第 10 章　ベキ級数

10.1　べき級数

べき級数　z_0 及び $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を複素定数とするとき，

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{10.1}$$

の形をした級数を $z - z_0$ の **べき級数** または **整級数** という。この級数は，明らかに，$z = z_0$ で収束する。収束するのは $z = z_0$ だけの場合もあり，他の点でも収束することがある。

10.1.1　級数の収束

定理 10.1　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ が，ある点 $z = c$（$c \neq z_0$）で収束すれば，z_0 を中心とし c を通る円の内部 $|\,z - z_0\,| < |\,c - z_0\,|$ の任意の点 z で絶対収束する。

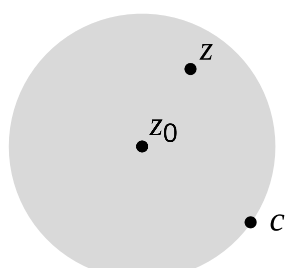

図 10.1: $|\,z - z_0\,| < |\,c - z_0\,|$ での絶対収束

証明　べき級数を

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

と表す。仮定により，この級数が $z = c$ で収束するから，$a_n(c - z_0)^n \to 0$（$n \to \infty$）である。すなわち，すべての n に対して $|\,a_n(c - z_0)^n\,| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ であるような正数 M が存在する。よって，

$$|\,a_n\,| \leq \frac{M}{|\,c - z_0\,|^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ。円の内部 $|z-z_0| < |c-z_0|$ の任意の点 z に対して，べき級数の一般項は

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n \leq M\left(\frac{|z-z_0|}{|c-z_0|}\right)^n$$

である。

$$\left|\frac{z-z_0}{c-z_0}\right| < 1 \quad \text{であるから} \quad M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{c-z_0}\right|^n \quad \text{は公比が 1 より小さい等比級数の和}$$

であり，収束する。よって，べき級数は z で絶対収束する。

定理 10.2　　べき級数の積と商
円 $|z| = R$ の内部で収束する 2 つのべき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

に対して，

(1)　$f(z)g(z)$ は $|z| < R$ で正則であり，Maclaurin 級数展開（次節参照）できる.

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$$

（これを，2 つのべき級数の **Cauchy 積** という。）

(2)　$g(z) \neq 0$ ならば，$h(z) = f(z)/g(z)$ は $|z| < R$ で正則であり，Maclaurin 級数展開できる.

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

零点　$z = z_0$ で正則な関数 $f(z)$ が，$z = z_0$ で正則で 0 でない関数 $g(z)$ を用いて

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$$

の形にあらわされるとき，$z = z_0$ は $f(z)$ の $\boldsymbol{m}$ **位の零点**，あるいは，**位数** $\boldsymbol{m}$ **の零点** という。

定理 10.3　　恒等的に 0 でない正則関数の零点は孤立している。

10.1.2　収束半径

　複素定数を係数とするべき級数

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{10.2}$$

は，$z = z_0$ だけで収束することもあり，あるいは，すべての z に対して収束することもある。この 2 つの特別な場合を除外すると，

べき級数 (10.2) は

　　$|z - z_0| < R$ を満たす点 z に対して収束し，

　　$|z - z_0| > R$ を満たす点 z に対して発散する。

この R を級数 (10.2) の **収束半径** という。また，この円 $|z - z_0| = R$ のことを **収束円** という。このとき，$|z - z_0| = R$ なる z に対しては，収束することもあり発散することもある。
幾何学的には，$z = z_0$ を中心とする半径 R の円を Γ とするとき，級数 (10.2) は Γ の内部の全ての点において収束し，Γ の外部の全ての点において発散する。円 Γ 上の z においては，収束することも発散することもある。

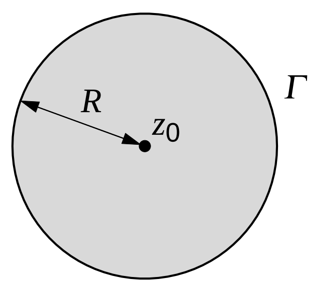

図 10.2: 収束円 Γ と収束半径 R

特別な場合

　　すべての z に対して収束するとき $R = \infty$,

　　$z = z_0$ だけで収束するとき $R = 0$ と表す。

たとえば，べき級数

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{10.3}$$

の収束半径は $R = 1$ である。収束円 $|z| = 1$ 上の z においては，収束することも発散することもある。$z = 1$ では発散し，$z = -1$ では収束する。

定理 10.4　Cauchy-Hadamard の公式

(1)　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\,a_n\,|}} = R \tag{10.4}$$

が定まるならば，R は収束半径である（Cauchy-Hadamard の公式）。

(2)　数列 $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ は収束しないが有界であるとき，収束半径は $R = 1/M$ で与えられ，ここに，M は数列の集積点の最大値である。

(3)　数列 $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ が有界でないときは，収束半径は $R = 0$ である（$z = z_0$ に対してだけ収束する）。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = L \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n (z-z_0)^n\,|} \,=\, |\,z-z_0\,| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} \,=\, |\,z-z_0\,|\,L$$

である。ところで，級数の各項は $a_n(z-z_0)^n$ である。よって，定理 9.16（n 乗根法）より

$$|\,z-z_0\,|\,L \,<\, 1 \qquad \text{すなわち} \qquad |\,z-z_0\,| \,<\, \frac{1}{L} \,=\, R$$

のとき級数は絶対収束し，

$$|\,z-z_0\,|\,L \,>\, 1 \qquad \text{すなわち} \qquad |\,z-z_0\,| \,>\, \frac{1}{L} \,=\, R$$

のとき級数は発散する。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = L = 0$ のとき：　任意に定めた z_1 に対して，$\varepsilon = 1\,/\,(2\,|\,z_1 - z_0\,|)$ とおいたとき，ある数 N が存在して，N より大きいすべての数 n に対して

$$\sqrt[n]{|\,a_n\,|} \,<\, \varepsilon \,=\, \frac{1}{2\,|\,z_1 - z_0\,|} \qquad (\,n \,>\, N\,)$$

となる。これから，

$$|\,a_n\,| \,<\, \frac{1}{(2\,|\,z_1 - z_0\,|)^n} \qquad \text{すなわち} \qquad |\,a_n(z_1 - z_0)^n\,| \,<\, \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ。右辺の 2^{-n} からなる級数は収束するので，定理 9.17（比較法）より，与えられたべき級数は $z = z_1$ に対して絶対収束する。z_1 は任意であるので，全ての有限な z に対して絶対収束する。

(2)　数列 $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ が有界であるとき，定理 9.6（Bolzano-Weierstrass の定理）より，数列は集積点を有する。$\sqrt[n]{|\,a_n\,|} \geq 0$ であるので，集積点の最大値は $M > 0$ である。すなわち，ある正数 ε が与えられたとき，無限個の n に対して

$$M - \varepsilon \;<\; \sqrt[n]{|\,a_n\,|} \;<\; M + \varepsilon \qquad \text{（無限個の } n\text{）}$$

より（2 つの不等式に別けて）

$$|\,z - z_0\,|\,(M - \varepsilon) \;<\; \sqrt[n]{|\,a_n(z - z_0)^n\,|} \tag{10.5}$$

及び

$$\sqrt[n]{|\,a_n(z - z_0)^n\,|} \;<\; |\,z - z_0\,|\,(M + \varepsilon) \tag{10.6}$$

が成り立つ。M は集積点の最大値であるので (10.6) を満たさない項は有限個であり，よって，ある数 N が存在して，$n > N$ である全ての n に対して (10.6) は成り立つ。

● 収束する場合：

$$|\,z - z_0\,| \;<\; \frac{1}{M} \tag{10.7}$$

であるとき，$1 - M\,|\,z - z_0\,| \;>\; 0$ であるので，

$$\varepsilon \;=\; \frac{1 - M\,|\,z - z_0\,|}{2\,|\,z - z_0\,|}$$

を選ぶと，$\varepsilon > 0$ であり，また，これを (10.6) に代入して

$$\sqrt[n]{|\,a_n(z - z_0)^n\,|} < \frac{1 + M\,|\,z - z_0\,|}{2} < 1 \qquad (\,n > N\,)$$

と書き直せる。最後の不等式には (10.7) を用いた。よって，定理 9.16（n 乗根法）より，与えられた級数は収束する。

● 発散する場合：

$$|\,z - z_0\,| \;>\; \frac{1}{M} \tag{10.8}$$

であるときは，$1 - M\,|\,z - z_0\,| \;<\; 0$ であるので，

$$\varepsilon \;=\; \frac{M\,|\,z - z_0\,| - 1}{2\,|\,z - z_0\,|}$$

を選ぶと，$\varepsilon > 0$ であり，また，これを (10.5) に代入して

$$\sqrt[n]{|\,a_n(z - z_0)^n\,|} > \frac{1 + M\,|\,z - z_0\,|}{2} > 1 \qquad (\,n > N\,)$$

と書き直せる。最後の不等式には (10.8) を用いた。よって，定理 9.16（n 乗根法）より，与えられた級数は発散する。

(3)　数列 $\sqrt[n]{|\,a_n\,|}$ が有界でないとき，任意の正数 M に対して

$$\sqrt[n]{|\,a_n\,|} > M \qquad (\text{無限個の } n)$$

が成り立つ。ここで，$z \neq z_0$ として

$$M = \frac{1}{|\,z - z_0\,|}$$

と選ぶと，

$$\sqrt[n]{|\,a_n\,|} > \frac{1}{|\,z - z_0\,|} \qquad \text{より} \qquad \sqrt[n]{|\,a_n(z - z_0)^n\,|} > 1$$

となる。定理 9.16（n 乗根法）より，与えられた級数は発散する。よって，自明な点 $z = z_0$ に対してだけ級数は収束する。

定理 10.5　d'Alembert の公式

べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$$

が定まるならば，R は収束半径である。

級数の各項 $c_n = a_n(z - z_0)^n$ からなる級数に定理 9.18（比率法）を適用して，

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = |\,z - z_0\,| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

が定まるとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は，$L < 1$ ならば収束し，$L > 1$ ならば発散する。$L = 1$ のときはどちらともいえない。これより，収束半径 $R = |\,z - z_0\,|$ は

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

で与えられることがわかる。

べき級数 (10.3) の場合，$a_n = 1/n$ である。収束半径は d'Alembert の公式を用いて直ちに求められる：

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1.$$

Cauchy-Hadamard の公式を用いると，収束半径は

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

と求められる。

10.1.3　項別積分と項別微分

定理 10.6　べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

の収束半径が R であるとき，その級数で定義される関数 $f(z)$ は収束円 $|\,z-z_0\,| = R$ の内部で正則であり，収束円の内部の任意の点 z において項別微分・項別積分できる。

項別積分　収束円の内部に，区分的になめらかな弧 C をとる。C 上で連続な関数 $g(z)$ に対して，べき級数の各項に $g(z)$ を乗じてできる級数は，C 上で項別に積分できて

$$\int_C g(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \right) \mathrm{d}z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n \,\mathrm{d}z$$

が成り立つ。

項別微分　べき級数は収束円の内部の各点で項別に微分できて，次の関係式が成り立つ。

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$$

証明　段階に分けて証明する。

1°　**$f(z)$ の連続性**

収束円の内部からなる領域 D ： $|\,z-z_0\,| < R$ で，べき級数の和 $f(z)$ が連続であることを示す。

$z_0 = 0$ の場合：和 $f(z)$ を部分和 $S_N(z)$ と余り $\rho_N(z)$ の和

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;=\; \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n \;=\; S_N(z) + \rho_N(z)$$

と書くと，任意の正数 ε に対して，N を十分大きくとるとき，D の任意の点 z に対して $|\,\rho_N(z)\,| < \varepsilon$ が成り立つ。$S_N(z)$ は N 次多項式であるから，z_1 を D の任意の点とすると，任意の正数 ε に対して，ある適当な正数 δ があって，

$$|\,z-z_1\,| < \delta \quad \text{のとき} \quad |\,S_N(z) - S_N(z_1)\,| < \varepsilon, \quad \text{すなわち} \quad \lim_{z\to z_1} S_N(z) \;=\; S_N(z_1)$$

である。よって，

$$|\,f(z) - f(z_1)\,| \;\le\; |\,S_N(z) - S_N(z_1)\,| + |\,\rho_N(z)\,| + |\,\rho_N(z_1)\,| \;<\; 3\varepsilon$$

となる。この式は，べき級数が（D の任意の点）z で連続であることを表している。

$z_0 \ne 0$ の場合は，上の証明で z の代わりに $z - z_0$ とすればよい。

2° **項別積分**

べき級数を部分和と余りに分け $g(z)$ をかける,

$$g(z)f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z) z^n + g(z)\rho_N(z).$$

$f(z)$, z^n, $g(z)$ は C 上で連続であるから, これらの積 $g(z)f(z)$, $g(z)z^n$ も連続であり C 上で積分できる。従って, これらの項で表される $g(z)\rho_N(z)$ も積分できる,

$$\int_C g(z)\rho_N(z)\,\mathrm{d}z = \int_C g(z)f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,\mathrm{d}z$$

べき級数は収束するから, $\rho_N(z) \ \to \ 0 \ (N \ \to \ \infty)$.

C 上において $|\,g(z)\rho_N(z)\,|$ の最大値を M_N とすると,

$$\left| \int_C g(z)\rho_N(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq M_N \int_C |\,\mathrm{d}z\,| \ \to \ 0 \qquad (N \ \to \ \infty)$$

であり, すなわち, $\lim_{N\to\infty}$ の極限は 0 になる,

$$\lim_{N\to\infty} \int_C g(z)\rho_N(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

以上より, 項別積分が成り立つ,

$$\int_C g(z)f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,\mathrm{d}z.$$

3° **項別微分**

Cauchy の微積分公式と項別積分の定理を用いる。

z を収束円の内部の点, C を収束円の内部にあり z を内部に含む正の向きの Jordan 曲線とする。また,

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i\,(s-z)^2}$$

で, s は C 上の点とする。$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は C の上と内部で正則であるから, Cauchy の微積分公式により次のように表せる.

$$\int_C g(s)f(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$$

一方, z^n は正則であるから, 次の関係式が成り立つ,

$$\int_C g(s)s^n\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^n}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s, \qquad \frac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}z} = n\,z^{n-1}, \qquad (n = 1,\, 2,\, \cdots).$$

上で得られた結果，及び項別積分の定理より

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \int_C g(s)f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C g(s)\,a_n s^n\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}z^n}{\mathrm{d}z}$$

となり，よって

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n z^{n-1}$$

が得られる。

4° **$f(z)$ の正則性**

項別積分で $g(z)=1$ とおくと，

$$\int_C g(z)z^n\,\mathrm{d}z = \int_C z^n\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{より} \quad \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

が得られる。C は収束円の内部の任意の Jordan 曲線でよいから，Morera の定理により，級数の和 $f(z)$ は収束円の内部で正則である。

なお，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ の収束半径が R であるとき，項別積分・項別微分して得られるべき級数

$$\begin{aligned}\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,\mathrm{d}z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}\end{aligned}$$

の収束半径も R である。

負べき級数　次の形の級数を負べき級数という。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z-z_0} + \frac{a_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

ここで，$w = \dfrac{1}{z-z_0}$ とおけば，この級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n + \cdots$$

となる。このべき級数の収束半径を R とすると，負べき級数は円 $|\,z-z_0\,| = \dfrac{1}{R}$ の外側の任意の z で絶対収束する。その範囲で負べき級数は正則であり，項別微分・項別積分ができる。

10.2　Taylor 級数と Laurent 級数

10.2.1　Taylor 級数

定理 10.7　Taylor の定理
領域 D ： $|\,z-z_0\,|<R$ で関数 $f(z)$ が正則であるとき，D 内の点 z において，$f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; f(z_0)+\frac{f^{(1)}(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots \\ &\quad +\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots \end{aligned} \tag{10.9}$$

の形のべき級数に展開できる。すなわち，右辺のべき級数は $|\,z-z_0\,|<R$ なる z に対して収束し，その極限は $f(z)$ に等しい。

このべき級数を，点 z_0 のまわりの $f(z)$ の **Taylor 級数**，**Taylor 級数展開**，あるいは **Taylor 展開** という。特に，$z_0=0$ の場合を **Maclaurin 級数**，**Maclaurin 級数展開**，あるいは **Maclaurin 展開** という。

Taylor の定理の証明

1°　$z_0=0$ の場合

原点を中心とする半径 R の円 C の内部の任意の 1 つの点 z を固定する。すなわち，$|\,z\,|<R$ である。また，原点を中心とする半径 R_1（$r<R_1<R$）で正の向きをもつ円を C_1 とする。C_1 上の点を s で表すと $|\,s\,|=R_1$ である。このとき，z は C_1 の内部にあり，仮定により $f(z)$ は C_1 の上と内部で正則であるから，Cauchy の積分公式によって

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s$$

と表せる。上の積分の被積分関数の分母を変形し，その第 2 因子を級数展開すると，

$$\frac{1}{s-z}\;=\;\frac{1}{s}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{s}},\qquad \frac{1}{1-c}\;=\;1+c+c^2+\cdots+c^{N+1}+\frac{c^N}{1-c}$$

より，

$$\frac{1}{s-z}\;=\;\frac{1}{s}+\frac{z}{s^2}+\frac{z^2}{s^3}+\cdots+\frac{z^{N-1}}{s^N}+\frac{z^N}{(s-z)s^N}$$

と表せる。これを Cauchy の積分公式に代入して

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s}\,\mathrm{d}s+\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s^2}\,\mathrm{d}s\right)z+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s^N}\,\mathrm{d}s\right)z^{N-1}+\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)s^N}\,\mathrm{d}s\right)z^N \\ &=\; f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\,z+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,z^2+\cdots+\frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}\,z^{N-1}+\rho_N(z) \end{aligned}$$

となる。これは $z_0 = 0$ の場合の Taylor 級数であり，$N \to \infty$ のとき $\rho_N(z) \to 0$ となることを示せばよい。

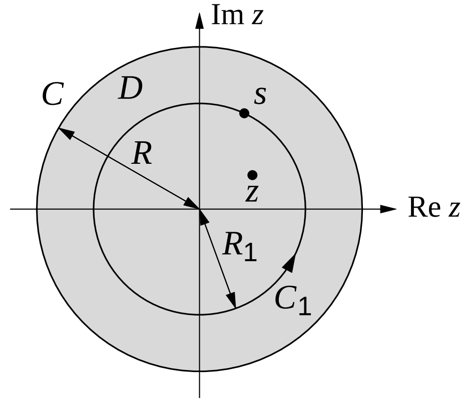

図 10.3: Taylor 級数展開（$z_0 = 0$ の場合）

$|\,z\,| = r$，$|\,s\,| = R_1$ であり，$r < R_1$ より

$$|\,s - z\,| \;\geq\; |\,|\,s\,| - |\,z\,|\,| \;=\; R_1 - r$$

の関係が成り立つ。従って，C_1 上における $|\,f(s)\,|$ の最大値を M_1 とすると，

$$\begin{aligned}
|\,\rho_N(z)\,| \;&=\; \left|\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)s}\,\mathrm{d}s\right)z^N\right| \\
&=\; \left|\frac{z^N}{2\pi i}\right|\left|\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)s}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq\; \frac{|\,z\,|^N}{2pi}\int_{C_1}\frac{|\,f(s)\,|}{|\,s-z\,|\,|\,s\,|}\,|\,\mathrm{d}s\,| \\
&\leq\; \frac{r^N}{2\pi}\,\frac{M_1}{(R_1-r)R_1}\,2\pi R_1 \;=\; \frac{M_1R_1}{R_1-r}\left(\frac{r}{R_1}\right)^N
\end{aligned}$$

となり，$N \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束し，従って，$\rho_N(z)$ も 0 に収束する。

2°　$z_0 \neq 0$ の場合

$z + z_0$ は z の 1 次関数であるから整関数であり，また，$f(z)$ は C の内部で正則である。従って，合成関数 $g(z) = f(z + z_0)$ は $|\,(z + z_0) - z_0\,| < R$ で正則，すなわち，$g(z)$ は $|\,z\,| = R$ の内部で正則である。

よって，1° より

$$g(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,z^n$$

と表すことができる。すなわち，

$$f(z+z_0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,z^n \qquad (\,|\,z\,| < R\,)$$

であり，よって

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (\,|\,z-z_0\,| < R\,)$$

が得られる。

定理 10.8　Taylor 級数の一意性
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ が，円 $|\,z-z_0\,| = R$ の内部のすべての点で $f(z)$ に収束するならば，このべき級数は $f(z)$ の Taylor 級数展開で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$$

である。

証明　$z_0 = 0$ の場合の証明を示す。$z_0 \neq 0$ の場合も全く同様。

べき級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

の収束円 C 内の任意の点 z で，項別微分の定理により，

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$$

が成り立つ。正則関数の導関数は正則である。

上の操作を繰り返して，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f(z)}{\mathrm{d}z^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n z^{n-2} \\ \frac{\mathrm{d}^3 f(z)}{\mathrm{d}z^3} &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n z^{n-3}\end{aligned}$$

が，次々に得られる。

$z = 0$ とおくと，

$$f(0) = a_0, \qquad \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}z} = 1!\, a_1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f(0)}{\mathrm{d}z^2} = 2!\, a_2$$

などより，

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$$

が得られる。

10.2.2　Laurent 級数

定理 10.9　Laurent の定理
点 z_0 を中心とする，半径が R_0，R_1 の同心円 C_0，C_1 が正の向きをもつとする（図 10.4 左図）。関数 $f(z)$ が C_0 上，C_1 上，および C_0 と C_1 の間の円環領域において正則であるとき，この円環領域の任意の点 z において $f(z)$ は次の形に表される：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad (\, R_0 < |\, z - z_0 \,| < R_1 \,) \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad (\, n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad (\, n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots) \end{aligned} \tag{10.11}$$

これを，点 z_0 のまわりの $f(z)$ の **Laurent 級数**，**Laurent 級数展開**，あるいは **Laurent 展開** という。また，負べきの項の部分を **主要部** という。

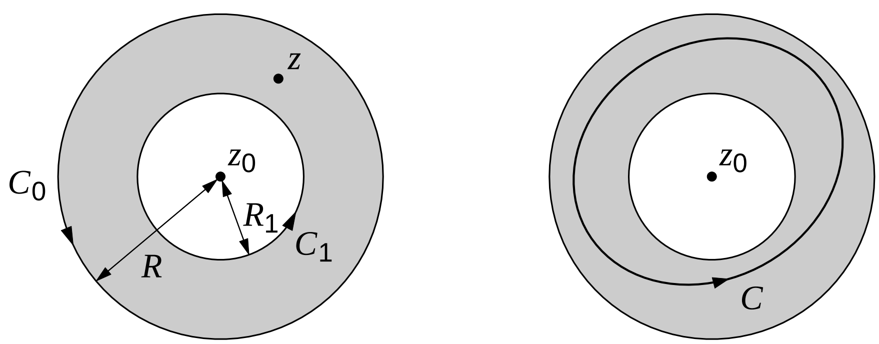

図 10.4: Laurent 級数展開

注意１：　Laurent 展開は，展開の中心が正則でない点であっても差し支えない。

注意２：　$f(z)$ が点 z_0 以外で正則であれば，$0 < |\, z - z_0 \,| < R_1$ で成り立つ。

注意３：　$f(z)$ が C_1 上と C_1 の内部で正則であれば，b_n の被積分関数も正則であるから，$b_n = 0$ であり，Laurent 級数は Taylor 級数に一致する。

注意４：　$R_0 \leq |\, z - z_0 \,| \leq R_1$ において a_n と b_n の被積分関数が正則であるので，この円環領域内の任意の Jordan 曲線（正の向き）を C_0 と C_1 の代わりの積分路にとっても，積分の値 a_n，b_n は変わらない。よって，次のように表すこともできる（図 10.4 右図）：

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (\, R_0 < |\, z - z_0 \,| < R_1 \,) \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad (\, n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \cdots) \end{aligned} \tag{10.12}$$

Laurent の定理の証明

1° $z_0 = 0$: $f(z)$ が $R_0 \leq |\,z\,| \leq R_1$ で正則な場合。

Cauchy の積分定理より

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s$$

と表されるが，ここで，

$$\frac{1}{s-z} \;=\; \frac{1}{s}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{s}} \qquad -\frac{1}{s-z} \;=\; \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{s}{z}}$$

と書き直し，第 2 因子を z/s および s/z でそれぞれを展開する。

それを被積分関数に代入し，項別に積分する。

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N-1}z^{N-1} + \rho_N(z) \\ &\qquad + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_N}{z^N} + \sigma_N(z) \end{aligned}$$

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s^{N+1}}\,\mathrm{d}s \qquad \rho_N(z) \;=\; \frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z)s}\,\mathrm{d}s$$

$$b_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{s^{-n+1}}\,\mathrm{d}s \qquad \sigma_N(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i z^N}\int_{C_0}\frac{s^N f(s)}{z-s}\,\mathrm{d}s$$

余りが $\rho_N(z) \to 0$ （ $N \to \infty$ ）となることは，Taylor の定理と全く同じ。

負のべき級数展開の余りが $\sigma_N(z) \to 0$ （ $N \to \infty$ ）となることは次のように示すことができる。

C_0 上における $|\,f(s)\,|$ の最大値を M_0 とすると，

$$\begin{aligned} |\,\sigma_N(z)\,| \;&\leq\; \frac{1}{2\pi\,|\,z\,|^N}\int_{C_0}\frac{|\,s\,|^N\,|\,f(s)\,|}{|\,z-s\,|}\,|\,\mathrm{d}s\,| \\ &\leq\; \frac{1}{2\pi r^N}\int_{C_0}\frac{{R_0}^N M_0}{r-R_0}\,|\,\mathrm{d}s\,| \\ &=\; \frac{M_0 R_0}{r-R_0}\left(\frac{R_0}{r}\right)^N \;\to\; 0 \quad (\,N \to \infty\,) \end{aligned}$$

が得られる。

2° $z_0 \neq 0$: $f(z)$ は $R_0 \leq |\,z\,| \leq R_1$ で正則であるから，$g(z) = f(z+z_0)$ は $R_0 \leq |\,(z+z_0)-z_0\,| \leq R_1$，すなわち，$R_0 \leq |\,z\,| \leq R_1$ で正則である。

よって，

$$g(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n} \qquad (\,R_0 \leq |\,z\,| \leq R_1\,)$$

が成り立つ。上の $z_0 = 0$ の場合の証明において，z の代わりに $z - z_0$ とおけばよい。

定理 10.10　Laurent 級数の一意性
べき級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ が，z_0 のまわりの円環領域の内部のすべての点で $f(z)$ に収束するならば，このべき級数は $f(z)$ の Laurent 級数展開である。

証明　$z_0 = 0$ の場合の証明を示す。

べき級数の項別積分の定理を，負のべきも含むものに拡張すればよい。

C を，円環領域のまわりの円（正の向き）とする。

$$\int_C g(z)f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z-z_0)^m\,\mathrm{d}z$$

ここで，

$$g(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad (\,n = 0,\,\pm 1,\,\cdots\,)$$

とすると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n-m+1}}\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases} 0 & (\,m \neq n\,) \\ 1 & (\,m = n\,) \end{cases}$$

であるから

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \;=\; c_n$$

が得られる。

一つの複素関数の異なる領域での Laurent 展開
次の複素関数 $f(z)$ の $z = 0$ を中心とする Laurent 展開を考える：

$$f(z) \;=\; \frac{3}{z^2+z-2} \;=\; \frac{3}{(z-1)(z+2)} \;=\; \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}. \tag{10.13}$$

(1)　$|\,z\,| < 1$ での Laurent 展開：この領域において，上の部分分数を

$$f(z) \;=\; -\,\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}$$

と書き直すと，第 1 項で $|\,z\,| < 1$ であり，第 2 項で $|\,\frac{z}{2}\,| < \frac{1}{2} < 1$ であるので，それぞれの項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \;&=\; 1 + z + z^2 + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} \;&=\; \frac{1}{2}\Bigl(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4}\cdots\Bigr) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

と展開できる。よって，関数 $f(z)$ の Laurent 展開は次の式で与えられる：

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad (\,|\,z\,| < 1\,) \tag{10.14}$$

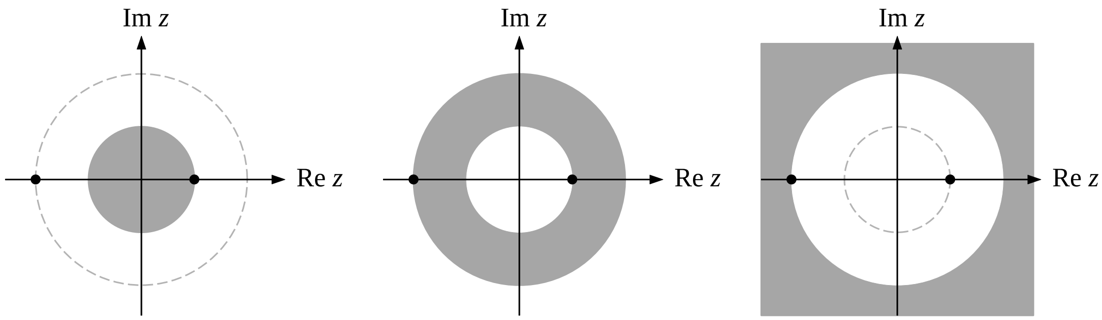

図 10.5: (10.13) の Laurent 級数展開．左：(1) の領域，中：(2) の領域，右：(3) の領域

(2)　$1 < |\,z\,| < 2$ での Laurent 展開：この領域において，上の部分分数を

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}$$

と書き直すと，第 1 項で $|\,\frac{1}{z}\,| < 1$ であり，第 2 項で $|\,\frac{z}{2}\,| < 1$ であるので，それぞれの項はべき級数展開ができる。その結果，関数 $f(z)$ の Laurent 展開は次の式で与えられる：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad (\,1 < |\,z\,| < 2\,) \tag{10.15}$$

(3)　$2 < |\,z\,|$ での Laurent 展開：この領域において，上の部分分数を

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

と書き直すと，第 1 項で $|\,\frac{1}{z}\,| < \frac{1}{2} < 1$ であり，第 2 項で $|\,\frac{2}{z}\,| < 1$ であるので，それぞれの項はべき級数展開ができる。その結果，関数 $f(z)$ の Laurent 展開は次の式で与えられる：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{z^n} \qquad (\,2 < |\,z\,|\,) \tag{10.16}$$

このように，一つの複素関数 (10.13) でも，適用する領域に応じて，(10.14)，(10.15)，(10.16) に示すように異なる形の Laurent 級数展開（与えられた領域内の z に対して収束する）が得られる。また，展開の中心を原点 $z = 0$ 以外に取れば，それに応じて展開式は異なる。