r \geq 0, l > 0$  より、(8.11) の右辺の分母が正になる角  $\varphi$  の範囲が、運動の許される範囲になる。

軌道の形 軌道は直線  $\varphi = \varphi_0$  に関して対称である。便宜上、 $\varphi_0 = 0$  となるように座標軸を回転する。このとき、 $r$  は  $\varphi = 0$  で最小値

$$r_m = \frac{l}{1 + \varepsilon} \quad (8.12)$$

をとる。 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  によって直角座標で表すと、(8.11) が表す図形は  $\varepsilon$  の値に応じて次のように分類される。

$$0 \leq \varepsilon < 1 \quad \frac{[x + \varepsilon r_m / (1 - \varepsilon)]^2}{[r_m / (1 - \varepsilon)]^2} + \frac{y^2}{[r_m \sqrt{(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)}]^2} = 1 \quad (8.13)$$

$$\varepsilon = 1 \quad y^2 + 4r_m x = 4r_m^2 \quad (8.14)$$

$$\varepsilon > 1 \quad \frac{[x - \varepsilon r_m / (\varepsilon - 1)]^2}{[r_m / (\varepsilon - 1)]^2} - \frac{y^2}{[r_m \sqrt{(\varepsilon + 1) / (\varepsilon - 1)}]^2} = 1 \quad (8.15)$$

すなわち、 $0 \leq \varepsilon < 1$  のとき 楕円 (図 8.1 実線)、 $\varepsilon = 1$  のとき 放物線 (点線)、 $\varepsilon > 1$  のとき 双曲線 (破線) であることがわかる。

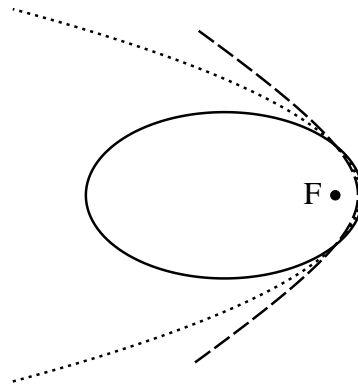


図 8.1: 万有引力のもとでの運動．楕円（実線），放物線（点線），双曲線（破線）

### 8.1.2 エネルギーと角運動量による軌道の違い

エネルギーが等しくても，角運動量（面積速度）が違えば軌道の形は異なる。ここではエネルギーと角運動量によって軌道がどのように異なるかを調べてみる。中心力である万有引力のもとでの運動では，エネルギーと角運動量は保存する。つまり，エネルギーと面積速度は軌道上のどの点においても一定であるから，両者の関係を調べるには特別の点，たとえば太陽に最も近づく点が考えやすい。その点（近日点  $\varphi = \varphi_0$ ）では  $r = r_m$ ，また， $dr/dt = 0$  である。従って，保存するエネルギーの式は

$$E = \frac{mh^2}{2r_m^2} - G \frac{mM}{r_m} = \frac{mh^2}{2r_m} \left( \frac{1}{r_m} - \frac{2GM}{h^2} \right) \quad (8.16)$$

となる。この式に，(8.12) と (8.10) を代入すると

$$E = \frac{mG^2M^2}{2h^2} (\varepsilon^2 - 1) \quad (8.17)$$

が得られる。角運動量の大きさ  $L = |L|$  と面積速度  $h/2$  の関係  $L = mh$  から

角運動量の大きさ  $L$  とエネルギー  $E$  によって離心率  $\varepsilon$  が決まり

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m^3G^2M^2}}, \quad \begin{cases} E < 0 & \varepsilon < 1 & \text{楕円} \\ E = 0 & \varepsilon = 1 & \text{放物線} \\ E > 0 & \varepsilon > 1 & \text{双曲線} \end{cases} \quad (8.18)$$

楕円は閉じた図形であり，運動は周期的である。惑星の公転運動は楕円軌道に沿った周期運動である。他方，放物線と双曲線は閉じていないので，運動は周期的ではない。

万有引力のもとでの運動では，エネルギーとともに，角運動量（力の中心を座標原点とする）が保存する。運動は2次元平面上であるので，エネルギーと角運動量を指定すると軌

道の形は決まってしまう。平面上の運動では初期条件として4つの値が必要であるが、その2つとしてエネルギーと角運動量を採用すると、残る2つの値（初期条件）によって運動は一意的に規定される。

### 8.1.3 楕円軌道

長軸半径，短軸半径，離心率 楕円軌道 ( $E < 0$ ) のとき，長軸半径  $a$  と短軸半径  $b$  は

$$\begin{aligned} a &= \frac{GmM}{2|E|} = r_m \frac{1}{1-\varepsilon} \\ b &= \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} = r_m \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \end{aligned} \quad (8.19)$$

で与えられる。両者の関係は離心率  $\varepsilon$  を用いて次のように表せる。

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{al} \quad (8.20)$$

長軸半径  $a$  はエネルギー  $E$  によって定まり，角運動量  $L$  によらない。一方，短軸半径  $b$  は両者に依存する。逆に，エネルギー  $E$  は長軸半径によって定まり，短軸半径にはよらない。

周期 楕円軌道を描く惑星の場合，その周期  $T$  は楕円の面積  $\pi ab$  を面積速度  $h/2$  で割って求められる。ここで，(8.20) 及び  $h = \sqrt{GMl}$  の関係を用いると，周期  $T$  を長軸半径  $a$  によって表すことができる。

$$T = \frac{\pi ab}{h/2} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (8.21)$$

このように，万有引力のもとでの運動では，面積速度が一定であり（ケプラーの第2法則），太陽を焦点の1つとした楕円運動が可能であり（第1法則），そのとき，周期の2乗は長軸半径の3乗に比例している（第3法則）ことがわかる。表 8.1 に，太陽系の9個の惑星の，軌道と周期に関する値を示す。

表 8.1 惑星表（理科年表 1998 年版より）

惑星	長軸半径 (天文単位)	離心率	公転周期 (年)
水星	0.3871	0.2056	0.2409
金星	0.7233	0.0068	0.6152
地球	1.0000	0.0167	1.0000
火星	1.5237	0.0934	1.8809
木星	5.2026	0.0485	11.862
土星	9.5549	0.0555	29.458
天王星	19.2154	0.0463	84.022
海王星	30.1104	0.0090	164.774
冥王星	39.5401	0.2490	247.796

太陽の質量 =  $1.989 \times 10^{30}$  kg 地球の質量 =  $5.974 \times 10^{24}$  kg

## 8.2 人工衛星

万有引力の法則は地球を周回する人工衛星にも適用できる。太陽の質量を地球の質量に、惑星の質量を人工衛星の質量に置き換えて考えれば良い。

### 8.2.1 円軌道

最も簡単な場合として、円軌道を描く人工衛星を考える。円軌道は楕円軌道の特殊な場合（離心率  $\varepsilon = 0$ ）であるので、楕円軌道に関する関係式が成り立つ。さらに、円軌道に固有の関係式も成り立つ。

#### 周期と速度

地表面からの高度を  $h$  とする。地球の半径を  $R$  とすると、地球の中心（座標原点）から衛星までの距離は  $r = R + h$  である。地球を 1 周するのに要する時間、すなわち、周期  $T$  は、ケプラーの第 3 法則（地球の質量を  $M$ 、万有引力定数を  $G$  とする）

$$\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad \text{より} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} (R+h)^{3/2} \quad (8.22)$$

と求められる。また、地球の表面における重力加速度を  $g$  とすると

$$\frac{GmM}{R^2} = mg \quad \text{より} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{gR}} (R+h)^{3/2} \quad (8.23)$$

と表すこともできる。このとき、人工衛星の速度  $v$  は、円周の長さ  $2\pi(R+h)$  を周期  $T$  で割って

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \quad (8.24)$$

である。表 8.2 にいろいろな高度の円軌道をまわる衛星の周期と速度を示す。

表 8.2 地球衛星の周期と速度

高度 $h$ [km]	0	200	500	1680	35850
周期 $T$ [h]	1.41	1.47	1.58	2.00	24.00
速度 $v$ [km/s]	7.9	7.8	7.6	7.0	3.0

表 8.2 の右端に示した円軌道の周期は 24 時間であり、これは、1 日に地球を 1 周することを意味している。地球も 1 日に 1 回自転しているので、この軌道が地球の赤道面にあると、人工衛星は静止して見える。これが静止衛星である。静止衛星の高度 35,850 km は地球の半径の約 6 倍である。他の多くの人工衛星の高度が 200 - 500 km であるのと比べると、地表から極めて遠くを周回する人工衛星であると言える。なお、地球の衛星である月までの距離は約 38 万キロメートルであり、円に近い軌道上を周回している。その周期は約 27 日である。

## 脱出速度

地球の引力圏からの脱出速度  $v_{\text{esc}}$  は、地表 ( $h = 0$ ) で運動エネルギーとポテンシャルエネルギー (無限遠方で 0 とする) の和が 0 である条件

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \quad (8.25)$$

から直ちに求められ

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ km/s} \quad (8.26)$$

である。

## エネルギー

衛星の力学的エネルギー  $E$  ( $E < 0$ ) は運動エネルギー  $K$  とポテンシャルエネルギー  $U$  の和である。

$$E = K + U \quad (8.27)$$

いずれも半径  $r$  の関数であるので、 $K(r)$  などと明記することにする。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、それぞれ、

$$K(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2r}, \quad U(r) = -\frac{GmM}{r} \quad (8.28)$$

である。運動エネルギー項では、円軌道上での速度の式 (8.24) を用いた ( $r = R + h$ )。これより、エネルギー  $E(r)$  は

$$E(r) = -\frac{GmM}{2r} \quad (8.29)$$

となる。

以上より、運動エネルギーはエネルギーの大きさに等しく、ポテンシャルエネルギーはエネルギーの 2 倍であることがわかる。

$$\begin{aligned} \text{運動エネルギー} & \quad K = |E| > 0 \\ \text{ポテンシャルエネルギー} & \quad U = 2E < 0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

運動エネルギー項は一般に極座標で

$$K(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (8.31)$$

と書ける。円運動の場合は、 $dr/dt = 0$  であるので、第 1 項は 0 である。第 2 項に  $L = r \times mv$  を代入すると  $K = \frac{1}{2}mv^2$  が得られる。すなわち、運動エネルギーは第 2 項だけからなり、これは有効ポテンシャルの内の遠心力ポテンシャルである。

運動エネルギーを角運動量で表した式 (8.31) と、運動エネルギーと力学的エネルギーの関係式 (8.30) から、円運動における角運動量と力学的エネルギーの関係式が得られる：

$$\left[L(r)\right]^2 = -2mr^2E(r). \quad (8.32)$$

## 8.2.2 楕円軌道

近地点（地表に最も近づく点）の高度が  $h$  で，遠地点（地表から最も遠ざかった点）の高度が  $h'$  である楕円軌道を考える。また，基準として，高度が  $h$  の円軌道をとる（図 8.2）。

このとき，楕円軌道の長軸半径  $a'$  は

$$a' = \frac{(R+h) + (R+h')}{2} = R + \frac{h+h'}{2} \quad (8.33)$$

であり，基準となる円軌道の半径は  $a = R+h$  である。ケプラーの第3法則より楕円軌道の周期  $T'$  は

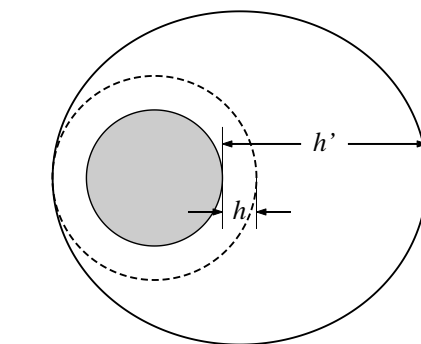


図 8.2: 人工衛星の円軌道と楕円軌道

$$T' = T \left( \frac{a'}{a} \right)^{3/2} = T \left( \frac{R + (h+h')/2}{R+h} \right)^{3/2} \quad (8.34)$$

となる。

楕円軌道上の衛星の速度  $v$  は次のようにして求めることができる。まず，(8.19) によりエネルギーは長軸半径で決まり，角運動量には依存しない

$$E = -\frac{GmM}{2a'}. \quad (8.35)$$

一方，地球の中心から距離  $r$  の点において，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} \quad (8.36)$$

が成り立つ。両式から，速度は

$$v = \sqrt{\left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a'} \right) gR^2} = v_{\text{esc}} \sqrt{\left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a'} \right) R} \quad (8.37)$$

と表すことができる。衛星の速度は近地点で最大となり，遠地点で最小となる。たとえば，近地点での高度  $h \approx 200$  km，遠地点での高度  $h' \approx 7200$  km の場合，近地点での速度は  $v = 9.4$  km/s，遠地点での速度は  $v = 4.3$  km/s となる。

## 8.2.3 人工衛星の打ち上げと軌道修正

**軌道修正が必要** 人工衛星に地表で速度を与えただけでは，地球を周回する軌道に乗せることはできない。人工衛星は，地球の中心を焦点の1つとする楕円軌道（図 8.3 の破線）に乗るだけであり，それは人工衛星を打ち上げた地上の点を通る軌道である。この楕円軌道は必ず地球の内部を通るので，そのままでは人工衛星は地球に衝突してしまう。

人工衛星を周回軌道に乗せるためには，地球に衝突する前にロケットのエンジンで軌道修正しなければならない。最も効率が良い軌道修正は，遠地点で，動径ベクトルに垂直な向きに加速することである。このようにすると，転回点の条件  $r \cdot v = 0$  を変えることなく，地球に衝突しない軌道に移行させることができる。

遠地点での軌道修正 一般に、楕円軌道（円軌道も含む）のエネルギー  $E$  は長軸半径  $a$  によって決まる。

$$E = -\frac{GmM}{2a} \quad (8.38)$$

長軸半径  $a$  を除くと、右辺は軌道によらない定数である。地表で速度を与えて乗せた楕円軌道の近地点と遠地点の距離を、それぞれ、 $r_{min}$  と  $r_{max}$  とすると、この楕円軌道の長軸半径  $a'$  は

$$a' = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} \quad (8.39)$$

であり、一方、遠地点で軌道修正して乗せた円軌道の半径は  $a = r_{max}$  である。

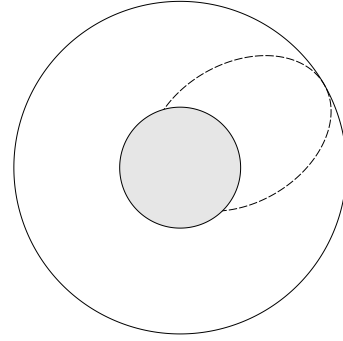


図 8.3: 人工衛星の打ち上げと円軌道への軌道修正

$a' < a$  から、楕円軌道のエネルギー  $E'$  と円軌道のエネルギー  $E$  を比較すると

$$E' = -\frac{GmM}{2a'} < E = -\frac{GmM}{2a} < 0 \quad (8.40)$$

となる。遠地点におけるポテンシャルエネルギーは

$$U(r_{max}) = -\frac{GmM}{a} < 0 \quad (8.41)$$

であるから、遠地点における運動エネルギーの関係は

$$0 < K'(r_{max}) = \frac{GmM}{2a} \left(2 - \frac{a}{a'}\right) < K(r_{max}) = \frac{GmM}{2a} \quad (8.42)$$

となる。すなわち、遠地点で加速することによって楕円軌道から円軌道に移ることができる。逆に、エンジンを逆噴射して、円軌道から楕円軌道に移行することができる。また、同様に、円軌道上で加速すると、その点を近地点とする楕円軌道に移り、楕円軌道の近地点で減速することによって円軌道に移ることができる。

## 8.3 制限3体問題

### 8.3.1 制限3体問題の平衡解

2つの物体が互いに中心力を及ぼしながら運動する場合、その運動は完全に解ける。しかし、3体の運動は一般に解くことができない。ここでは、特別な場合として、2つの物体の質量が大きいときの、質量が小さい3番目の物体の平衡な位置を議論する。

図 8.4 に示すように、点 A にある質量  $M_1$  の物体 1 と、点 B にある質量  $M_2$  の物体 2 が、重心 O のまわりに円軌道を描いて運動していて、質量  $m$  が小さい3番目の物体が平衡の位置  $P(x, y)$  にあるとする。2つの物体の距離を  $d$  とする。このとき、 $\overline{OA} = pd$ ,



$\overline{OB} = (1-p)d$  である。また、物体1と物体2の質量の和を  $M = M_1 + M_2$ 、物体2の質量の割合を  $p = M_2/M$  とする。

質量  $m$  に質量  $M_1$  が及ぼす力を  $F_1$ 、質量  $M_2$  が及ぼす力を  $F_2$  とするとき、 $e_r$  に垂直な成分の力のつりあいは

$$F_1 \sin \theta_1 = F_2 \sin \theta_2 \quad (8.43)$$

と表せる。2つの力  $F_1$  と  $F_2$  の大きさは

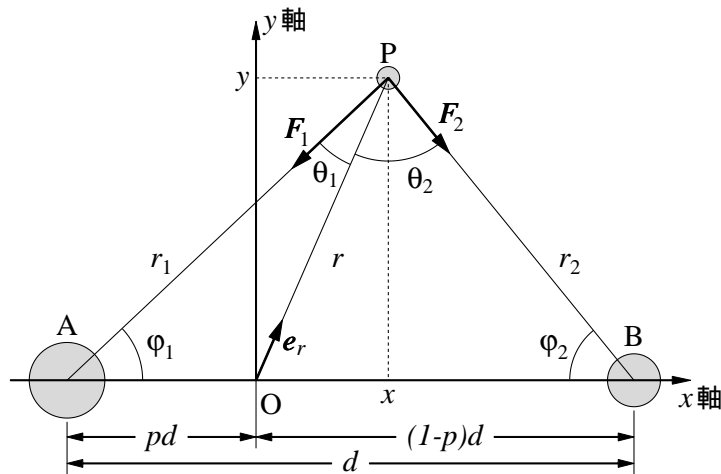


図 8.4: 制限3体問題

$$F_1 = G \frac{mM_1}{r_1^2} = G \frac{mM(1-p)}{r_1^2} \quad F_2 = G \frac{mM_2}{r_2^2} = G \frac{mMp}{r_2^2} \quad (8.44)$$

と書ける。ところで、三角形 OAP 及び三角形 OBP において

$$\sin \theta_1 = \frac{pdy}{rr_1}, \quad \sin \theta_2 = \frac{(1-p)dy}{rr_2} \quad (8.45)$$

が成り立つ。力のつりあいの式 (8.43) に (8.44), (8.45) を代入して次の関係式を得る。

$$\frac{y}{r r_1^3} = \frac{y}{r r_2^3} \quad (8.46)$$

**直線解** 平衡な位置の解の1つが  $y = 0$ 、すなわち、3つの物体が一直線上にある場合である。2つの質量の大きい物体のあいだ、及び、外側に合わせて3つの平衡の位置である。しかし、いずれもポテンシャルの極大点であるので不安定な平衡である。

**正三角形解**  $r_1 = r_2$  を満たすときが別の平衡な位置の解である。すなわち、二等辺三角形であるが、実は3つの物体が正三角形をなす場合である。詳細は示さないが、この平衡な位置でポテンシャルは極小になり、安定な平衡であることがわかる。

## 8.3.2 ラグランジュポイント

以上の結果は次のように要約できる。共通の重心のまわりに円軌道を描く2つの物体からなる系に小さな質量の物体を持ち込んだとき、その物体に対する平衡点は5つあり、それらは全て大きい質量の物体が運動する平面内にある。平衡点の2つは正三角形の頂点にあり ( $M_2$  が  $M_1$  に比べて十分小さければ) 安定である。他の3つの平衡点は大きい質量の物体と一直線上に並び、それぞれ2つの質量の外側と間にあるが、いずれも不安定である。制限3体問題のこれらの解はラグランジュによって見つけられ、ラグランジュポイントと呼ばれる (図 8.5)。

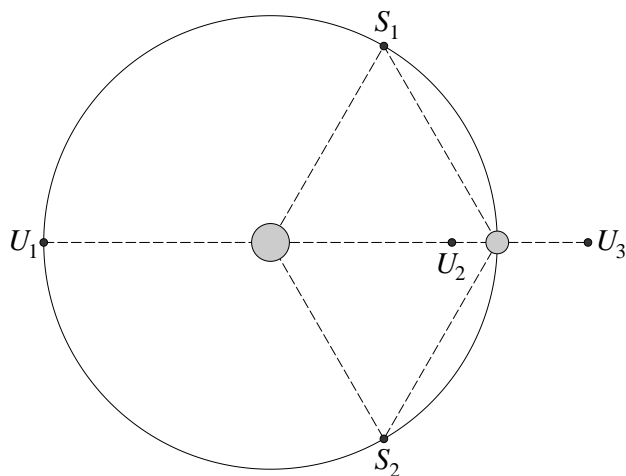


図 8.5: ラグランジュポイント

現実の物理系 (たとえば、地球と月からなる系) の場合、大きい質量をもつ2つの物体の運動は正確な円運動ではない。また、他の物体 (たとえば太陽) による摂動もあるので、正三角形解が安定であるか否かはわからない。しかし、火星と木星の間にある小惑星は、質量の大きい太陽と木星からなる系の正三角形の頂点に当たる2つの点に集まる傾向があることが観測されている。